"оптимальною" сіткою розуміється сітка, на якій локальна похибка дискретизації в енергетичній нормі рівномірно розподілена по елементах. Саме для такої сітки, як показано у [2], асимптотична швидкість збіжності апроксимації по МСЕ залежить лише від поліноміального порядку базисних функцій, і не залежить від порядку сингулярності. Умова визначення елементів біжучої сітки, які потрібно згустити, має вигляд

$$\|\tilde{e}\|_m > \eta_{\max}\sqrt{\left(\|\mathbf{u}_h\|^2 + \|\tilde{e}\|^2\right)/M}\,, \tag{4}$$

де $\|\tilde{e}\|_m$ -локальна похибка дискретизацій на m-му елементі, $\|\mathbf{u}_h\|^2$ - енергія деформації, $\|\tilde{e}\|$ -глобальна оцінена похибка, тобто похибка для обчислення якої використовується "згладжений" розв'язок σ^*, M -число скінченних елементів.

На прикладі задачі Ляме про визначення напружено деформівного стану порожнинного циліндра, який перебуває під дією рівномірного тиску на внутрішню поверхню, апробовано та налагоджено відповідне програмне забезпечення, яке реалізує описану вище h -адаптивну схему МСЕ. Наведено отримані чисельні результати, які підтверджують ефективність запропонованого обчислювального процесу.

1. O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedures for practical engineering analysis. Int.J.Numer.Methods Eng. 1987. Vol. 24, P. 337-357. 2. O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu. Adaptivity and mesh generation. Int.J.Numer.Methods Eng. 1991. Vol. 32, P. 783-810.

Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), грант №PSU061060.

УДК 517.948

М.Й. Михайлюк

ПРО ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ В ОДНОМУ КЛАСІ ПОТЕНЦІАЛІВ

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає у відшуканні плоскої однозв'язної області D, при заповненні якої речовиною зі сталою густиною породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x,y)$.

Введемо допоміжну функцію $z = z(t)$, яка відображає конформно круг $|t|<1$ комплексної площини t на область D площини $z = x + iy$, що містить початок координат, причому $z(0) = 0$, $z'(0) > 0$. Функцію $z = z(t)$ назвемо розв'язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_e(x,y)$ і густини σ.

Обернена задача логарифмічного потенціалу зводиться до розв'язування нелінійного інтегрального рівняння

$$\sigma z_* = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{U_e\big(z(\tau)\big)\mathrm{d}\tau}{\tau - t}, \quad |t|>1 \tag{1}$$

де

$$z_*(t) = \overline{z(1/\bar{t})}, \quad z(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k t^k, \quad \alpha_1 > 0 \tag{2}$$

$U_e(z) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\partial V_e}{\partial z}$ – аналітична функція зовні початку координат, що зникає на безмежності.

Розглянемо випадок, коли

$$U_e(z) = \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{b}{z^3}, \quad \sigma = 1,$$

де a, b – дійсні числа. Оскільки

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{z} = \frac{1}{\alpha_1 t} + \varphi_1(t), \\
&\frac{1}{z^2} = \frac{1}{\alpha_1^2 t^2} - \frac{2\alpha_2}{\alpha_1^3}\frac{1}{t} + \varphi_2(t), \\
&\frac{1}{z^3} = \frac{1}{\alpha_1^2 t^3} - \frac{3\alpha_2}{\alpha_1^4}\frac{1}{t^2} - \left(\frac{3\alpha_3}{\alpha_1^4} - \frac{6\alpha_2^2}{\alpha_1^5}\right)\frac{1}{t} + \varphi_3(t),
\end{aligned} \tag{3}$$

де $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ – аналітичні функції в одиничному крузі, то підставляючи (2),(3),(4) в (1), отримуємо нелінійну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha_1} - \dfrac{2a\alpha_2}{\alpha_1^3} - \dfrac{3b\alpha_3}{\alpha_1^4} + \dfrac{6b\alpha_2^2}{\alpha_1^5}, \\ \overline{\alpha_2} = \dfrac{a}{\alpha_1^2} - \dfrac{3b\alpha_2}{\alpha_1^4}, \\ \overline{\alpha_3} = \dfrac{b}{\alpha_1^3}, \\ \alpha_4 = \alpha_5 = \ldots = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Система (5) є еквівалентною наступній системі рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + 2|\alpha_2|^2 + 3|\alpha_3|^2 = 1, \\ a = \alpha_1^2\overline{\alpha_2} + 3\alpha_1\alpha_2\overline{\alpha_3}, \\ b = \alpha_1^3\overline{\alpha_3}, \\ \alpha_4 = \alpha_5 = \ldots = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Елементарними методами теорії функцій дійсної змінної встановлюємо існування принаймні одного розв'язку $\left(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \alpha_3^{(0)}\right)$, $\alpha_1^{(0)} > 0$ нелінійної системи (6) в множині дійсних чисел при умові

$$\frac{a^2}{\frac{2}{27}} + \frac{b^2}{\frac{9}{256}} \le 1 . \tag{7}$$

Таким чином, має місце така

Теорема. *Для потенціалу (3), який задовольняє умову (7), нелінійна система рівнянь (6) має принаймні один розв'язок* $\left(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \alpha_3^{(0)}\right)$, $\alpha_1^{(0)} > 0$. *Якщо функція* $z(t) = \alpha_1^{(0)}t + \alpha_2^{(0)}t^2 + \alpha_3^{(0)}t^3$ *здійснює конформне відображення круга* $|t| < 1$ *на деяку плоску однозв'язну область* D *площини* $z = x + iy$, *то дана область* D *і є розв'язком оберненої задачі для даного потенціалу.*

Приклад. Нехай

$$U_e(z) = \frac{1}{z} + \frac{b}{z^3}, \quad b = \sqrt{\frac{9}{256}} . \tag{8}$$

Тоді функція $z(t) = \sqrt{\dfrac{3}{4}}t + \dfrac{1}{\sqrt{12}}t^3$ здісннює конформне відображення круга $|t| < 1$ на деяку зіркову область D площини $z = x + iy$ і є розв'язком оберненої задачі для потенціалу (8).

1. Іванов В.К. Інтегральні рівняння оберненої задачі теорії потенціалу. //ДАН СРСР.– 1955.– Т. 105, № 3.– С. 409–411.

УДК 517.948

А.О. Музичук

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАГЕРА ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ

Одним із підходів до розв'язування нестаціонарних граничних задач є зведення їх до стаціонарних за допомогою інтегрального перетворення (ІП) по часовій змінній. При цьому ключового значення набуває проблема оберненого перетворення. Особливо це стосується випадку неканонічних областей, коли в просторі зображень не вдається застосувати аналітичні методи, які допускали б ефективне повернення до оригіналу. В даній роботі узагальнюється метод, який був запропонований автором для розв'язування граничних задач для хвильового рівняння [1].

1.Інтегральне перетворення Лагера. В просторі X функцій $x(t), t \in [0, \infty)$, для яких виконується умова інтегровності $\int_0^\infty x^2(t)dt < +\infty$, введемо скалярний добуток

$$(x, y) = \int_0^\infty x(t)y(t)dt \tag{1}$$

і на його основі норму $\|x\|^2 = (x, x)$.

Розглянемо систему функцій

$$\{\varphi_k(t) | \varphi_k(t) = e^{-\omega t/2} L_k(\omega t), \omega > 0\}_{k=0}^\infty . \tag{2}$$

Можна показати, що ці функції є ортогональними і $\|\varphi_k\|^2 = \dfrac{1}{\omega}$.

Означення. *ІП Лагера будемо називати оператор* Λ, *який діє згідно з правилами*

$$\Lambda : X \to m, \tag{3}$$

$$\Lambda x(t) = \hat{\mathbf{x}} \equiv (x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)^T , \tag{4}$$