В граничному випадку, коли $N_1 = N_1^*$, при досягненні зміщеннями певної межі δ_{2C}, аналогічно відомій δ_k–моделі, відбувається втрата зв'язку між включенням та матрицею. Приймаючи умову $u(a) = \delta_{2C}$ за таку, що відповідає зародженню тріщини ковзання по межі матриця–включення, маємо деформаційний критерій локального руйнування. Якщо зміщення матриці відносно включення біля його вершини $u(a)$ досягає критичного значення δ_{2C}, настає гранична рівновага і включення відшаровується від матриці.

З іншого боку, дотичні напруження на поверхні включення створюють в його поперечному перерізі розриваючі осьові зусилля. При досягненні зусиллями міцності включення відбувається його розрив. Отримані співвідношення дозволяють знайти ефективну довжину включення, яка разом із пружними та міцнісними параметрами композиції визначає механізм локального руйнування: розрив включення або його відшарування. Для кожного із механізмів руйнування встановлено значення граничного навантаження.

Як частковий випадок з отриманих рівнянь дістаємо модель композиції з крихкою матрицею $(c = b)$,а також композиції з пластичною матрицею.

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. Думка, 1968. – 246 с.

УДК 517.958:519.6

В.М. Кухарський, Я.Г. Савула

ВИКОРИСТАННЯ ПРОЕКЦІЙНО-СІТКОВИХ МЕТОДІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ У ТОНКИХ КРИВОЛІНІЙНИХ КАНАЛАХ

Задачі адвекції-дифузії у тонких криволінійних каналах мають низку особливостей, породжених малим поперечним перерізом каналів та різкими градієнтами, які зумовлені конвективними членами, що робить неможливим застосування стандартних чисельних методів, які добре зарекомендували себе для розв'язання класичних задач. У зв'язку з цим у статтях [1]-[3] було запропоновано підходи, які дають змогу на стадії побудови математичної моделі врахувати малий поперечний переріз каналу. Отримані в такий спосіб математичні моделі дозволяють ефективно чисельно досліджувати класичними методами лише явища, в яких перевага адвекції над дифузією є незначною. У сучасній літературі спостерігається широкий спектр підходів подолання осциляцій, що звичайно виникають в околі великих градієнтів, породжених конвективними членами. Більшість досліджень у цьому напрямку пов'язана з вибором модифікованих базисних функцій методу Петрова-Гальоркіна[4,5,6], зокрема з побудовою протипотокових різницевих схем [7,8]. Результати наведених досліджень дають змогу уникати нестійкості алгоритмів побудови числових розв'язків.

У статтях [1-3] процес адвекції-дифузії у тонкому каналі в криволінійній системі координат α_1, α_2 моделюється спеціальною, одновимірною за просторовою змінною, системою диференціальних рівнянь, яку у векторному вигляді можна подати у такому вигляді

$$\kappa^{(0)}\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \kappa^{(0)} w \mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{\lambda^{(0)}}{A}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} + \mathbf{P}\lambda^{(0)}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{1.1}$$

Початкові умови можна записати у вигляді

$$\mathbf{u}\big|_{\tau=0} = \mathbf{u}_0, \tag{1.2}$$

Граничні умови пропонуються одного з наступних типів

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_b \text{ на } \alpha_1 = \alpha_1^b, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_e \text{ на } \alpha_1 = \alpha_1^e, \tag{1.3}$$

$$\frac{\lambda^{(0)}}{A}\mathbf{N}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} = Q_b \text{ на } \alpha_1 = \alpha_1^b, \quad \frac{\lambda^{(0)}}{A}\mathbf{N}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} = Q_e \text{ на } \alpha_1 = \alpha_1^e, \tag{1.4}$$

$$\frac{\lambda^{(0)}}{A}\mathbf{N}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} = \beta_b\left(\mathbf{u} - \mathbf{u}_c^b\right) \text{ на } \alpha_1 = \alpha_1^b, \tag{1.5}$$

$$\frac{\lambda^{(0)}}{A}\mathbf{N}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} = \beta_e\left(\mathbf{u} - \mathbf{u}_c^e\right) \text{ на } \alpha_1 = \alpha_1^e . \qquad (1.6)$$

Тут

$$\mathbf{u} = \left(t_1, t_2\right)^T, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & Kh/3 \\ Kh^2/3 & h/3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h/3 \end{pmatrix}, \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & -Kh/3 \\ -Kh^2/3 & h/3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/h \end{pmatrix}, \ \mathbf{f} = \begin{pmatrix} q^{(0)} - (1+hK)q^+ - (1-hK)q^- \\ q^{(1)} - (1+hK)hq^+ + (1-hK)hq^- \end{pmatrix},$$

$$\kappa^{(0)} = 2hc\rho, \lambda^{(0)} = 2h\lambda,$$

$$q^{(0)} = \int_{-h}^{h} q(1+\alpha_2 \mathrm{K})d\alpha_1, q^{(1)} = \int_{-h}^{h} q(1+\alpha_2 \mathrm{K})\alpha_2 d\alpha_1,$$

h - півтовщина, K - кривина каналу, A -коефіцієнт Ляме, c, ρ, λ - основні фізичні характеристики каналу, w - швидкість ковективного переносу, q -інтенсивність внутрішніх джерел, q^-, q^+ - потоки на границях $\alpha_2 = -h$, $\alpha_2 = h$ відповідно, t_1, t_2 -члени лінійного розкладу густини субстанції за товщиною [3].

Ця система рівнянь містить характерний параметр – число Пекле $Pe = \dfrac{wc\rho}{\lambda}$ Величина цього числа, як і у класичному випадку суттєво впливає на збіжність та стійкість числових розв'язків.

Зокрема, в [4] показано для випадку класичної одновимірної задачі адвекції-дифузії, що при використанні кусково-лінійних наближень із центрально-різницевою апроксимацією конвективного члена критерієм стійкості схеми є умова $Pe\Delta x << 2$, де Δx - крок поділу проміжку за просторовою координатою. Умови такого типу повністю виключають використання відповідних схем для розв'язування задач адвекції-дифузії, які виникають при дослідженні процесів переносу забруднень, для яких числа Пекле $Pe \approx 10^3 - 10^4$.

Для чисельного розв'язання поставленої задачі будується варіаційна постановка задачі, застосовується напівдискретизаційний метод Бубнова-Гальоркіна. Базисні функції вибирають використовуючи інтегровані поліноми Лежандра [5] (внутрішні (bubble) функції).

При знаходженні інтегралів використовують квадратурні формули Гауса відповідних порядків. Розв'язування задачі Коші проводиться з використанням різницевої схеми Кранка-Ніколсона. Обчислювальні експеременти проводилися з метою апробації використання внутрішніх базисних функцій від поліномів Лежандра та дослідження впливу кривини на розподіл субстанції в часі.

У контексті дослідження ефекту покращення чисельного розв'язку з додаванням внутрішніх (bubble) вузлів до базисних функцій, розглядалася стаціонарна задача адвекції-дифузії у прямолінійному каналі, наповненому водою. Товщина каналу $h = 0.01 м$, фізичні характеристики $\lambda = 0.54 \frac{Вт}{мК}$, $\kappa = 4.189 \frac{cВт}{м^3 K}$. У каналі відбувається конвективне перенесення речовини у напрямку $-\alpha_1$, із швидкістю, що відповідають наступним числам Пекле $Pe = 1000$. На границях задається масообмін за законом Ньютона при $\alpha_1 = \alpha_1^b : T_c = 0^0 C,\ \beta_b = 1000 \frac{Вт}{м^2 K}$, при $\alpha_1 = \alpha_1^e : T_c = 0^0 C,\ \beta_e = 1000 \frac{Вт}{м^2 K}$. На рис. 1 приведено розподіл температурного поля для описаної задчі при поділі на 10 елементів проміжку $\alpha_1^b = 0,\ \alpha_1^e = 1$.

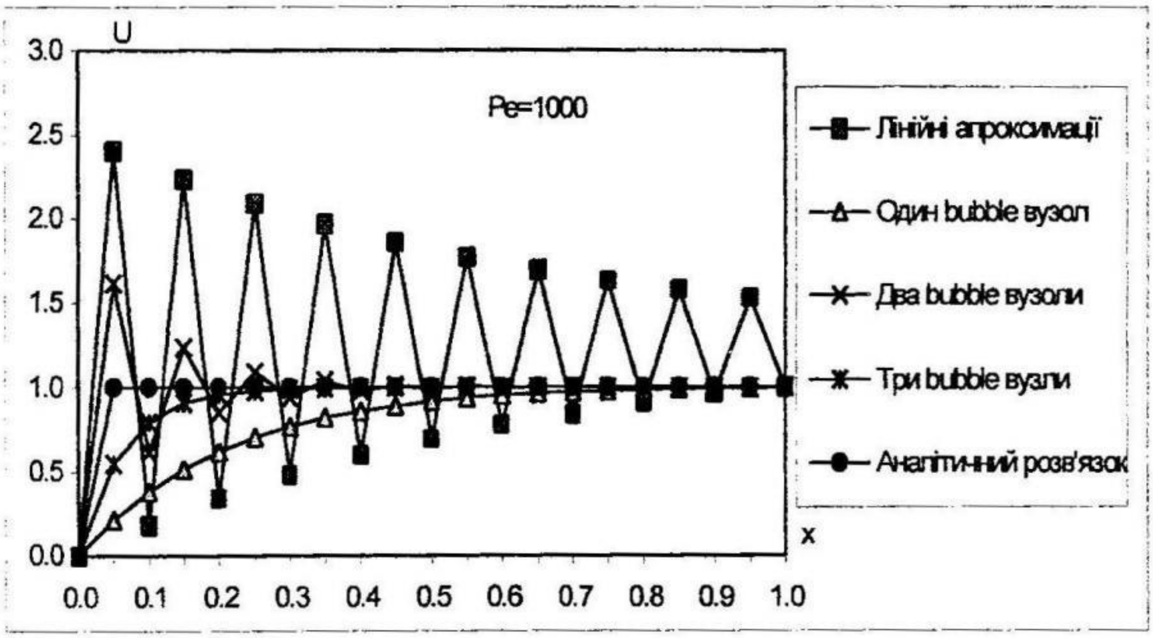

рис.1

1. Савула Я.Г., Сипа І.М., Струтинський І.В. Математичні моделі теплопровідності для тіл з тонкими покриттями і включеннями // Вісн.Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992. Вип.37. С.39-45. 2. Савула Я.Г., Чапля Є.Я., Кухарський В.М. Чисельне моделювання конвективного теплопереносу в середовищі з тонким капіляром. // Вісн.Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип.41. С.101-105. 3. Савула Я.Г., Чапля Є.Я., Кухарський В.М. Чисельне моделювання тепломасопереносу через тонкий криволінійний шар. // Доп. НАН. 1995. № 11. С.30-34. 4. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена. М.: Мир, 1988. 544с. 5. J.T. Oden Optimal h-p finite element methods //Computer Methods inAplied Mechanics and Engineering.1994. P. 309-331. 6. L.P. Franca, C. Farhat Bubble function prompt unusual stabilized finite element methods Computer Methods inAplied Mechanics and Engineering. 1995. P. 299-308. 7. K.S.Surana, J.S.Sandhu Investigation of diffusion in p-version 'STLSFE' formulations Computational Mechanics, 16. 1995. P. 151-169 8. S.R. Idelsohn, J.C. Heinrich, E. Onate Petrov-Galerkin methods for the transient advective-diffusive equation with sharp gradients International jornal for numerical methods in engineering. 1996. Vol. 39. P. 1455-1473.