1. Людкевич И.В., Музычук А.Е. Численное решение краевых задач для волнового уравнения. - Львов, ЛГУ, 1990. -80 с.
2.Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Метод граничных элементов. -М.:Мир, 1987.

УДК 539.3

І.С. Муха, Н.Я. Савула

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК ТИМОШЕНКА З ВИКОРИСТАННЯМ АПРОКСИМАЦІЙ ФУНКЦІЯМИ - "БУЛЬБАШКАМИ"

При дослідженні задач теорії оболонок типу Тимошенка методом скінченних елементів (МСЕ) для малих значень відносної товщини h спостерігається явище втрати точності отримуваних чисельних результатів. Це явище пов`язане з виродженням задачі для випадку $h \to 0$. Для боротьби з цим явищем у ряді робіт запропоновані різні методи, зокрема метод редукованого інтегрування та метод штрафу. У даній роботі для боротьби із втратою точності результатів використовується апроксимація розв`язку за допомогою функцій - " бульбашок ".

Розглянемо задачу циліндричного згину пластини, нескінченної за напрямком ξ_2 - лінії, навантаженої рівномірно розподіленим тиском на зовнішній поверхні $\xi_3 = h/2$.

Ключові рівняння для цього випадку мають вигляд

$$-B\frac{d^2u_1}{d\xi_1^2} = p_1,$$

$$-G(\frac{d\gamma_1}{d\xi_1} + \frac{d^2w}{d\xi_1^2}) = p_n, \tag{1}$$

$$-D\frac{d^2\gamma_1}{d\alpha_1^2} + G(\gamma_1 + \frac{dw}{d\alpha_1}) = m_1,$$

$$0 \le \xi_1 \le 1,$$

де $B=Eh/(1-\nu^2)$, $G= k'G'h$, $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$, p=const - інтенсивність зовнішнього навантаження. Нехай $p_1 = 0, p_n = p = const, m_1 = 0$.

Припустимо, що на краях $\xi_1 = 0,1$ пластина защемлена, тобто виконуються умови

$$w = \gamma_1 = 0,\ u_1 = w = \gamma_1 = 0, \qquad \xi_1 = 0;1. \tag{2}$$

Розв'язок системи рівнянь (1) при крайових умовах (2) має вигляд

$$u_1 = 0,$$

$$w = \frac{p}{2G}\xi_1 + \left(\frac{p}{24D} - \frac{p}{2G}\right)\xi_1^2 - \frac{p}{12D}\xi_1^3 + \frac{p}{24D}\xi_1^4, \tag{3}$$

$$\gamma_1 = -\frac{p}{12D}\xi_1 + \frac{p}{4D}\xi_1^2 - \frac{p}{6D}\xi_1^3.$$

Для побудови чисельного розв`язку задачі (1), (2) запишемо її слабку постановку. Введемо простір

$$V = \{v(\xi_1) : v \in W_2^{(1)}; v = 0, \xi_1 = 0,1\}. \tag{4}$$

Домножимо друге та третє рівняння (1) на довільні функції $\tilde{w}, \tilde{\gamma}_1 \in V$ та зінтегруємо на проміжку [0,1]. Отримаємо

$$\int_0^1 G\frac{d\gamma_1}{dx}\tilde{w}dx + \int_0^1 G\frac{dw}{dx}\frac{d\tilde{w}}{dx}dx = \int_0^1 p_1\tilde{w}dx,$$

$$\int_0^1 D\frac{d\gamma_1}{dx}\frac{d\tilde{\gamma}_1}{dx} + \int_0^1 G\left(\gamma_1 + \frac{dw}{dx}\right)\tilde{\gamma}_1 dx = \int_0^1 m_1\tilde{\gamma}_1 dx,\ \tilde{w}, \tilde{\gamma}_1 \in V. \tag{5}$$

Чисельний розв`язок задачі (5) побудуємо МСЕ на сітці

$$\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = 1, \tag{6}$$

Позначимо через

$$\Omega_k = \{\xi_1 : \xi_1^{k-1} < \xi_1 < \xi_1^k\},$$

k -ий скінченний елемент. Відобразимо його на стандартний елемент

$$\Omega_{st} = \{\xi : -1 < \xi < 1\}$$

за допомогою формул

$$\xi_1 = \frac{1-\xi}{2}\xi_1^{k-1} + \frac{1+\xi}{2}\xi_1^k.$$

Виберемо на стандартному елементі наступні базисні функції

$$\varphi_1 = \frac{1-\xi}{2}; \varphi_2 = \frac{1+\xi}{2}; \varphi_i = \Phi_{i-1}(\xi), i = 3,4,\ldots m,$$

де Φ_j визначається через поліноми Лежандра P_{j-1}

$$\Phi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}}\int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t)dt, j = 2,3,\ldots,$$

Має місце формула $\Phi_j(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2(2j-1)}}(P_j - P_{j-2})$.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь МСЕ формується з матриць B_{11}, B_{22}, B_{21}, B_{12}, F_1, F_2, елементи яких обчислюються за формулами

$$b_{11}^{ij} = \frac{2}{h_k}\int_{-1}^{1} G \frac{d\varphi_i}{d\xi}\frac{d\varphi_j}{d\xi} d\xi,$$

$$b_{22}^{ij} = \frac{2}{h_k}\int_{-1}^{1} D \frac{d\varphi_i}{d\xi}\frac{d\varphi_j}{d\xi} d\xi + \frac{h_k}{2}\int_{-1}^{1} G\varphi_i\varphi_j d\xi,$$

$$b_{21}^{ij} = \int_{-1}^{1} G \frac{d\varphi_i}{d\xi}\varphi_j d\xi, \qquad (7)$$

$$b_{12}^{ij} = \int_{-1}^{1} G \frac{d\varphi_j}{d\xi}\varphi_i d\xi,$$

$$f_1^i = \frac{h_k}{2}\int_{-1}^{1} m_1\varphi_i d\xi, \quad f_2^i = \frac{h_k}{2}\int_{-1}^{1} p\varphi_i d\xi.$$

Обчислення інтегралів у формулах (7) здійснюється з використанням властивостей базисних функцій та поліномів Лежандра.

В таблиці наведені результати обчислень відносного прогину w/l за формулою (3) - перший стовпчик та МСЕ - 2, 3 стовпчики для 4-ох базисних функцій (h=1/10).

	8-elem	16-lem
w/l-аналіт.	w/l	w/l
0.0000000E+0	0.0000000E+0	0.0000000E+0
2.1156921E+0		2.1134509E+0
5.8932617E+0	5.8878396E+0	5.8921302E+0
1.0499578E+1		1.0501599E+1
1.5229687E+1	1.5361143E+1	1.5235797E+1
1.9506805E+1		1.9517034E+1
2.2882324E+1	2.3152207E+1	2.2895998E+1
2.5035809E+1		2.5051752E+1
2.5774999E+1	2.6100408E+1	2.5791732E+1

Зауважимо, що шляхом використання лінійних апроксимацій МСЕ така точність результатів може бути досягнена у випадку значно густішої сітки.