

В.М. Макар

ЧИСЕЛЬНІ СХЕМИ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ РОЗРАХУНКІВ НА ОСНОВІ h -АДАПТИВНОЇ ВЕРСІЇ МСЕ

Останнім часом, у чисельному аналізі на основі методу скінченних елементів (МСЕ), значно зріс інтерес до питання побудови адаптивних схем підвищення точності розрахунків. Потреба у процедурах оцінки точності скінченноелементних апроксимацій виникла з перших спроб практичного застосування МСЕ. Першопочаткові кроки у розв'язанні цієї проблеми полягали у порівнянні чисельних розв'язків з точними для добре вивчених, "стандартних" задач. Однак налагоджене таким чином програмне забезпечення, яке реалізує МСЕ, ще не гарантує прийнятність та точність отриманих числових розв'язків при розв'язуванні складних задач інженерної практики [1]. Така ситуація зумовлена тим, що в реальних задачах неможливо а priori побудувати сітку, на якій локальна похибка дискретизації рівномірно розподілена по елементах, а глобальна похибка задовольняє наперед визначений критерій точності. Це приводить до виникнення підобластей, в яких локальна похибка є дуже великою. Для того щоб визначити такі підобласті, з метою їх уникнення, було запропоновано апостеріорні оцінки похибки, які дозволяють оцінити локальну похибку дискретизації. Оцінений розподіл похибки можна тоді використати для зміни (адаптації) параметрів дискретизації по МСЕ, а саме, діаметра скінченноелементної сітки (h -адаптивність), поліноміального порядку базисних функцій (p -адаптивність), або одночасно і перше, і друге (hp -адаптивність). Дана робота присвячена побудові та дослідженню h -адаптивного обчислювального процесу для розв'язання осесиметричної задачі лінійної статичної теорії пружності анізотропного тіла.

Повний h -адаптивний обчислювальний процес, спрямований на отримання розв'язку наперед заданої точності, включає три етапи, які повинні бути застосовані циклічно:

- 1) отримання розв'язку на початковій сітці та оцінка його точності за допомогою апостеріорної оцінки похибки;
- 2) найбільш ефективно прогнозування локального згущення сітки потрібного для досягнення заданої точності;

3) згущення сітки, отримання нового розв'язку і оцінка нової похибки з наступним поверненням на другий крок, якщо нова похибка перевищує бажану.

У даній роботі, на першому етапі побудованої h -адаптивної схеми МСЕ, використовується апостеріорна Z^2 -оцінка [1]. Суть довільної апостеріорної оцінки похибки полягає в тому, що поряд із "стандартним" вектором компонент тензора напружень σ_h , отриманим безпосередньо із скінченноелементної апроксимації вектора переміщень u_h за допомогою закону Гука та співвідношень Коші, шукаються "згладжені" (smoothed) напруження σ^* , які в певному сенсі є більш точними. Дійсно, різниця між різними апостеріорними оцінками полягає у способі отримання "згладженого" розв'язку σ^* , який потім використовується для обчислення енергетичної норми похибки. У Z^2 -оцінці, "згладжені" напруження σ^* , на кожному скінченному елементі, інтерполюються за допомогою тієї ж системи базисних функцій, що і компоненти вектора переміщень, тобто

$$\sigma^* = N \tilde{\sigma}^*, \quad (1)$$

де: N - фінітні базисні функції МСЕ, $\tilde{\sigma}^*$ - вектор вузлових значень компонент тензора напружень. Для обчислення вузлових значень напружень $\tilde{\sigma}^*$ використовується рівняння проектування:

$$\int_{\Omega} N^T (\sigma^* - \sigma_h) d\Omega = 0. \quad (2)$$

З рівняння (2), після нескладних перетворень, маємо:

$$\tilde{\sigma}^* = A^{-1} \left(\int_{\Omega} N^T D S N d\Omega \right) \tilde{u}, \quad (3)$$

де: $\tilde{u}$ - вектор значень переміщень у вузлах сітки, D - матриця пружних констант, яка фігурує в узагальненому законі Гука, S - матриця диференціальних операторів із геометричних співвідношень Коші, $A^{-1} = \int_{\Omega} N^T N d\Omega$.

В основі процедури прогнозування локального згущення сітки лежить критерій отримання числового розв'язку наперед заданої, бажаної точності, яка визначається максимально допустимою відносною похибкою $\eta_{\max}$. З цього критерію, шляхом прогнозування розмірів скінченних елементів, безпосередньо можна побудувати "оптимальну" скінченноелементну сітку. У даній роботі під

"оптимальною" сіткою розуміється сітка, на якій локальна похибка дискретизації в енергетичній нормі рівномірно розподілена по елементах. Саме для такої сітки, як показано у [2], асимптотична швидкість збіжності апроксимації по МСЕ залежить лише від поліноміального порядку базисних функцій, і не залежить від порядку сингулярності. Умова визначення елементів біжучої сітки, які потрібно згустити, має вигляд

$$\|\tilde{e}\|_m > \eta_{\max} \sqrt{(\|\mathbf{u}_h\|^2 + \|\tilde{e}\|^2)/M}, \quad (4)$$

де $\|\tilde{e}\|_m$ - локальна похибка дискретизацій на m -му елементі, $\|\mathbf{u}_h\|^2$ - енергія деформації, $\|\tilde{e}\|$ - глобальна оцінена похибка, тобто похибка для обчислення якої використовується "згладжений" розв'язок σ^* , M - число скінченних елементів.

На прикладі задачі Ляме про визначення напружено деформівного стану порожнинного циліндра, який перебуває під дією рівномірного тиску на внутрішню поверхню, апробовано та налагоджено відповідне програмне забезпечення, яке реалізує описану вище h -адаптивну схему МСЕ. Наведено отримані чисельні результати, які підтверджують ефективність запропонованого обчислювального процесу.

1. O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedures for practical engineering analysis. Int.J.Numer.Methods Eng. 1987. Vol. 24, P. 337-357. 2. O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu. Adaptivity and mesh generation. Int.J.Numer.Methods Eng. 1991. Vol. 32, P. 783-810.

Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), грант №PSU061060.

УДК 517.948

М.Й. Михайлюк

ПРО ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ В ОДНОМУ КЛАСІ ПОТЕНЦІАЛІВ

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає у відшукуванні плоскої однозв'язної області D , при заповненні якої