$$2n^2 - n = N(\ln n + 2C_1 - 1).$$

Якщо ймовірності звертання до записів задовольняють узагальнений закон розподілу, то аналогічно як в [3] з достатньо високою точністю

$$E = \frac{1}{H_N^{(c)}}\left(H_N^{(c-1)} + H_N^{(c)} + \left(\frac{N}{n} - 1\right)\frac{N^{1-c}}{1-c}\left(\frac{c-1}{2-c}n + \frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}}\right)\right).$$

Для наближеного обчислення значення параметра n, при якому E досягає мінімуму, одержуємо рівняння

$$n^{3-c} + \frac{2-c}{1-c}\left((N-n)\left(\alpha^{(c)}(n+1) - \alpha^{(c)}(n)\right) + (1-c)\,\alpha^{(c)}(n)\right)n =$$

$$= \frac{(2-c)^2}{1-c} N\alpha^{(c)}(n).$$

1. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 3. Сортировка и поиск. - М.: Мир, 1978. - 844 с. 2. Мартин Дж. Организация баз данных в вычислительных системах. -М.: Мир. 1980. - 644 с. 3. Цегелик Г.Г. Системы распределенных баз данных. - Львов: Світ, 1990. - 168 с.

УДК 519.62

Р.С. Хапко

ПРО МЕТОДИ РОТЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДРУГОЇ ПОЧАТКОВО–КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО РІВНЯННЯ

Наближене розв'язування початково-крайових задач для телеграфного рівняння має важливе значення для прикладних наук і технологій. Серед різних способів чисельного розв'язування таких задач відповідне місце посідає підхід, що грунтується на частковій дискретизації вихідної задачі методом Роте по часу і подальшому використанні *граничних* інтегральних рівнянь (див., наприклад, [2, 3, 5]). Ми розглядаємо застосування цього методу для чисельного розв'язування другої зовнішньої початково–крайової задачі для телеграфного рівняння. Подібні задачі виникають, наприклад, при моделюванні процесу поширення акустичних хвиль, відбитих акустично жорстким тілом, в однорідному ізотропному середовищі з коефіцієнтом затухання відмінним від нуля.

1. Метод Роте. Нехай $D \subset \mathbf{R}^2$ необмежена область така, що її доповнення є обмеженим і однозв'язним з границею $\Gamma \in \mathbf{C}^3$ і нехай $T > 0$ – задана константа. Необхідно знайти обмежену, двічі неперервно–диференційовану функцію $u(x,t)$, що задовольняє телеграфне рівняння

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{в} \quad D \times (0,T] \tag{1}$$

з коефіцієнтами $a > 0$ і $b > 0$, однорідні початкові умови

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{в} \quad D \tag{2}$$

і граничні умови

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = F \quad \text{на} \quad \Gamma \times [0,T], \tag{3}$$

де ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ і F – задана функція, для якої виконується умова погодженості. Відомо [1], що при належній гладкості функції F поставлена задача має єдиний розв'язок.

На рівномірному розбитті часового інтервалу $[0,T]$

$$\left\{ t_i = ih, i = -2,-1,\ldots,N_t - 2, h = \frac{T}{N_t - 2}, N_t > 2 \right\} \tag{4}$$

апроксимуємо похідні по часовій змінній в задачі (1)-(3) за допомогою таких скінченних різниць

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t_i) \approx \frac{u(x,t_i) - u(x,t_{i-1})}{h}, \quad i = -1,\ldots,N_t - 2 \text{ , і}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t_i) \approx \frac{u(x,t_i) - 2u(x,t_{i-1}) + u(x,t_{i-2})}{h^2}, \quad i = 0,\ldots,N_t - 2 .$$

В результаті нестаціонарна задача (1)–(3) трансформується на розбитті (4) в таку послідовність стаціонарних задач

$$\Delta U_n - \gamma^2 U_n = \alpha_0 U_{n-1} + \alpha_1 U_{n-2} \quad \text{в} \quad D, \tag{5}$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial \nu} = F_n \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{6}$$

$$U_n(x) = O(1), \quad |x| \to \infty \tag{7}$$

для $n = 0,\ldots,N_t - 2$ з

$$U_n(x) \approx u(x,t_n), \quad F_n(x) := F(x,t_n), \quad \gamma^2 := \frac{1}{a^2h^2} + \frac{b}{h},$$

$$\alpha_0 := -\frac{2}{a^2h^2} - \frac{b}{h} \text{ і } \alpha_1 := \frac{1}{a^2h^2}.$$

Отже, за допомогою методу Роте ми отримали рекурентну послідовність задач Неймана для визначення $U_n \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ з початковими значеннями $U_{-2} = 0$ і $U_{-1} = 0$. Методом індукції можна довести наступний результат про єдиність.

Теорема 1. *Система (5)-(7) має найбільше один розв'язок.*

2. Граничні інтегральні рівняння. Безпосереднє застосування прямого або непрямого варіанта методу інтегральних рівнянь до послідовності задач (5)-(7) призводить до необхідності обчислення подвійних інтегралів по необмеженій області D, що створює значні проблеми при наближеному розв'язуванні. У зв'язку з цим побудуємо інші інтегральні представлення для розв'язків рівнянь (5).

Нехай $K_0(z)$ і $K_1(z)$ – функції Макдональда, $v_n(z)$ і $w_n(z)$ – послідовність поліномів

$$v_n(z) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{n,2k} z^{2k}, \quad w_n(z) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} a_{n,2k+1} z^{2k+1},$$

коефіцієнти яких визначаються за рекурентними формулами

$$a_{n,0} = 1, \; n = 0,1,\dots,N_t - 2, \; a_{n,n} = -\frac{\alpha_1}{2\gamma n} a_{n-1,n-1},$$

$$a_{n,k} = \frac{1}{2\gamma k}\left\{4\left[\frac{k+1}{2}\right]^2 a_{n,k+1} - \alpha_0 a_{n-1,k-1} - \alpha_1 a_{n-2,k-1}\right\}$$

для $k = n-1,\dots,1$ і $n = 1,\dots,N_t - 2$. Справедливе твердження

Теорема 2. *Функції*

$$\Phi_n(x,y) := K_0(\gamma|x-y|)v_n(|x-y|) + K_1(\gamma|x-y|)w_n(|x-y|) \quad x \neq y.$$

задовольняють рівняння (5) відносно x в $\mathbf{R}^2 \setminus \{y\}$ для $n = 0,\dots,N_t - 2$ і мають логарифмічну особливість при $x \to y$.

Введемо за допомогою функцій Φ_n потенціали простого та подвійного шару

$$U_n(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n} \int_\Gamma q_m(y)\Phi_{n-m}(x,y)\,ds(y), \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma \text{ і} \tag{8}$$

$$V_n(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n}\int_\Gamma q_m(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\Phi_{n-m}(x,y)\mathrm{d}s(y), \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma, \tag{9}$$

відповідно, з неперервними густинами $q_n(x)$. Враховуючи асимптотичну поведінку функцій Макдональда: $K_0(z) \sim \ln\frac{1}{z}$ і $K_1(z) \sim \frac{1}{z}$ при $z \to 0$, отримаємо, що потенціали (8) і (9) мають на границі Γ властивості класичних логарифмічних потенціалів. Зокрема, як і у випадку інших диференціальних рівнянь, нормальна похідна потенціалу подвійного шару в нашому випадку має таке представлення

$$\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n}\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\int_\Gamma q_m(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\Phi_{n-m}(x,y)\mathrm{d}s(y) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta(x)}\int_\Gamma \frac{\partial q_m}{\partial\theta}(y)\Phi_{n-m}(x,y)\mathrm{d}s(y) - \nu(x)\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n}\int_\Gamma \nu(y)q_m(y)\times$$

$$\times\left[\gamma^2\Phi_{n-m}(x,y) + \alpha_0\Phi_{n-m-1}(x,y) + \alpha_1\Phi_{n-m-2}(x,y)\right]\mathrm{d}s(y),$$

де $x \in \Gamma$, $\theta(x)$ – одиничний вектор дотичної до кривої Γ і $\Phi_{-2}(x,y) = \Phi_{-1}(x,y) = 0$. Отже, ми можемо звести послідовність задач (5)–(7) до відповідних граничних інтегральних рівнянь.

Теорема 3. *Потенціал простого шару U_n є розв'язком системи задач (5)–(7), якщо його густини задовольняють систему інтегральних рівнянь другого роду*

$$q_n(x) - \frac{1}{\pi}\int_\Gamma q_n(y)\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\Phi_0(x,y)\mathbf{d}s(y) = Q_n(x), \quad x \in \Gamma \tag{10}$$

з правими частинами

$$Q_n(x) := F_n(x) - \sum_{m=0}^{n-1} q_m(x) + \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\int_\Gamma q_m(y)\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\Phi_{n-m}(x,y)\mathbf{d}s(y)$$

для $n = 0,\ldots,N_t - 2$. Потенціал подвійного шару V_n є розв'язком системи задач (5)–(7), якщо його густини задовольняють систему гіперсингулярних рівнянь першого роду

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\theta(x)}\int_\Gamma \frac{\partial q_n}{\partial\theta}(y)\Phi_0(x,y)\mathbf{d}s(y) -$$

$$-\frac{\gamma^2}{\pi}\nu(x)\int_\Gamma \nu(y)q_n(y)\Phi_0(x,y)\mathbf{d}s(y) = G_n(x), \tag{11}$$

де $x \in \Gamma$ *і*

$$G_n(x) := F_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta(x)}\int_\Gamma \frac{\partial q_m}{\partial\theta}(y)\Phi_{n-m}(x,y)\mathbf{d}s(y) +$$

$$+\nu(x)\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\int_\Gamma \nu(y)q_m(y)\left[\gamma^2\Phi_{n-m}(x,y) +\right.$$

$$\left.+\alpha_0\Phi_{n-m-1}(x,y)+\alpha_1\Phi_{n-m-2}(x,y)\right]\mathrm{d}s(y)\,.$$

За допомогою теорії Рісса–Шаудера можна довести коректність отриманих інтегральних рівнянь у відповідних функціональних просторах. Зокрема, у випадку банахових просторів справедливим є твердження

Теорема 4. Для кожних $F_n \in \mathbf{C}(\Gamma)$ існує єдиний розв'язок системи (10) $q_n \in \mathbf{C}(\Gamma)$. Для кожних F_n з простору Гельдера $C^{0,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$ існує єдиний розв'язок системи (11) q_n в $C^{1,\alpha}(\Gamma)$.

Комбінуючи теорему 1 і теорему 4, отримаємо наступний результат про існування і єдиність розв'язків наших диференціальних задач.

Теорема 5. *Система (5)–(7) має єдиний розв'язок.*

3. Повна дискретизація. Коротко опишемо процедуру наближеного розв'язування системи інтегральних рівнянь першого роду (11). Нехай крива Γ має параметричне представлення

$$\Gamma := \{x(s) = (x_1(s), x_2(s)) | 0 \le s \le 2\pi\},$$

де $x{:}\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ є тричі неперервно диференційованою 2π – періодичною функцією з $|x'(s)| > 0$ для всіх s. З врахуванням цього і після виділення особливостей система (11) зводиться до такого параметричного вигляду

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left\{\cot\frac{\sigma - s}{2}\psi_n'(\sigma) - \left[H_0^1(s,\sigma)\ln\left(4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+H_0^2(s,\sigma)\right]\psi_n(\sigma)\right\}\mathrm{d}\sigma = G_n(s) \tag{12}$$

з правими частинами

$$G_n(s) = g_n(s) - \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\int_0^{2\pi}\varphi_m(\sigma)\times$$

$$\times\left[H_{n-m}^1(s,\sigma)\ln\left(4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right) + H_{n-m}^2(s,\sigma)\right]\mathrm{d}\sigma\,, \tag{13}$$

де $0 \le s \le 2\pi$, $n = 0,...,N_t - 2$, $\varphi_n(s) := q_n(x(s))$, $g_n(s) := F_n(x(s))|x'(s)|$ і $\psi_n(s) := \sum_{m=0}^{n} \varphi_m(s)$ і ядра H_n^0 H_n^1 є тричі неперервно диференційованими функціями обох аргументів.

Для чисельного розв'язування системи (12) скористаємось методом квадратур, що грунтується на тригонометричній інтерполяції [4, 6]. З цією метою на розбитті $\left\{s_j := \frac{j\pi}{M}, j = 0,1,...,2M-1\right\}$ розглянемо три квадратурні формули

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\mathrm{d}\sigma \approx \frac{1}{2M}\sum_{j=0}^{2M-1} f(s_j),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(\sigma)\cot\frac{\sigma - s_k}{2}\mathrm{d}\sigma \approx \sum_{j=0}^{2M-1} T_{|j-k|} f(s_j) \quad \text{і}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\ln\left(4\sin^2\frac{s_k - \sigma}{2}\right)\mathrm{d}\sigma \approx \sum_{j=0}^{2M-1} R_{|j-k|} f(s_j),$$

де R_j і T_j – відомі коефіцієнти [4, 6]. Ці формули отримані шляхом заміни підінтегральної функції f її тригонометричним інтерполяційним многочленом і подальшого точного інтегрування. Застосовуючи виписані квадратурні правила до відповідних інтегралів у (12) та (13) і розглядаючи отримані апроксимаційні рівняння в точках колокації s_k, приходимо до послідовності систем рівнянь

$$\sum_{j=0}^{2M-1} \psi_{n,M}(s_j)\left\{T_{|j-k|} + R_{|j-k|}H_0^1(s_k, s_j) + \frac{1}{2M}H_0^2(s_k, s_j)\right\} = G_{n,M}(s_k)$$

для $k = 0,...,2M-1$ і $n = 0,...,N_t - 2$ з правими частинами

$$G_{n,M}(s_k) = g_n(s_k) - \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2M-1}\left[R_{|j-k|}H_{n-m}^1(s_k, s_j) + \frac{1}{2M}H_{n-m}^2(s_k, s_j)\right]\varphi_{n,M}(s_j)$$

.

Аналіз збіжності та похибки цього методу базується на його інтерпретації як повністю дискретного проекційного методу в просторах Гельдера [4, 6].

Проведені чисельні експерименти для нестаціонарних задач у випадку аналітичних граничних кривих та граничних функцій підтверджують очікувану лінійну збіжність пропонованого методу стосовно часової дискретизації та експоненціальну збіжність відносно дискретизації інтегральних рівнянь.

1. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: Издательство технико–теоритической литературы, 1953. 2. Пасічник Р.М., Хапко Р.С. Поєднання методів сіток та інтегральних рівнянь при розв'язуванні задач типу Діріхле для хвильового рівняння //Вісн. Львів. ун–ту. Сер. мех.–мат. 1995. Вип. 41. С. 94–98. 3 Хапко Р.С., Чубей О.В. Численное решение краевых задач для телеграфного уравнения методом гиперплоскостей и интегральных уравнений. Львов. ун–т, Львов, 1991.– 8 с. Деп. в УкрНИИНТИ 04.06.91. № 815–Ук. 4. Chapko R., Kress R. On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind //In: R.P.Agarwal, Ed., Contributions in Numerical Mathematics (World Scientific, Singapore, 1993). P. 127–140. 5. Chapko R., Kress R. Rothe's method for heat equation and boundary integral equations //J. Integ. Equat. and Appl. 9. 1997. P. 47–69. 6. Kress R. On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory //J. Comput. Appl. Math. 61. 1995. P. 345–360.

УДК 517.51

Г.Г. Цегелик, Н.В. Федчишин

АПАРАТ НЕКЛАСИЧНИХ МАЖОРАНТ І ДІАГРАМ НЬЮТОНА ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ, ЗАДАНИХ ТАБЛИЧНО

Теорія некласичних мажорант і діаграм Ньютона бере свій початок з праць [1,2], в яких вперше введено поняття некласичної мажоранти і діаграми Ньютона нескінченної числової послідовності, встановлені необхідні і достатні умови існування діаграми Ньютона, вивчені властивості мажоранти Ньютона. Як застосування запропоновано підхід до побудови класу наближених методів пошуку інформації в файлах баз даних. В [3,4] побудований апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій дійсної змінної, заданих на проміжку і заданих таблично. В [5] апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона використаний для побудови нової квадратурної формули. В даній роботі розглядається побудова апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично.