УДК 519.6

О.І. Лаушник, Б.О. Попов

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ СПЛАЙНАМИ ІЗ ЗАДАНОЮ КІЛЬКІСТЮ ЛАНОК

Розбиваючи проміжок $[a,b]$ множиною точок $Z=\{z_i\}_{i=0}^{r}$ та наближаючи функцію $f(x)$ з вагою $w(x)$ $\left(w(x)\in C^1[a,b], w(x)\neq 0\right)$ на кожному підінтервалі $[z_{i-1},z_i]$, $i=\overline{1,r}$ виразом найкращого чебишовського наближення $F(A_i,x)=F(a_0,\ldots,a_m;x)\in C^{m+2}[a,b]$ із різними чисельними значеннями параметрів, отримаємо наближення функції $f(x)$ на всьому проміжку $[a,b]$ чебишевським сплайном

$$S(F,x)=\sum_{i=1}^{r}F(A_i,x)\Theta((x-z_{i-1})(z_i-x)), \tag{1}$$

де $\Theta(x)$ – функція Хевісайда, Z – множина вузлів сплайну.

Відомо [1], що максимальна похибка μ рівномірного наближення функції $f(x)\in C^{m+2}[a,b]$ чебишевським сплайном (1) із r ланками при $r\to\infty$ є

$$\mu=\frac{r^{-m-1}}{2^{2m+1}(m+1)!}\left(\int_a^b\left|\eta(f,F)/w(x)\right|^{\frac{1}{m+1}}dx\right)^{m+1}\left[1+O\left(\frac{b-a}{r}\right)\right], \tag{2}$$

за умови, що ядро наближення

$$\eta(f,F)=\eta(f(x),F)\neq 0 \text{ при } x\in[a,b]. \tag{3}$$

Тоді похибки на підінтервалах $[z_{i-1},z_i]$ запишуться:

$$\mu_i=A\left(\int_{z_{i-1}}^{z_i}\varphi(x)dx\right)^{m+1},\ i=\overline{1,r}, \tag{4}$$

де $A=\dfrac{1}{2^{2m+1}(m+1)!}$, $\varphi(x)=\left|\eta(f,F)/w(x)\right|^{\frac{1}{m+1}}$.

Твердження. *Якщо μ_i можна представити у вигляді*

$$\mu_i = A\varphi\left(\frac{z_{i-1}+z_i}{2}\right)^{m+1}(z_i - z_{i-1})^{m+1},\ i=\overline{1,r}, \tag{5}$$

тоді максимальна похибка наближення $\mu = \max\limits_{1\le i\le r}\mu_i$ буде найменшою, якщо границі ланок сплайну знаходяться за ітераційною формулою

$$z_i^{(t)} = \frac{z_{i-1}^{(t)}\varphi\left(\frac{z_{i-1}^{(t)}+z_i^{(t-1)}}{2}\right) + z_{i+1}^{(t-1)}\varphi\left(\frac{z_i^{(t-1)}+z_{i+1}^{(t-1)}}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{z_{i-1}^{(t)}+z_i^{(t-1)}}{2}\right)+\varphi\left(\frac{z_i^{(t-1)}+z_{i+1}^{(t-1)}}{2}\right)},\ i=\overline{1,r-1},\ t=1,2,\ldots, \tag{6}$$

де $z_0 = a,\ z_r = b,\ z_i^{(0)} = a + (b-a)i/r,\ i=\overline{1,r-1}$.

Доведення базується на міркуванні, що максимальна похибка наближення є найменшою, якщо $\mu_i = \mu = const$. Вперше частковий випадок формули (6) для многочленних наближень трапляється у роботі [2].

Умова (5) виконується достатньо рідко. Проте в загальному випадку має місце

$$\mu_i = A\varphi(\xi_i)^{m+1}(z_i - z_{i-1})^{m+1},\ i=\overline{1,r}, \tag{7}$$

При $r\to\infty$ точки ξ_i та $z_i^* = \frac{z_{i-1}+z_i}{2}$ є близькими. Тому на практиці можна використовувати формулу (6) для наближеного знаходження границь ланок сплайну. Коли ж формула (6) не дає оптимального результату, тоді можна скористатись нею як початковим наближенням до границь ланок з подальшим уточненням, замість використання рівновіддалених вузлів.

Для прикладу розглянемо функцію Ламберта $y = W(x)$, що визначається із рівності $x \to y\exp(y)$ [3]. Вираз для ядра наближення функції Ламберта $W(x)$ раціональним многочленом $R_{1,1}(x)$ є

$$\eta(W(x), R_{1,1}) = \frac{1}{2}\frac{W(x)^3(6+4W(x)+W(x)^2)}{(W(x)+1)^5 x^3}.$$

а) використовуючи формулу (6), знайти абсолютне наближення функції Ламберта $W(x)$ на проміжку $x\in[0,1000]$ сплайном з ланками – раціональними многочленами $R_{k,l}(x)$ при $k=1, l=1$, кількість ланок $r=4$:

$z_1 = 3.76115$, $\mu_1 = .013731$,

$$R_{1,1}^{(1)}(x) = \frac{.0322668 + 1.86812x}{2.34994 + x},$$

$z_2 = 29.0606$, $\mu_2 = .011254$, $R_{1,1}^{(2)}(x) = \dfrac{8.54495 + 3.3602x}{14.1903 + x}$,

$z_3 = 177.879$, $\mu_3 = .010534$,

$$R_{1,1}^{(3)}(x) = \frac{134.779 + 4.83312x}{82.0504 + x},$$

$z_4 = 1000$, $\mu_4 = .010205$,

$$R_{1,1}^{(4)}(x) = \frac{1305.96 + 6.30865x}{453.341 + x}.$$

б) знайти балансне абсолютне наближення функції $W(x)$ на $x \in [0,1000]$, $k = 1, l = 1$, $r = 4$:

$z_1 = 3.18418$, $\mu_1 = .011154$,

$$R_{1,1}^{(1)}(x) = \frac{.024573 + 1.80172x}{2.20302 + x},$$

$z_2 = 25.5761$, $\mu_2 = .011444$,

$$R_{1,1}^{(2)}(x) = \frac{6.79586 + 3.25832x}{12.5389 + x},$$

$z_3 = 164.557$, $\mu_3 = .011284$,

$$R_{1,1}^{(3)}(x) = \frac{117.291 + 4.75436x}{74.4841 + x},$$

$z_4 = 1000$, $\mu_4 = .011564$, $R_{1,1}^{(4)}(x) = \dfrac{1242.77 + 6.2827x}{436.702 + x}$.

Наближення функції $W(x)$ на рівних підінтервалах проміжку $[0,1000]$ раціональним виразом $R_{1,1}(x)$ при $r = 4$ дає максимальну похибку $\mu = .24343$.

Максимальна похибка наближення з рівновіддаленими границями ланок є у 21 раз більшою за максимальну похибку балансного наближення, тоді як максимальна похибка наближення, знайденого за формулою (6), лише у 1.2 раза більша за похибку балансного наближення. Очевидно, що використання формули (6) є виправданим, навіть якщо не виконується умова (5).

1. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. Киев: Наук.думка, 1989. 272с. 2. Meinardus G. Segmentapproximation mit Polynomen //ZAMM. 1966. 46. №3/4. P.239-246. 3. Corless R.M.,

Gonnet G.H., Hare D.E.G. On the Lambert W Function //Advances in Comput. Math. 1996. Mol 5. P.329-359.

УДК 519.72

В.А. Ліщинський, О.П. Хома

ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ СИНТЕЗУ СКІНЧЕННИХ АВТОМАТІВ

Основою синтезу скінченних автоматів будь-якого типу - детермінованих, імовірнісних, нечітких, розпізнавачів і перетворювачів, структурних автоматних моделей - є частковий синтез функції переходів з відповідним зважуванням її елементів. Тому найдоцільніше покращувати побудову скінченних автоматів, створюючи ефективні методи і алгоритми синтезу функцій переходу.

Пропонується ефективний за часовим та ємнісним критеріями метод побудови функції переходів, заданої безпосередньо. Вхідним для нього є регулярний вираз R у вхідному алфавіті X автомата, результатом - послідовність F трійок $u_i x u_j$ таких, що $u_j = \delta(u_i, x)$, $u_i, u_j \in U$, $x \in \{\varepsilon\} \cup X$, де δ - функція переходів, E - множина станів автомата, ε - порожнє слово. Метод використовує вхідний магазин M_R, вихідний M_F, внутрішній M, лічильники J та I. У магазинах M_R і M_F зберігаються відповідно регулярний вираз і функція переходів або їхні частини. Лічильник I призначено для підрахунку кількості пар дужок, а J - кількості певних станів. Магазин M забезпечує правильне створення індексів станів автомата. Лічильники і магазин M ідентифіковані своїми алфавітами.

Функція переходів будується за один перегляд регулярного виразу R як результат переходу π: $[R; O; O; \varnothing; \rho_0] \to [\varnothing; j; i; \varnothing; F]$, де ρ_0 - початковий стан автомата, $i \in I$, $j \in J$. На кожному кроці у залежності від символу у вершині вхідного магазину застосовується лише одне з наступних правил.

$$[S\omega_R; j; i; \omega_M; \omega_F c] \to [\omega_R; j; i; \omega_M; \omega_F \subset S],$$

$$[S\omega_R; j; i; \omega_M; \omega_F S'] \to [\omega_R; n; i; \omega_M; \omega_F S' u_n, u_n S],$$

$$[(\omega_R; j; i; \omega_M; \omega_F] \to [\omega_R; j; m; m\omega_M; \omega_F p_m p_m],$$