УДК 539.3

М.Д. Коркуна, М.В. Делявський, Н.І. Берегова

ПРО УЗАГАЛЬНЕННЯ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ

Механіка руйнування, як розділ механіки деформівного твердого тіла, вивчає пружну та граничну рівновагу матеріалів з тріщиноподібними дефектами, тобто криволінійними отворами, що містять тріщини або точки звороту на контурі. Для такого дефекту характерним є рівність нулю в його вершині першої похідної від відображувальної функції.

Математично тріщину моделюють розрізом нульової ширини. Напруження на кінцях таких розрізів мають кореневу особливість, тобто стають необмеженими при наближенні до їх вершин, що фізично нереально, оскільки навіть при найменшому навантаженні повинно відбутися руйнування матеріалу.

Тут пропонується модель тріщини, для якої радіус кривини у вершині є скінченний, тобто перша похідна від відображувальної функції відмінна від нуля, але настільки малий, що квадратом цієї похідної можна знехтувати. Такі дефекти назвемо щілиноподібними.

Розглянемо безмежну анізотропну пластину із щілиноподібним дефектом, вільним від навантажень. На безмежності пластина піддана дії двовісного розтягу-зсуву. Напружений стан такої пластини описується комплексними потенціалами $\varphi_r(\xi_r)$, визначеними в комплексних площинах ξ_r, утворених з реальних фізичних площин z_r шляхом афінних перетворень

$$z_r = \omega_r(\xi_r), \quad r = \overline{1,2} \tag{1}$$

Поле переміщень в такій площині визначається за формулою

$$u_j = 2\,\mathrm{Re}\sum_{r=1}^{2} t_i^{(r)}\varphi_r(\xi_r); \tag{2}$$

Тут $t_j^{(r)} - j, r = \overline{1,2}$ - параметри, що залежать від пружних сталих матеріалу; ξ_r - комплексні змінні в афінних площинах, що відповідають фізичним площинам z_1 і z_2; Щоб отримати асимптотичні формули розподілу напружень і переміщень в околі вершини тріщиноподібного

дібного дефекту перейдемо у формулах (2) до локальної системи координат $\widetilde{z}_r$ в його k -ій вершині, згідно перетворення

$$z_r = z_{0r}^{(k)} + \widetilde{z}_r\, \mathrm{e}^{i\tau_k} = \omega_r\left[\xi_{0r}^{(k)} + \widetilde{\xi}_r\, \mathrm{e}^{i\gamma_k}\right] \tag{3}$$

де $\xi_{0r}^{(k)}$ - точки одиничного кола, що відповідають вершинам дефекту $z_{0r}^{(k)}$ в площинах z_r; τ_k - кут між k-ою вершиною дефекту і віссю Ox_1.

Приведемо розклади функцій напружень і відображувальних функцій в ряди Тейлора в околі вершини дефекту (точка $\xi_{0r}^{(k)}$), де κ - номер вершини.

$$\varphi_r\left(\xi_r\right) = \varphi_r\left(\xi_{0r}^{(k)}\right) + \varphi_r'\left(\xi_{0r}^{(k)}\right)\widetilde{\xi}_r\, \mathrm{e}^{i\gamma_k} + \frac{1}{2}\varphi_r''\left(\xi_{0r}^{(k)}\right)\widetilde{\xi}_r^{\,2}\, \mathrm{e}^{2i\gamma_k} + \ldots \tag{4}$$

$$\omega_r\left(\xi_r\right) = \omega_r\left(\xi_{0r}^{(k)}\right) + \omega_r'\left(\xi_{0r}^{(k)}\right)\widetilde{\xi}_r\, \mathrm{e}^{i\gamma_k} + \frac{1}{2}\omega_r''\left(\xi_{0r}^{(k)}\right)\widetilde{\xi}_r^{\,2}\, \mathrm{e}^{2i\gamma_k} + \ldots \tag{5}$$

Враховуючи, що згідно (3,5)

$$\widetilde{z}_r\, \mathrm{e}^{i\tau_k} = z_r - z_{0r}^{(k)} = \omega_r\left(\xi_r\right) - \omega_r\left(\xi_{0r}^{(k)}\right) \tag{6}$$

отримуємо квадратне рівняння з розв'язку якого встановлюємо зв'язок між змінними, $\widetilde{z}_r$ і $\widetilde{\xi}_r$.

$$\widetilde{\xi}_r\, \mathrm{e}^{i\gamma_k} = -\frac{\omega_r'\left(\xi_{0r}^{(k)}\right)}{\omega_r''\left(\xi_{0r}^{(k)}\right)} + \frac{\sqrt{\omega_r'^{2}\left(\xi_{0r}^{(k)}\right)/\,\omega_r''\left(\xi_{0r}^{(k)}\right) + 2\widetilde{z}_r\, \mathrm{e}^{i\tau_k}}}{\sqrt{\omega_r''\left(\xi_{0r}^{(k)}\right)}}\, e^{i\tau_k/2} + \ldots \tag{7}$$

де

$$\widetilde{z}_r = \widetilde{r}\left[\cos\theta + \mu_r^{(k)}\sin\theta\right] \tag{8}$$

Тут $(\widetilde{r},\theta)$ - полярні координати; параметри $\mu_r^{(k)}$, визначені у локальній полярній системі координат з центром у k-ій вершині дефекту, повернутій відносно основної системи на кут τ_k

Для досить широкого класу дефектів, що мають одну або дві осі пружної симетрії співвідношення ( ) можна представити у вигляді

$$\widetilde{\xi}_r e^{i\gamma_k} = \frac{-\sqrt{\rho} + \sqrt{\mathrm{Z}_r}\, \mathrm{e}^{i\tau_k}}{\sqrt{\omega_r''\left(\xi_{0r}^{(k)}\right)}}; \tag{9}$$

де Z_r - узагальнена комплексна змінна

$$\mathrm{Z}_r = 2\widetilde{z}_r + \rho_{0r}^{(k)}\, \mathrm{e}^{-i\tau_k}\,. \tag{10}$$

Підставляючи розклади (4),(5) у співвідношення (2), отримуємо асимптотичні формули розподілу переміщень в околі k-ї вершини тріщиноподібного дефекту.

$$u_j^{(k)} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{r=1}^{2}\sum_{\nu=1}^{3} t_j^{(r)}\left(\mathrm{A}_r^{[\nu]^{(k)}} + i\,\mathrm{B}_r^{[\nu]^{(k)}}\right)Z_r^{\nu/2},\ j=\overline{1,2}; \qquad (11)$$

Розподіл напружень отримуємо використовуючи закон Гука

$$\sigma_{ij}^{(k)} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{r=1}^{2}\sum_{\nu=1}^{3} s_{ij}^{(r)}\left(\mathrm{A}_r^{[\nu]^{(k)}} + i\,\mathrm{B}_r^{[\nu]^{(k)}}\right)Z_r^{\nu/2-1} + \mathrm{C}_{ij}^{(k)}\right\},\ j=\overline{1,2}; \qquad (12)$$

де

$$\mathrm{C}_{ij}^{(k)} = -\sum_{r=1}^{2} s_{ij}^{(r)}\varphi_r''\left(\xi_{0r}^{(k)}\right)\frac{\omega_r'\left(\xi_{0r}^{(k)}\right)}{\omega_r''\left(\xi_{0r}^{(k)}\right)^2}\ ; \qquad (13)$$

тут $\mathrm{A}_r^{[\nu]^{(k)}} + i\,\mathrm{B}_r^{[\nu]^{(k)}}$ -комплексні параметри. Для перших членів розкладу їхні вирази мають вигляд

$$\mathrm{A}_r^{[1]^{(k)}} + i\,\mathrm{B}_r^{[1]^{(k)}} = \frac{\varphi_r'\left(\xi_{0r}^{(k)}\right)}{\omega_r''\left(\xi_{0r}^{(k)}\right)^{1/2}} - \frac{\varphi_r''\left(\xi_{0r}^{(k)}\right)\omega_r'\left(\xi_{0r}^{(k)}\right)}{\omega_r''\left(\xi_{0r}^{(k)}\right)^{3/2}}; \qquad (14)$$

тут $\varphi_r\left(\xi_{0r}^{(k)}\right), \omega_r\left(\xi_{0r}^{(k)}\right)$ значення комплексних потенціалів і відображувальної функції в κ-ій вершині дефекту.

Для тонкого еліптичного вирізу, що міститься в безмежній ортотропній пластині проведені розрахунки залежності величини $A_r^{[1]}$ від співвідношення півосей еліпса (параметр $\varepsilon = b/a$). Встановлено, що максимальне відхилення цієї величини від відповідного значення для прямолінійної тріщини - розрізу в діапазоні зміни $\varepsilon \in [0{,}0.1]$ не перевищує 1,5%. Отже в даному діапазоні зміни ε ці параметри можуть бути замінені коефіцієнтами інтенсивності напружень.

1. Бережницький Л.Т., Делявський М.В., Панасюк В.В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. –Киев: Наук. думка, 1979. 400 с.