вхідних та вихідних документів, а визначені на основі законодавчих актів, що регламентують діяльність суб'єкта та прийняту систему обліку. Тому при проектуванні системи розглядатимемо виключно Σ_1, оскільки перехід від Σ_0 до Σ_1 належить до проблематики проектування інтерфейсу. Зокрема, Ω_1 складається із нормативних операцій опрацювання інформації та операцій формування зовнішніх звітів.

Алгебраїчна система $\Sigma_1=<B,\Omega_1,\Pi_1>$ відображається у систему $\Sigma_2=<C,\Omega_2,\Pi_2>$ за правилами: множина $C=\{\gamma_i \mid i \in I_2\}$ складається з атрибутів баз даних та отримується з **B** поповненням множиною ключів **K**, множина відношень Π_2 бази даних вводиться шляхом аналізу множин C та Ω_2 на основі відповідної реляційної алгебри, а множина операцій Ω_2 отримується з Ω_1 застосуванням програмних засобів інструментальної реляційної СУБД.

Подальший аналіз властивостей множин алгебраїчної системи Σ_1 (або відповідної їй моделі Σ_1*), буде проводитись з метою виділення загальних характеристик, що дозволить виконувати перепроектування при зміні правил бізнесу. Для цього видається доцільним розробити спеціалізований програмний комплекс, який поряд з використанням CASE-засобів дозволить оперативно здійснювати перепрограмовування системи.

1. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Тарасов Д.О. Концепція інформаційної системи "Реєстр власників іменних цінних паперів". Інформаційні системи та мережі. Вісн. держ. ун-ту "Львівська політехніка". 1997. №315. С.153-168. 2. Мальцев А.И. Алгебраические системы. - М: Наука, 1971. - 230 с.

УДК 518:517.948

Т.М. Олійник, Б.А. Остудін

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКИХ ПРОСТОРОВИХ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Серед багатьох сучасних моделей, які описують різні фізичні процеси, неабиякий інтерес представляють нестаціонарні задачі поширення тепла. Актуальними серед таких задач є просторові задачі теплопровідності в нерегулярних областях.

1. Постановка задачі. Нехай в R^3 задана деяка область Ω_+, обмежена замкненою поверхнею Γ, яку віднесемо до класу ліпшицевих. Введемо позначення:

$$I := (0,T), \Sigma := \Gamma \times I, \; Q_+ := \Omega_+ \times I, \; Q_- = R^4 \setminus \overline{Q}_+ .$$

''Природним'' сімейством гільбертових просторів для граничних задач теплопровідності є сімейство просторів $H^{2s,s}(Q_\pm)$, де s- довільне дійсне число [1]. У випадку, коли s- ціле, то даний простір- це простір функцій інтегрованих з квадратом по області $Q_\pm$ разом зі своїми похідними по t до порядку s і зі всіма своїми похідними по x до порядку 2s. Тобто, наприклад,

$$H^{2s,s}(Q_+) = L^2\left((0,T); H^{2s}(\Omega_+)\right) \bigcap H^s\left((0,T); L^2(\Omega_+)\right),$$

де

$$L^2(\Omega_+) = \{u(x,\cdot) | \int_{\Omega_+} |u(x,\cdot)|^2 d\Omega_+ < \infty\} .$$

Введемо такий оператор сліду для кожної функції з класу $H^{1,1/2}(Q_+)$:

$$B^+ : H^{1,1/2}(Q_+) \to H^{1/2,1/4}(\Sigma) ,$$

де

$H^{1/2,1/4}(\Sigma)$ - звуження функій із $H^{1,1/2}(Q_+)$ на Σ.

Розглянемо задачу: необхідно знайти розв'язок u в просторі $H^{1,1/2}(Q_+)$, який задовольняє умови

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f \quad \text{в} \quad Q_+, \tag{1.1}$$

$$B^+ u = g \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_+, \tag{1.3}$$

де

$Lu = -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u$ - еліптичний оператор,

$a_{ij}, a_0 \in C^\infty(R^3; R)$ -функції дійсної змінної і $a_{ij} = a_{ji}$,

B^+ - граничний оператор,

$g \in H^{1/2,1/4}(\Sigma)$ - гранична функція,

$f \in L^2(I, H^{-1}(\Omega_+))$.

Зауважимо, що оператор B^+ можна розглядати як

$$B^+u = u\big|_{\Sigma}, \tag{1.4}$$

тобто задача (1.1.)-(1.3.)-представляє початково-крайову задачу типу Діріхле, або

$$B^+u = \partial_n u\big|_{\Sigma}, \tag{1.5}$$

тобто задача (1.1.)-(1.3.) є задачею Неймана.

Методи чисельного знаходження розв'язку розглянутої задачі (1.1.)-(1.3.) умовно можна розділити на «прямі методи» (тобто з використанням формул Гріна) і «непрямі методи» (для представлення розв'язку задачі використовують потенціал простого чи подвійного шару). Коротко це можна записати:

$$u = V_\sigma - W_\mu \qquad \text{(«прямий метод»)}, \tag{1.6}$$

$$u = V_\sigma \qquad \text{(« метод простого шару»)}, \tag{1.7}$$

$$u = W_\mu \qquad \text{(«метод подвійного шару»)}, \tag{1.8}$$

де

$$(V_\sigma)(x,t) = \int_0^t \int_\Gamma \sigma(y,\tau)\cdot E(R,t-\tau)\,d\Gamma\,d\tau,$$

$$(W_\mu)(x,t) = \int_0^t \int_\Gamma \mu(y,\tau)\cdot \partial_n E(R,t-\tau)\,d\Gamma\,d\tau,$$

причому

σ і μ - шукані функції, визначені на граничній поверхні Γ;

$E(R,t) = \dfrac{1}{(\sqrt{4\pi t})^3}\cdot \exp(-R^2/4t)$ – фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності.

Використання представлень розв'язку (1.6)-(1.8) та застосування запропонованих просторів дає змогу при розв'язуванні задачі (1.1)-(1.3) одержати еквівалентні граничні інтегральні рівняння 1-го або 2-го роду в залежності від граничної умови (1.3), а також встановити їх розв'язність.

Зауважимо також, що описані підходи при незначній модифікації основних функціональних просторів поширюються на випадок незамкнених границь.

2. Деякі аспекти чисельного розв'язування задач теплопровідності. Розглянемо початкову-крайову задачу (1.1.)-(1.3.) типу Діріхле. Для чисельного розв'язування задачі скористаємось представленням (1.7.). В результаті одержимо граничне інтегральне рівняння (ГІР) Фредгольма 1-го роду по просторових змінних, яке можна записати в такому вигляді:

$$V_\sigma = g \text{ на } \Sigma, \tag{1.9}$$

або

$$\int_0^t \int_\Gamma \sigma(x,\tau) E(R, t-\tau) d\Gamma d\tau = g,$$

де

$\sigma(x,\tau)$ - невідома функція, визначена на граничній поверхні Σ,

R - відстань між точкою інтегрування та точкою спостереження на Σ.

При розв'язуванні (1.9) проведено дискретизацію по часовій змінній, в результаті чого одержано стаціонарну послідовність ГІР спеціального виду (ліві частини яких формуються лише один раз, а зміні підлягають- лише праві). Далі використовуємо метод колокації із застосуванням розбиття поверхні Г криволінійною сіткою на елементи. В межах кожного такого елементу здійснюємо біквадратичну апроксимацію шуканих функцій σ. Обравши як точки колокації вузли елементів і здійснивши сумування по елементах поверхні, одержуємо послідовність систем алгебраїчних рівнянь (СЛАР). При розв'язуванні СЛАР враховуємо наявність слабкої особливості в ядрах інтегральних рівнянь, а також сингулярну поведінку шуканого розв'язку вздовж границі нерегулярних областей. Для послаблення особливості ядра використовуємо чисельно-аналітичний метод [2].

Описаний підхід використано для чисельного розв'язування одного класу початково-крайових задач теплопровідності на нерегулярних областях складної геометрії. Отримані результати засвідчують ефективність такого методу.

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложение. -М.: Мир, 1971. 371с. 2. Yu. Sybil. Three-dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface, Matematychni Studii, V.8, No.1 (1997) 79-96. 3. Олійник Т.М., Остудін Б.А. Алгоритм наближеного розв'язування однієї задачі теплопровідності у випадку розімкнених поверхонь складної геометрії.// Волинський математичний вісник. 1996, Вип. 3. С.99-102.