УДК 518

М.М. Кундрат

МОДЕЛЬ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ТІЛА З ЛІНІЙНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Основні положення. Розглянемо в умовах плоскої задачі однорідне ізотропне тіло (пластинку), віднесене до декартової системи координат $x0y$, яке містить жорстке, але скінченної міцності на розрив включення довжини $2a$ розміщене на осі $0x$. Тіло розтягується на нескінченності паралельно площині (лінії) включення зусиллями інтенсивності N_1. Приймаємо, що з точок найбільшої концентрації напружень (кінців включення) пластичної течії та розпушування матеріалу, які охоплюють вершини включення. Зони розпушування й пластичної течії моделюються тріщинами ковзання вздовж межі матриця–включення, що дозволяє привести розв'язання проблеми до змішаної задачі теорії пружності.

Проміжок $b(N_1) \le |x| < a$ відповідає зоні розпушування матеріалу контактного прошарку і в ньому прикладені дотичні зусилля зчеплення

$$\tau_{xy} = \tau_s^* \left(1 - \frac{|x| - b_*}{a - b_*}\right) \mathrm{sign}(x), \text{ якщо } b \le |x| < a \quad (x \in L_1). \tag{1}$$

Тут a – півдовжина включення; $a - b = d$ – довжина зони розпушування, коли проміжні навантаження $0 < N_1 < N_1^*$; $a - b_* = d_*$ – довжина зони розпушування в умовах граничної рівноваги $(N_1 = N_1^*)$, яка може характеризувати тріщиностійкість матеріалу контактного прошарку, $b(N_1^*) = b_*$; τ_s^* – інтегральне напруження зчеплення по механізму поперечного зсуву.

Проміжок $c \le |x| < b$ відповідає зоні пластичної течії матеріалу контактного прошарку, до берегів якого в розрізі прикладені дотичні зусилля

$$\tau_{xy} = \tau_s^* \left(1 - \frac{b - b_*}{a - b_*}\right) \mathrm{sign}(x), \text{ якщо } c \le |x| < b \quad (x \in L_2). \tag{2}$$

В стані граничної рівноваги $(b = b_*)$ $\tau_{xy} = \tau_s^*$.

На проміжку $|x| < c$ включення бездефектно скріплене з матрицею

$$u^{\pm} = v^{\pm} = 0\,, \text{ якщо } |x| < c\,, \ (x \in L')\,. \tag{3}$$

На нескінченності спостерігається одноосний напружений стан

$$\sigma_{xx}^{(\infty)} = N_1\,, \quad \sigma_{yy} = \tau_{yy} = 0\,; \quad \left(x^2 + y^2\right)^{1/2} \to \infty\,. \tag{4}$$

Тут і далі σ_{xx}, σ_{yy}, τ_{xy} – компоненти тензора напружень; u, v – компоненти вектора переміщень відповідно по осях $0x$ та $0y$; знаки $"+"$ та $"-"$ відповідають граничним значенням на дійсній осі відповідно із верхньої $(y > 0)$ та нижньої $(y < 0)$ півплощин; $\operatorname{sign}(x) = +1$ для $x > 0$, 0 для $x = 0$ та -1 для $x < 0$.

Розв'язок зовнішньої задачі теорії пружності (1) – (4) шукаємо через комплексні потенціали Колосова–Мусхелішвілі, знання яких дає змогу визначити напружено деформований стан у тілі [1]:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\operatorname{Re}\Phi(z)\,, \quad \sigma_{yy} - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}\,, \tag{5}$$

$$2G(u' + iv') = \chi\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}\,, \tag{6}$$

де $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ – аналітичні функції комплексної змінної $z = x + iy$; $\chi = 3 - 4\mu$ для плоскої деформації та $\chi = (3 - \mu)/(1 + \mu)$ для плоского напруженого стану; μ, G – коефіцієнт Пуассона та модуль зсуву матеріалу матриці.

Після підстановки формул (5), (6) у краєві умови (1) – (4) приходимо до наступної задачі лінійного спряження для функції $\Phi(z)$ з кусково–неперервними коефіцієнтами

$$\Phi^+(x) - g\Phi^-(x) = f(x)\,, \tag{7}$$

де

$$g = \begin{cases} -1, \text{ якщо } x \in L', \\ \ \ 1, \text{ якщо } x \in L_1 \cup L_2, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} f_1, \text{ якщо } x \in L', \\ f_2, \text{ якщо } x \in L_1, \\ f_3, \text{ якщо } x \in L_2, \end{cases} \quad f_1 = \frac{N_1(\chi - 1)}{4\chi}$$

$$f_2 = -\frac{2i\tau_s^*}{\chi + 1} \cdot \frac{a - |x|}{a - b_*}\operatorname{sign}(x)\,, \quad f_3 = -\frac{2i\tau_s^*}{\chi + 1} \cdot \frac{a - b}{a - b_*}\operatorname{sign}(x)\,.$$

Розв'язок задачі (7) має вигляд

$$\Phi(z) = \frac{N_1(\chi - 1)}{8\chi} + \frac{B_2 z}{\sqrt{z^2 - c^2}} +$$

$$+ \frac{\tau_s^*}{\pi(k+1)(a - b_*)}\left[b\Gamma_1(z,b,c) - a\Gamma_1(z,a,c) + z\left(\Gamma_2(z,b,c) - \Gamma_2(z,a,c)\right)\right], \qquad (8)$$

$$\Omega(z) = \frac{N_1(\chi - 1)}{4} - \chi\Phi(z), \quad X(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - c^2}},$$

де

$$B_2 = N_1 \frac{\chi + 1}{8\chi} - \frac{2\tau_s^*}{\pi(\chi + 1)(a - b_*)} \times$$

$$\times\left[\sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{b^2 - c^2} + b\ln\frac{b + \sqrt{b^2 - c^2}}{c} - a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{c}\right],$$

$$\Gamma_1(z,a,c) = \ln\frac{a\sqrt{z^2 - c^2} - z\sqrt{a^2 - c^2}}{a\sqrt{z^2 - c^2} + z\sqrt{a^2 - c^2}},$$

$$\Gamma_2(z,a,c) = \ln\frac{\sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{z^2 - c^2}}{a\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{z^2 - c^2}}.$$

Формули (5), (6), (8) дають розв'язок сформульованої задачі і дозволяють провести її повний аналіз.

Деформаційний критерій руйнування. З умови, що напруження при $x = \pm c$ скінченні в граничному випадку, коли $N_1 = N_1^*$, одержуємо:

$$\frac{\pi N_1(\chi + 1)^2}{16\tau_s^*\chi} = \frac{1}{(a - b_*)}\left(\sqrt{b^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - c^2} +\right.$$

$$\left. + a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c} - b\ln\frac{b + \sqrt{b^2 - c^2}}{c}\right). \qquad (9)$$

Співвідношення (9) зв'язує силові N_1, τ_s^* та геометричні a, b, b_*, c параметри.

Із формул (6), (8) з урахуванням (9) знайдемо зміщення матриці відносно включення в смугах пластичності чи розпушування та їх найбільше значення в точках $x = \pm a$

$$u(a) = \frac{\chi\tau_s^*}{\pi G(\chi - 1)(a - b_*)}\left[2a^2\ln\frac{a}{c} + \sqrt{\left(a^2 - c^2\right)\left(b^2 - c^2\right)} +\right.$$

$$\left. ab\Gamma_1(a,b,c) - 0.5\left(a^2 - b^2\right)\Gamma_2(a,b,c) + c^2 - a^2\right]. \qquad (10)$$

В граничному випадку, коли $N_1 = N_1^*$, при досягненні зміщеннями певної межі δ_{2C}, аналогічно відомій δ_k–моделі, відбувається втрата зв'язку між включенням та матрицею. Приймаючи умову $u(a) = \delta_{2C}$ за таку, що відповідає зародженню тріщини ковзання по межі матриця–включення, маємо деформаційний критерій локального руйнування. Якщо зміщення матриці відносно включення біля його вершини $u(a)$ досягає критичного значення δ_{2C}, настає гранична рівновага і включення відшаровується від матриці.

З іншого боку, дотичні напруження на поверхні включення створюють в його поперечному перерізі розриваючі осьові зусилля. При досягненні зусиллями міцності включення відбувається його розрив. Отримані співвідношення дозволяють знайти ефективну довжину включення, яка разом із пружними та міцнісними параметрами композиції визначає механізм локального руйнування: розрив включення або його відшарування. Для кожного із механізмів руйнування встановлено значення граничного навантаження.

Як частковий випадок з отриманих рівнянь дістаємо модель композиції з крихкою матрицею $(c = b)$,а також композиції з пластичною матрицею.

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. Думка, 1968. – 246 с.

УДК 517.958:519.6

В.М. Кухарський, Я.Г. Савула

ВИКОРИСТАННЯ ПРОЕКЦІЙНО-СІТКОВИХ МЕТОДІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ У ТОНКИХ КРИВОЛІНІЙНИХ КАНАЛАХ

Задачі адвекції-дифузії у тонких криволінійних каналах мають низку особливостей, породжених малим поперечним перерізом каналів та різкими градієнтами, які зумовлені