УДК 519.6

Б.О. Попов

ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ ДЛЯ ПОБУДОВИ БАЛАНСНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Для представлення складної функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$ її заміняють простішим виразом із ($m+1$)-м параметрами

$$F(A,x)=F(a_0,a_1,\ldots,a_m;x). \qquad (1)$$

Часто вимагається, щоб зважена похибка на проміжку $[a,b]$ не перевищувала певного значення μ. Якщо кількість параметрів наближення необхідно мінімізувати, то ми приходимо до найкращого чебишовського зваженого (з вагою $w(x)>0$) або мінімаксного наближення. Деякі обчислювальні системи мають процедури для знаходження мінімаксного наближення раціональним многочленом

$$V_{k,l}(x)=x^s R_{k,l}(x^p), \qquad (2)$$

де s та p – цілі числа, $R_{k,l}(x)$ – раціональний многочлен із степенем чисельника – k і степенем знаменника – l $(k+l=m)$.

Для швидкого обчислення наближення та зменшення похибок заокруглення часто зручно використовувати на різних підінтервалах $[z_{i-1},z_i]$ $(a=z_0<z_1<\ldots<z_r=b)$ проміжку $[a,b]$ наближаючі вирази $F(A_i,x)$ з різними значеннями параметрів, тобто переходити до наближення сплайнами. Якщо максимальне значення похибки наближення

$$\mu_i=\max_{x\in[z_{i-1},z_i]}\left|(f(x)-F(A_i,x))\right|/w(x), \qquad (3)$$

де $a=z_0<z_1<\ldots<z_r=b$ однакове на усіх підінтервалах $\left(\mu_i=\mu, i=\overline{1,r}\right)$, то таке наближення зветься балансним ("balanced") наближенням сплайнами. Часом його звуть також рівномірним [1] або вирівненим ("leveled", "equal-leveled") наближенням сплайнами [3,6]. Якщо кожна ланка сплайну є найкраще чебишоеське наближення, то таке наближення називаємо чебишевським сплайном. Балансне наближення чебишевським сплайном є і оптимальним. Це означає, що коли границі на проміжку $[a,b]$ ланок

сплайну (вузли) вибрані з умови балансності, то ми одержуємо при заданій похибці μ найменшу можливу кількість ланок r, а при заданій кількості ланок – найменшу похибку. Якщо зафіксовано і найбільшу похибку і кількість ланок, то одержується найбільший можливий проміжок наближення [1,3].

Ефективність наближення може додатково збільшуватися, якщо допустити використання апроксимуючих виразів різної форми на різних ланках сплайну. У поширених обчислювальних системах балансні наближення сплайнами відсутні через необхідність виконувати для їх знаходження завеликий об'єм обчислень. Тим більше не використовуються балансні наближення із наближаючими виразами різного виду. Проте час обчислень може бути суттєво зменшений при використанні аналітичних перетворень на комп'ютері.

В основі зменшення часу обчислень при знаходженні балансних наближень лежить використання поняття ядра наближень. Добре відомо [1,3,6], що коли $f(x)\in C^{m+1}[a,b]$ та $f^{(m+1)}(x)\neq 0$ при $x\in[a,b]$, то максимальна похибка μ найкращого чебишевського наближення многочленом $P_m(x)$ степеня m на проміжку $[a,b]$ є

$$\mu=\frac{1}{2^{2m+1}(m+1)!}\left|f^{(m+1)}(\xi)\right|(b-a)^{m+1}, \tag{4}$$

де $\xi\in(a,b)$.

Логічно припустити, що за певних умов для довільного наближаючого виразу $F(A,x)$ справджується

$$\mu=\frac{1}{2^{2m+1}(m+1)!}\left|\eta(f(\xi),F)\right|(b-a)^{m+1}. \tag{5}$$

Якщо рівність (5) справедлива, то функцію $\eta(f,F)=\eta(f(x),F)$ називаємо ядром наближення функції $f(x)$ за допомогою виразу $F(A,x)$. У загальному випадку вираз для ядра наближень залежить від функції $f(x)$ та її $(m+1)$ похідних:

$$\eta(f,F)=\varphi\left(f(x),f'(x),\dots,f^{(m+1)}(x),F\right) \tag{6}$$

Теорема [1]. *Нехай* $f(x)\in C^{m+2}[a,b]$, $\eta(f,F)\in C^{1}[a,b]$, $w(x)\in C^{1}[a,b]$ *і* $\eta(f,F)/w(x)\neq 0$ *при* $x\in[a,b]$, *то для* $r\to\infty$ *максимальна похибка* μ *балансного зваженого наближення чебишевським сплайном* $S(F,x)$ *із* r *ланками функції* $f(x)$ *на проміжку* $[a,b]$ *становить*

$$\mu = \frac{r^{-m-1}}{2^{2m+1}(m+1)!}\left(\int_a^b |\eta(f,F)/w(x)|^{\frac{1}{m+1}}dx\right)^{m+1}\left[1+O\left(\frac{b-a}{r}\right)\right]. \qquad (7)$$

Якщо у виразі (7) знехтувати величиною $O\left(\frac{b-a}{r}\right)$, то для визначення вузлів $z_i\left(i=\overline{0,r}\right)$ матимемо рівняння

$$i\int_a^b |\eta(f,F)/w(x)|^{\frac{1}{m+1}}dx = r\int_a^{z_i} |\eta(f,F)/w(x)|^{\frac{1}{m+1}}dx,\, i=\overline{0,r}. \qquad (8)$$

Для практичного використання формул (7) та (8) необхідно мати аналітичні вирази для ядер $\eta(f,F)$. Загальні властивості ядер і способи знаходження їх аналітичних виразів описані в [1,2]. У більшості випадків способи знаходження аналітичних виразів (6) доволі складні. Часто їх реалізація тільки за допомогою "ручки і паперу" практично неможлива. Частина з них реалізована у вигляді процедур у системі комп'ютерної алгебри Maple V Release 5 [4]. Деякі конкретні результати наведено у [2,7].

Із використанням співвідношень (7) та (8) побудовано методи знаходження балансних наближень, які реалізовано як процедури для системи Maple V Release 5. У процедурах спершу знаходять аналітичні вирази для ядер, а далі встановлюють числові значення вузлів сплайнів і параметрів наближень на кожній ланці сплайну. Деякі процедури передбачають знаходження на кожній ланці сплайну такого наближення, при якому досягається найменша похибка серед набору виразів із фіксованою кількістю параметрів.

Приклад. Для функції $f(x)=\Gamma(x)$ знайти оптимальне балансне наближення на проміжку $[1,3]$ із найбільшою абсолютною похибкою $\mu=.00119$. Множина наближаючих виразів – раціональні многочлени $R_{k,l}(x)$ із трьома параметрами $(m=k+l=2)$. Результати обчислень:

$$z_1 = 1.70395986,\ \mu_1 = .0011891,$$

$$x \to 1.709000233\frac{1}{.2284254502+(-2.939460194+x)x},$$

$$z_2 = 2.422041577,\ \mu_2 = .0011888,$$

$$x \to 1.904625501+(-1.335278026+.4412700943x)x,$$

$$z_3 = 3.003122812,\ \mu_3 = .0011896,$$

$$x \to 15.40341426\frac{1}{38.50661308+(-13.26964749+x)x}.$$

У цьому прикладі оптимальні k та l виявилися різними для різних підінтервалів. Це дивно, бо звичайно для $\Gamma(x)$ використовується раціональне наближення при $k = l$ [5]. Проте наближення тієї ж функції на тих же підінтервалах раціональним виразом $R_{1,1}(x)$ дає такі максимальні похибки $\mu_1 = .015051$, $\mu_2 = .0033367$, $\mu_3 = .0013161$. Результати виявляються гіршими на всіх підінтервалах. Найбільша різниця – у 12 разів.

1. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. Киев: Наук.думка, 1989. 272с. 2. Попов Б.О., Лаушник О.І. Знаходження оптимальної форми раціональних наближень// Відбір і обробка інформ. 1997. Вип.11(87). С.107-110. 3. Meinardus G. Some Results in Segmented Approximation// Comput. Math. Appl. 1997. Vol.33. №1/2. P.165-180. 4. Monagan M.B., Geddes K.O., Heal K.M. et al. Maple V. Programming Guide. N.Y.: Springer-Verlag. 1998. 390p. 5. Moshier S.L. Methods and Programs for Mathematical Functions. N.Y.: John Wiley. 1989. 418p. 6. Nurnberger G. Approximations by Spline Functions. N.Y.: Springer-Verlag. 1989. 416p. 7. Popov B.A. A System for Function Approximation Properties Investigation //SIGSAM Bulletin. 1997. Vol.31. №3. P.29-30.

УДК 519.6:518

П.С. Сеньо

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ МЕТОДАМИ ІНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Аналіз статистичного матеріалу закінчено, коли істотні властивості генеральної сукупності записано аналітично. Зокрема, ця основна задача математичної статистики розв`язана повністю, коли відома функція розподілу, або густина генеральної сукупності. Практично, ці функції дослідник *підбирає* на основі аналізу вибірки - відомі критерії погодженості (Пірсона, Колмогорова, Смірнова тощо) лише з певним ступенем надійності обгрунтовують зроблений вибір; можемо лише *оцінити* значення невідомих параметрів розподілу та й це лише при умові, коли сам розподіл відомий.

Суть проблеми полягає в слідуючому. Потрібно побудувати таку криву, графік якої "найщільніше" пройшов би через множину