1. Іванов В.К. Інтегральні рівняння оберненої задачі теорії потенціалу. //ДАН СРСР.– 1955.– Т. 105, № 3.– С. 409–411.

УДК 517.948

А.О. Музичук

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАГЕРА ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ

Одним із підходів до розв'язування нестаціонарних граничних задач є зведення їх до стаціонарних за допомогою інтегрального перетворення (ІП) по часовій змінній. При цьому ключового значення набуває проблема оберненого перетворення. Особливо це стосується випадку неканонічних областей, коли в просторі зображень не вдається застосувати аналітичні методи, які допускали б ефективне повернення до оригіналу. В даній роботі узагальнюється метод, який був запропонований автором для розв'язування граничних задач для хвильового рівняння [1].

1.Інтегральне перетворення Лагера. В просторі X функцій $x(t), t \in [0,\infty)$, для яких виконується умова інтегровності $\int_0^\infty x^2(t)dt < +\infty$, введемо скалярний добуток

$$(x, y) = \int_0^\infty x(t)y(t)dt \tag{1}$$

і на його основі норму $\|x\|^2 = (x, x)$.

Розглянемо систему функцій

$$\left\{\varphi_k(t) | \varphi_k(t) = e^{-\omega t/2} L_k(\omega t), \omega > 0\right\}_{k=0}^{\infty}. \tag{2}$$

Можна показати, що ці функції є ортогональними і $\|\varphi_k\|^2 = \dfrac{1}{\omega}$.

Означення. *ІП Лагера будемо називати оператор* Λ, *який діє згідно з правилами*

$$\Lambda: X \to m, \tag{3}$$

$$\Lambda x(t) = \hat{\mathbf{x}} \equiv (x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots)^T, \tag{4}$$

де $x_k = (x, \varphi_k)_m$ *- простір обмежених послідовностей, а вектор* $\tilde{x}$ *- трансформантою функції* $x(t)$. Слідуючи теорії рядів Фур'є, для отримання оригіналу - функції $x(t)$, можна використати наступний ряд Фур'є по системі функцій (2):

$$x(t) = \omega \sum_{k=0}^{\infty} x_k \varphi_k(t), t \geq 0 . \qquad (5)$$

Для переходу до стаціонарних задач у просторі зображень оператора Λ потрібно знати трансформанти похідних по часу. Можна показати істинність наступних співвідношень:

$$\left(\frac{dx(t)}{dt}, \varphi_k\right) = -x(0) + \frac{1}{2}\omega x_k + \omega \sum_{i=0}^{k-1} x_i,$$

(6)

$$\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \varphi_k\right) = -\frac{dx}{dt}_{|t=0} - (\frac{1}{2} + k)\omega x(0) + \frac{1}{4}\omega^2 x_k + \omega^2 \sum_{i=0}^{k-1} (k-i) x_i .$$

2.Еквівалентність нестаціонарних задач і задач в просторі зображень. Нехай в області $\Omega \in \Re^3$, обмеженій кусково-гладкою поверхнею S, $\vec{\nu}$ -зовнішня нормаль, розглядаються граничні задачі з однорідними початковими умовами для однорідного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u(M,t)}{\partial t^2} = \Delta u(M,t), M \in \Omega, t \in [0,\infty), \qquad (7')$$

$$\frac{\partial u(M,t)}{\partial t}_{|t=0} = u(M,0) = 0, \qquad (8')$$

чи однорідного рівняння дифузії

$$\frac{\partial u(M,t)}{\partial t} = \Delta u(M,t), M \in \Omega, t \in [0,\infty), \qquad (7'')$$

$$u(M,0) = 0, \qquad (8'')$$

і загального вигляду граничними умовами

$$lu(M,t)_{|S} \equiv \sigma_1 u(M,t) + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \vec{\nu}} u(M,t) = f(M,t), M \in S, \qquad (9)$$

узгодженими з початковими. Надалі вважаємо, що всі функції в постановці задач є достатньо гладкими для допустимості виконання операцій з їхніми трансформантами.

Розглянемо трансформанти функцій $u(M,t)$ і $f(M,t)$: $\tilde{u} = \Lambda u(M,t)$, $\tilde{f} = \Lambda f(M,t)$. Як наслідок однорідності початкових умов компоненти послідовності $\hat{u}$ задовольняють наступні співвідношення:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(M) = 0; \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k u_k(M) = 0; \tag{11}$$

при цьому остання рівність стосується лише гіперболічного випадку. Якщо до лівої та правої частин диференціальних рівнянь (7) та граничної умови (9) застосувати ІП Лагера, то з врахуванням початкових умов (8) отримаємо наступну систему граничних задач еліптичного типу:

$$A\hat{u} = 0\,; \tag{12}$$

$$l\ l\hat{u} = \hat{f}\,. \tag{13}$$

Диференціальний оператор **A** має наступний вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \Delta - a_{0,0} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots \\ a_{1,0} & \Delta - a_{0,0} & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k,0} & a_{k,1} & \dots & a_{k,k-1} & \Delta - a_{0,0} & 0 & \dots \\ a_{k+1,0} & a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k-1} & a_{k+1,k} & \Delta - a_{0,0} & 0 \\ & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Його коефіцієнти залежать від вихідного нестаціонарного диференціального оператора. У випадку хвильового рівняння вони визначаються формулами

$$a_{k,i} = \begin{cases} \frac{1}{4}\omega^2, & i = k = 0; \\ \omega^2(k-i), & i < k; \\ 0, & i > k. \end{cases} \tag{15'}$$

У випадку рівняння дифузії ці коефіцієнти мають дещо простіший вигляд:

$$a_{k,i} = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega, i = k = 0; \\ -\omega, i < k; \\ 0, i > k. \end{cases} \qquad (15'')$$

Теорема. *Нестаціонарна гранична задача (7)-(9) є еквівалентною системі граничних задач (10)–(13).*

<u>Доведення.</u> Розглянемо лише випадок граничних задач для хвильового рівняння, оскільки схема обгрунтування для параболічної задачі аналогічна. Покажемо, що трансформанта € розв'язку $u(M,t)$ задачі (7'),(8'),(9) задовольняє систему (10)–(13). Спочатку підставимо її в ліву частину k-го рівняння системи (12) і виконаємо очевидні перетворення скалярних добутків:

$$\Delta u_k(M) - \frac{1}{4}\omega \qquad {}^2 u_k(M) - \omega \qquad {}^2\sum_{i=0}^{k-1}(k-i)u_i =$$

$$(\Delta u, \varphi_k) - \frac{1}{4}\omega \qquad {}^2(u, \varphi_k) + \omega \qquad {}^2\sum_{i=0}^{k}(k-i)(u, \varphi_i) =$$

$$(\Delta u, \varphi_k) - (u, \frac{1}{2}\omega[\frac{1}{2}\omega\varphi_k + \omega\sum_{i=0}^{k-1}\varphi_i] + \omega\sum_{i=0}^{k-1}[\frac{1}{2}\omega\varphi_k + \omega\sum_{j=0}^{i-1}\varphi_i]_i) =$$

$$(\Delta u, \varphi_k) - (\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{1}{2}\omega\varphi_k + \omega\sum_{i=0}^{k-1}\varphi_i) =$$

$$(\Delta u, \varphi_k) - (\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi_k) = (\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi_k)$$

Оскільки функція $u(M,t)$ задовольняє хвильове рівняння, то, очевидно, останній скалярний добуток перетворюється на нуль для довільного номера рядка системи. Задоволення співвідношень (10)-(13) є очевидним.

Тепер покажемо, що ряд Фур'є

$$\bar{u}(M,t) = \omega\sum_{'=0}^{\infty} u_k(M)\varphi_k(t), M \in \Omega, t \geq 0, \qquad (16)$$

побудований на основі розв'язку $\hat{u}$ системи (12), задовольняє хвильове рівняння. Обчислимо наступний вираз:

$$\Psi\overline{u}(M,t) \equiv \Delta\overline{u}(M,t) - \frac{\partial^2\overline{u}(M,t)}{\partial t^2} =$$

$$= \omega\sum_{k=0}^{\infty}\Delta u_k(M)\varphi_k(t) - \omega\sum_{k=0}^{\infty}u_k(M)\frac{\partial^2\varphi_k(t)}{\partial t^2}.$$

Випишему другу похідну по часу і змінимо порядок сумування:

$$\Psi\overline{u}(M,t) = \omega\sum_{k=0}^{\infty}\Delta u_k(M)\varphi_k(t) -$$

$$-\omega\sum_{k=0}^{\infty}u_k(M)\left\{\frac{1}{4}\omega^2\varphi_k(t) + \omega^2\sum_{i=0}^{k-1}(k-i)\varphi_i(t)\right\} =$$

$$\omega\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(t)[\Delta u_k(M) - \frac{1}{4}\omega u_k(M)] - \omega^2\sum_{k=1}^{\infty}u_k(M)\sum_{i=0}^{k-1}(k-i)\varphi_i(t) =$$

$$\omega\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(t)[\Delta u_k(M) - \frac{1}{4}\omega u_k(M)] - \omega^2\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(t)\sum_{i=k+1}^{\infty}(i-k)u_k(M).$$

Використовуючи формули (6), можна записати:

$$\Psi\overline{u}(M,t) =$$

$$\omega\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(t)\,[\Delta\, u_k(M) - \frac{1}{4}\omega\, u_k(M)] - \omega^2\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(t)\sum_{i=0}^{k-1}(k-i)u_k(M) =$$

$$= \omega\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(t)\left\{\Delta u_k(M) - \frac{1}{4}\omega^2 u_k(M) - \omega^2\sum_{i=0}^{k-1}(k-i)u_k(M)\right\}.$$

Оскільки $\hat{u}$ - розв'язок системи (12), то для $\forall k \geq 0$ вираз у фігурних дужках перетворюється на нуль. Звідси випливає, що $\forall M \in \Omega, t \geq 0 \Psi\overline{u}(M,t) = 0$, тобто функція $\overline{u}(M,t)$ задовольняє хвильове рівняння. Задоволення початкових та граничних умов перевіряється безпосередньою підстановкою.

Зауваження: 1) у випадку неоднорідних нестаціонарних диференціальних рівнянь система (12) буде неоднорідною; її права частина міститиме трансформанти правої частини відповідного нестаціонарного рівняння і функцій з початкових умов; 2) методика використання ІП Лагера повністю переноситься на випадок зовнішніх граничних задач, а також на задачі з нерегулярними граничними поверхнями.

3.Інтегральне представлення трансформант. В [1] було запропоновано інтегральне представлення трансформант за допомогою фундаментального розв'язку диференціального оператора, який є частковим випадком оператора, що задається формулою (14). Аналогічним способом можна показати, що коли

G(M,P,T) - фундаментальний розв'язок нестаціонарного диференціального оператора, то вектор $\widehat{G} = \left(G_0(M,P),\ \ G_1(M,P),\ \ ...,\ \ G_k(M,P),\ \ ...\right)^T$, де $G_k(M,P) = \left(G,\varphi_k\right)$, є фундаментальним розв'язком оператора **А**.

Теорема. *Послідовність* $\widehat{u}$*, компоненти якої обчислюються згідно з формули*

$$u_k(M) = \iint\limits_S \sum_{i=0}^{k} \left[G_{k-i}(M,P)\frac{\partial}{\partial \vec{\nu}_P} u_i(P) - u_i(P)\frac{\partial}{\partial \vec{\nu}_P} G_{k-i}(M,P) \right] ds_P, \quad (7)$$

є розв'язком системи (12) для $\forall M \in \Omega$.

<u>Доведення.</u> Підставимо інтеграли (16) у вираз правої частини k-го рівняння системи (12) і перегрупуємо в ньому доданки, зводячи подібні члени з функціями $u_k(P)$ та їх нормальними похідними. В результаті для $\forall k \geq 0$ і $\forall M \in \Omega$ отримаємо:

$$R_k(M) = \iint\limits_S \sum_{i=0}^{k} \left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial \vec{\nu}_P} u_i(P) \left\{ \Delta G_{k-i}(M,P) - \sum\limits_{m=0}^{k-i} a_{k,m} G_m(M,P) \right\} - \\ - u_i(P) \dfrac{\partial}{\partial \vec{\nu}_P} \left\{ \Delta G_{k-i}(M,P) - \sum\limits_{m=0}^{k-i} a_{k,m} G_m(M,P) \right\} \end{array} \right] ds_P$$

Оскільки $\widehat{G}$ - фундаментальний розв'язок оператора **А**, то вираз у фігурних дужках перетворюється на нуль $\forall M \in \Omega$, і, остаточно, $R_k(M) = 0$. Теорема доведена.

Для трансформант $\widehat{u}$ інтегральне представлення (17) є аналогом формули Гріна, оскільки задає компоненти $u_k(M)$ через їх значення та значення нормальних похідних на границі *S*. Ці граничні значення можна визначити з граничних умов (13). Відповідно до наведеної вище методики, компоненти трансформант можна також шукати у вигляді аналогів потенціалів простого та подвійного шару, що в деяких задач дає змогу отримати розв'язки з меншим обсягом обчислень.

Вигляд представлення (17) є підставою для застосування до граничних задач у просторі зображень методу граничних елементів [2]. Варто відзначити як позитивний момент, що матриця алгебраїчної системи, що утворюється при його застосуванні, є незмінною для обчислення всіх компонент, а права частина обчислюється по рекурентному алгоритму.

1. Людкевич И.В., Музычук А.Е. Численное решение краевых задач для волнового уравнения. - Львов, ЛГУ, 1990. -80 с.
2.Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Метод граничных элементов. -М.:Мир, 1987.

УДК 539.3

І.С. Муха, Н.Я. Савула

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК ТИМОШЕНКА З ВИКОРИСТАННЯМ АПРОКСИМАЦІЙ ФУНКЦІЯМИ - "БУЛЬБАШКАМИ"

При дослідженні задач теорії оболонок типу Тимошенка методом скінченних елементів (МСЕ) для малих значень відносної товщини h спостерігається явище втрати точності отримуваних чисельних результатів. Це явище пов`язане з виродженням задачі для випадку $h \to 0$. Для боротьби з цим явищем у ряді робіт запропоновані різні методи, зокрема метод редукованого інтегрування та метод штрафу. У даній роботі для боротьби із втратою точності результатів використовується апроксимація розв`язку за допомогою функцій - " бульбашок ".

Розглянемо задачу циліндричного згину пластини, нескінченної за напрямком ξ_2 - лінії, навантаженої рівномірно розподіленим тиском на зовнішній поверхні $\xi_3 = h/2$.

Ключові рівняння для цього випадку мають вигляд

$$
\begin{gathered}
-B\frac{d^2u_1}{d\xi_1^2} = p_1, \\
-G(\frac{d\gamma_1}{d\xi_1} + \frac{d^2w}{d\xi_1^2}) = p_n, \qquad (1) \\
-D\frac{d^2\gamma_1}{d\alpha_1^2} + G(\gamma_1 + \frac{dw}{d\alpha_1}) = m_1, \\
0 \le \xi_1 \le 1,
\end{gathered}
$$

де B=Eh/(1-ν^2), G= k G h, D=Eh^3/12(1-ν^2), p=const - інтенсивність зовнішнього навантаження. Нехай $p_1 = 0, p_n = p = const, m_1 = 0$.