

Апрокс им. на скінч. елем.	лінійна		квадратична		кубічна ермітова неперервна		кубічна ермітова неперервно диференційова на	
Номер ітерації	N^j	δ^j %	N^j	δ^j %	N^j	δ^j %	N^j	δ^j %
0	20	485563.6	20	2542.0692	20	53893.5981	20	19940.2
1	30	114432.9	29	562.9214	28	8582.0931	22	123004.4
2	47	8240.461	41	74.5692	37	437.2901	25	710787.7
3	63	1624.905	51	12.6308	44	11.5732	30	2485122
4	79	66.172	59	3.9809	48	1.9068	37	285431.3
5	90	10.931	64	1.5709	51	0.5508	42	12337.26
6	97	7.3304	67	0.6135	53	0.1042	45	336.233
7	101	6.0979	69	0.2811	54	0.0095	47	6.7618
8	103	5.6625	70	0.2048	55	0.0007	48	0.92
9			72	0.1873	56	0.0003		

УДК 519.6

М.Ф. Копитко

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ШАРУВАТИХ ТІЛ

Широке використання композиційних матеріалів для виготовлення конструктивних елементів різноманітних приладів і механізмів привело до появи багатьох нових і розвитку відомих підходів до розв'язування задач визначення їх напружено-деформованого стану. Згадані елементи, являють собою переважно багатошарові тонкостінні пластини або оболонки, матеріал кожного шару яких є композитом, армованим односпрямованими волокнами. У зв'язку з невеликою відносною товщиною конструктивного елемента і наявністю в пакеті декількох ще тонших шарів застосування чисельних методів до розв'язування задачі в рамках теорії пружності стає в цьому випадку дуже проблематичним. Тому

розробляються різноманітні підходи, які ґрунтуються на побудові математичних моделей пружного деформування шаруватих конструкцій з використанням гіпотез теорій оболонок. Огляд робіт в цьому напрямку наведено в [1,2]. Серед них можна виділити два основні напрями побудови теорій шаруватих оболонок. Перший охоплює дослідження, в яких гіпотези приймаються для кожного шару. В цьому випадку отримують системи рівнянь, порядок яких залежить від кількості шарів, що в свою чергу стає накладним при великій кількості шарів і невиправданим при малій відносній товщині. Другий напрям полягає в прийнятті певних гіпотез для цього пакету. Тоді порядок системи рівнянь не залежить від кількості шарів, але не завжди адекватно описується напружено-деформований стан, особливо для середніх товщин.

Ми здійснили спробу поширити запропонований у [3] підхід до розв'язування задач пружного деформування шаруватих елементів конструкцій. Суть його полягає в тому, що для опису процесу деформування використовуються тривимірні рівняння теорії пружності, записані в криволінійній системі координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Шукані переміщення в кожному шарі представляються у вигляді скінченного ряду

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{m=0}^{M_i} u_i^m(\alpha_1, \alpha_2) P_m(\alpha_3), i=1,2,3, \quad (1)$$

де $P_m(\alpha_3)$ - поліноми Лежандра, $u_i^m(\alpha_1, \alpha_2)$ - невідомі функції, апроксимація яких здійснюється на скінченних елементах в області зміни координат α_1, α_2 . Використовуючи різні степені поліномів M_i в розкладі (1), можна тим самим отримати відповідний закон зміни переміщень вздовж товщини тонкостінного тіла. Тобто, не виписуючи відповідних систем рівнянь, розглядаємо певні наближення для задач деформування шаруватих конструкцій.

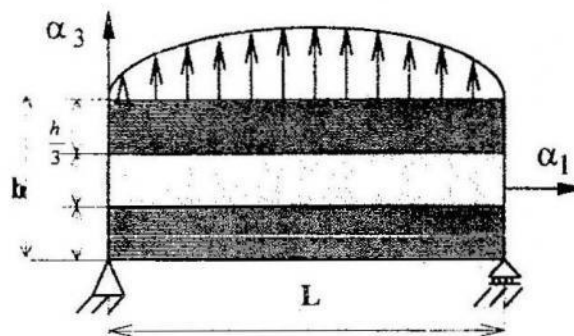


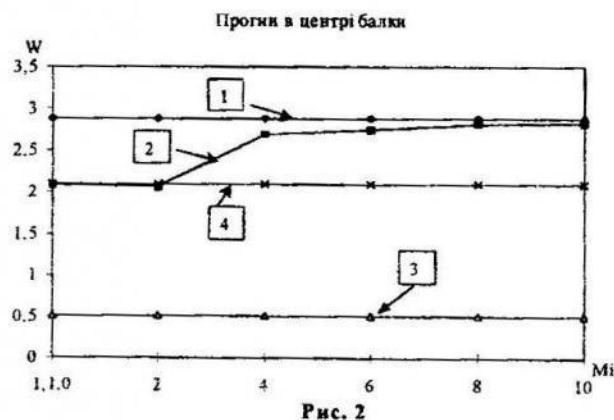
Рис. 1

Як приклад використання запропонованого підходу розглядається задача про згин тришарової вуглепластикової балки (рис.1) під дією навантаження $q = q_0 \sin(\pi \alpha_1 / L)$, аналітичний розв'язок якої в рамках теорії пружності наведений у [4]. Дана задача використовувалась багатьма авторами як модельна для апробації запропонованих ними підходів. Матеріал кожного шару балки є композитом, який армований односпрямованими волокнами, і має такі механічні властивості:

$$E_K = 1,724 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, E_T = 6,895 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, G_{KT} = 3,448 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \\ G_{TT} = 1,379 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad \nu_{KT} = \nu_{TT} = 0.25$$

Тут K відповідає напрямку вздовж волокон, T - поперек волокон. У коефіцієнті Пуасона ν_{KT} , T - означає напрям дії сили, K - напрям стиску. Волокна в зовнішніх шарах балки розташовані під кутом 0° до осі α_1 , у внутрішньому - під кутом 90° . Геометрія і навантаження вибирались такими: $L=24$, $L/h=4$ і 10 , $q_0 = 6,895 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$.

Для даної задачі порівнювали отримані результати з відомими [4]. На рис. 2 показаний графік (лінія 2) залежності прогину в центрі балки від степенів поліномів M_i в розкладі (1) для $L/h=4$. Для кращої оцінки чисельно-аналітичного розв'язку на цьому ж рисунку наведені значення прогину, визначені з використанням інших підходів.



Пряма 1 відповідає аналітичному розв'язку в рамках теорії пружності [4] (найбільш точний розв'язок), пряма 4 - теорія типу Тимошенка, пряма 3 - класична теорія пластин. Як бачимо з наведених даних, запропонований чисельно-аналітичний підхід дає змогу отримувати результати, аналогічні до розв'язків в рамках теорії типу Тимошенка (ступень поліномів 1,2) або теорії пружності

(починаючи з 4), користуючись одними й тими ж рівняннями і програмним комплексом.



Рис. 3

На рис. 3 зображені графіки залежності похибки обчислення прогину від степенів поліномів для різних відносних товщин балки. Як бачимо, точність розв'язування задачі для балки зі шаруватого композиту підвищується із зменшенням відносної товщини.

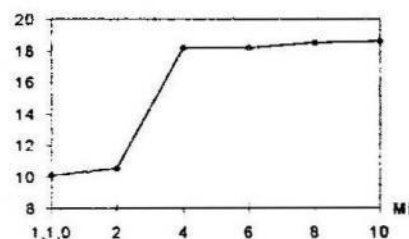


Рис. 4

На рис.4 наведено залежність нормального напруження σ_{11} на навантаженій поверхні балки (в центрі) від степенів поліномів в розкладі (1). Як бачимо, для отримання достовірних результатів необхідно підвищувати ступінь поліномів у законі розподілу переміщень вздовж товщини.

1. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Методы расчета оболочек. Т. 4. Теория оболочек переменной жесткости. - Киев: Наук. думка, 1981. -544 с. 2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. - Киев: Наук. думка, 1991.- 216с. 3. Копитко М.Ф., Савула Я.Г. Алгоритмічний підхід до дослідження задач пружного деформування оболонок // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.-1997.-Вип. 46.- С. 10-16. 4. Pagano H.J. Exact solutions for composite laminites in cylindrical bending // J. Composite Materials. -1969.- Vol.3.- P.398-341.