УДК 539.3

О.С. Коссак, Я.Г. Савула

D-АДАПТИВНА МОДЕЛЬ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ НЕОДНОРІДНИХ СТРУКТУР

Розглядається підхід до дослідження вільних коливань тіл з тонким пружним покриттям. Згідно з цим підходом передбачається побудова D-адаптивної комбінованої математичної моделі, яка в області тіла описується рівняннями теорії пружності, а в області покриття – рівняннями теорії оболонок типу Тимошенка. Системи цих диференціальних рівнянь пов'язані умовами спряження на поверхні контакту [1].

Нехай тіло займає тривимірну область Ω_1 з Ліпшицевою границею $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$; покриття - тривимірну область Ω_2^*, обмежену двома поверхнями Ω_2^-, Ω_2^+, відстань між якими h_2 та бічною поверхнею. Посередині між Ω_2^- і Ω_2^+ розміщена серединна поверхня Ω_2 з Ліпшицевою границею $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Вважається, товщина покриття h_2 є значно меншою від характерного розміру пружного тіла h_1. Важаємо також, що G_3 є поверхнею контакту пружного тіла з тонким покриттям і збігається з Ω_2^-. Нормаль до серединної поверхні збігається з зовнішньою нормаллю $\bar{\nu}_3$ до границі тіла G_3 і утворює вісь α_3. На границях G_1, Γ_1 задані однорідні кінематичні а на границях G_2, Γ_2-однорідні статичні граничні умови.

Запишемо варіаційну задачу у слабкій формі, яка еквівалентна задачі на власні значення. Введемо простори

$$\mathrm{H}_1 = \left\{V^{(1)} : V^{(1)} \in \left[W_2^{(1)}(\Omega_1)\right]^3, V_i^{(1)} = 0, i = \overline{1,3} \text{ на } G_1\right\}$$

$$\mathrm{H}_2 = \left\{V^{(2)} : V^{(2)} \in \left[W_2^{(1)}(\Omega_2)\right]^5, V_i^{(2)} = 0, i = \overline{1,5} \text{ на } \Gamma_1\right\}$$

$$\mathrm{H} = \left\{\begin{array}{l}\left(V^{(1)}, V^{(2)}\right): V^{(1)} \in \mathrm{H}_1, V^{(2)} \in \mathrm{H}_2, V_{\nu_i}^{(1)} = V_i^{(2)} - \dfrac{h_2}{2} V_{i+3}^{(2)}, V_3^{(1)} = V_3^{(2)}, \\ i = 1,2; G_3 = \Omega_2\end{array}\right\}.$$

Ця задача полягає у тому, щоб знайти пару $(\omega, \overline{U})$: де ω - скаляр; а $\overline{U} = \left(U^{(1)}, U^{(2)}\right) \in \mathrm{H}$, і задовольняються співвідношення

$$\int_{\Omega_1}\left(D^{(1)}V^{(1)}\right)^T C^{(1)} D^{(1)} U^{(1)} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2}\left(D^{(2)}V^{(2)}\right)^T E_0 C^{(2)} D^{(2)} U^{(2)} d\Omega_2 -$$

$$-\omega^2\left(\int_{\Omega_1} V^{(1)} M^{(1)} U^{(1)} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} V^{(2)} M^{(2)} U^{(2)} d\Omega_2\right) = 0, \forall \overline{V} = \left(V^{(1)}, V^{(2)}\right) \in \mathbf{H}$$

Тут $D^{(1)}, M^{(1)}; D^{(2)}, M^{(2)}$ - відповідно матриці диференціальних операторів матриці мас теорії пружності та теорії оболонок типу Тимошенка, $U^{(1)} = \left(U_1, U_2, U_3\right)$, $U^{(2)} = \left(u_1, u_2, w\ , \gamma_1, \gamma_2\right)$- вектори переміщень [2].

Розглянемо задачу на власні значення для тіл обертання з покриттям, у циліндричній системі координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$: α_3 - вісь симетрії, α_2 - кругова координата. Для розв'язування цієї задачі застосуємо напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ), згідно з яким тригонометричні функції $\sin m\alpha_2$, $\cos m\alpha_2$, визначені на проміжку $[0, 2\pi]$, вибираються як базові по α_2. Ці функції утворюють ортогональну систему в енергетичних метриках операторів теорій пружності та оболонок типу Тимошенка. Для інших змінних використовуються квадратичні апроксимації МСЕ. [2,3] Завдяки ортогональності базових функцій на $[0, 2\pi]$, узагальнена проблема на власні значення розпадається на L проблем $\left(m = \overline{0, L}\right)$, m-номер гармоніки. Для розв'язування узагальнених проблем на власні значення використовується метод ітерацій у підпросторі [2].

Чисельний приклад. Розглянемо запропонований підхід на круглій пластині з покриттям (рис. 1). Модулі Юнга, коефіцієнти Пуасона та густини матеріалів пластини і покриття задані відповідно:

$$E_1 = 6.0 \times 10^{10}\left(\tfrac{н}{м^2}\right), \nu_1 = 0{,}31\ ,\ \rho_1 = 7300\frac{кГ}{м^3} \quad \text{(кераміка)},$$

$$E_2 = 8.27 \times 10^{10}\left(\tfrac{н}{м^2}\right), \nu_2 = 0{,}31\ , \rho_1 = 9000\frac{кГ}{м^3} \quad \text{(срібло)}.$$

R-радіус пластини, h_1-товщина пластини, h_1/R=1/10. Проводилися розрахунки при h_2/R =(0.01, 0.005, 0.002, 0.001, 0). Випадок h_2/R = 0 означає відсутність покриття. Частотні характеристики $\lambda = \omega / 2\pi$ досліджувалися для значень гармоніки $m = (0, 1, 2)$.

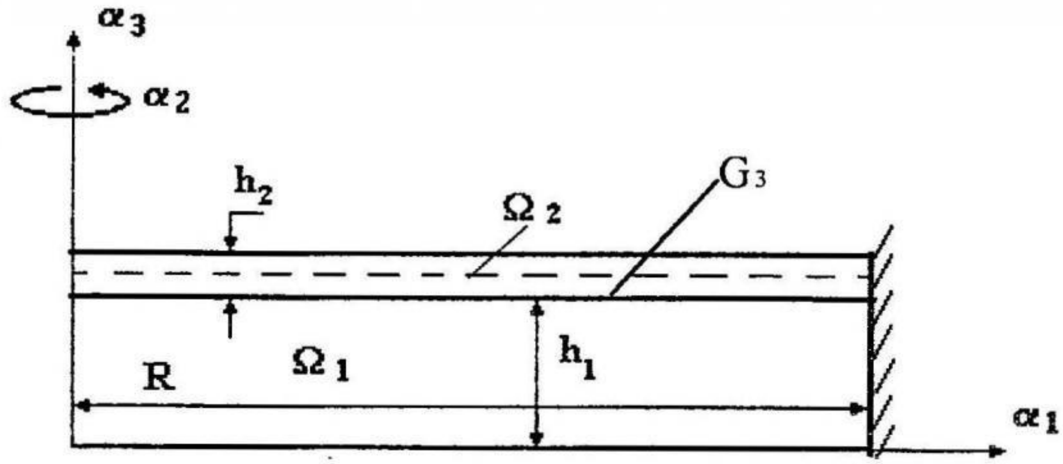

Рис. 1

В таблиці наведено значення перших трьох частот, отриманих на сітці з 16 двовимірних квадратичних СЕ і 8 одновимірних квадратичних СЕ.

	h_2=0.01	h_2=0.005	h_2=0.002	h_2=0.001	h_2=0.0
m=0	15.64449 107.4445 196.7667	14.88194 107.7109 197.2555	14.38302 107.8882 197.5804	14.20808 107.9506 197.6947	14.03219 51.92335 108.0147
m=1	31.60774 83.45018 93.89300	30.17663 80.36404 93.97005	29.23158 78.27991 94.02541	28.89845 77.53569 94.04536	28.57559 76.97558 94.09591
m=2	50.21791 111.3952 145.8470	48.11876 107.6830 146.0019	46.71968 105.1517 146.1116	46.22379 104.2429 146.1524	45.74784 103.6084 146.4019

Обчислення показали, що найнижча частота досягається при значенні гармоніки m=1 зі зменшенням товщини покриття (h_2) знижуються частоти власних коливань.

1. Савула Я.Г. Краевые и вариационные задачи для одной комбинированной модели теории упругости // Математ. методы и физ.-мех. поля.- 1990.-Вып. 32.-С. 92-95. 2. Савула Я.Г., Коссак О.С. Аналіз вільних коливань пружних конструкцій на основі комбінованої математичної моделі // Доп. Академії Наук України.-1994, № 8.-с. 69-741. 3. Olha Kossak.A study of free vibrations of elastic rotation bodies basedon the combined model. XXI YUCTM NIS,1995. P.364-369.