то

$$\max_{(x,y)\in Q} M_f(x,y) = M_f(x_k, y_l).$$

Нами вивчені властивості мажоранти і діаграми Ньютона, виведені співвідношення для знаходження значень $M_f(x,y)$ в точках (x_i, y_j) через значення a_{ij}, а також як застосування побудована нова кубатурна формула для наближеного обчислення визначених інтегралів.

1. Цегелик Г.Г. Мажоранты и диаграммы Ньютона числовых последовательностей и их приложение к поиску информации в базах данных.-Киев. 1985, 12с.-(Препр./АН УССР, Ин-т кибернетики им.В.М.Глушкова; №85-49). 2. Цегелик Г.Г. Организация и поиск информации в базах данных. Львов: Вища шк., 1987. 176с. 3. Цегелик Г.Г. Мажоранты и диаграммы Ньютона функций действительной переменной, заданных в промежутке //Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. №6. С. 18-19. 4. Цегелик Г.Г. Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение //Укр. мат. журн. 1989. №9, Т.41. С. 1273-1276. 5. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. Використання некласичного апарату мажорант і діаграм Ньютона функцій для побудови нової квадратурної формули //Вісн. Львів. ун-ту. Сер.мех.-мат. Вип.41. 1995. С.108-111.

УДК 519.6

С.М. Шахно, П.М. Недашковський

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДІВ РОЗВ`ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ПРО НАЙМЕНШІ КВАДРАТИ

Нелінійні задачі про найменші квадрати виникають у багатьох практичних застосуваннях: при оцінюванні параметрів фізичних процесів за результатами вимірювань, у керуванні різними об`єктами та процесами, при оцінюванні параметрів і перевірці гіпотез у математичній статистиці тощо.

Чисельному розв`язанню нелінійної задачі про найменші квадрати присвячено багато наукових праць. Відзначимо тут монографії [1,2]. Як основні і найбільш ефективні розглядаються методи Гауса-Ньютона та метод Левенберга-Маркварта. На базі цих методів побудовано і досліджено їхні модифікації, які покращують певні характеристики базових методів [3]. Також відомі програмні реалізації чисельних методів розв`язання нелінійної задачі про найменші квадрати. Зокрема, в пакеті MATLAB реалізовано методи Гауса-Ньютона та Левенберга-Маркварта. Однак такі пакети програм досить дорогі і нам часто недоступні. Тому нами розроблений комплекс програм, в якому здійснено реалізацію згаданих вище методів Гауса-Ньютона та Левенберга-Маркварта, а також низку їхніх модифікацій, описаних в [3].

В пакеті програм NELINSQR розглядаються методи розв`язування систем нелінійних рівнянь як в традиційній постановці, так і в сенсі найменших квадратів:

1. Знайти корінь x_* функції $F(x)$, де $F: R^n \to R^n$ нелінійна по x функція, починаючи з x_0, використовуючи один з наявного набору алгоритмів.

2. Знайти $$\min_{x \in R^n} f(x) = \frac{1}{2} F(x)^T F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} F_i(x)^2,$$

де $m \geq n$, функція нев`язки $F: R^n \to R^m$ нелінійна по x, а через $F_i(x)$ позначена i-та компонента функції $F(x)$.

Враховуючи, що при $m=n$ нелінійна задача про найменші квадрати включає в себе як частковий випадок задачу розв`язування систем нелінійних рівнянь, основна увага при реалізації приділялась розв`язуванню задачі 2. При цьому за основу взято модульну систему алгоритмів, наведену в [1].

Для розв`язування задачі 1 реалізовано метод Ньютона у вигляді [1]

$$x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1} F(x_k), \ k = 0,1,... \tag{1}$$

Для задачі 2 реалізовано наступні методи:

1. Метод Гауса-Ньютона [1]

$$x_{k+1} = x_k - [J(x_k)^T J(x_k)]^{-1} J(x_k)^T F(x_k), \ k = 0,1,... \tag{2}$$

2. Узагальнений метод Гауса-Ньютона [1]

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k [J(x_k)^T J(x_k)]^{-1} J(x_k)^T F(x_k), \ k = 0,1,... \tag{3}$$

3. Модифікований метод Гауса-Ньютона [3]

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - [J(\bar{x}_k)^T J(\bar{x}_k)]^{-1} J(\bar{x}_k)^T F(x_k), \\ \bar{x}_k &= (1-\mu)x_k + \mu\varphi(x_k), \ 0 \leq \mu \leq 1, \quad k = 0,1,... \end{aligned} \tag{4}$$

де $\varphi: F^n \to F^n$ – деякий допоміжний оператор, для якого $x_* = \varphi(x_*)$

4. Модифікований метод Левенберга-Маркварта [3]

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k [J(\bar{x}_k)^T J(\bar{x}_k) + \gamma_k I]^{-1} J(\bar{x}_k)^T F(x_k), k = 0,1,... \quad (5)$$

де $\gamma_k = \beta \left\| J(\bar{x}_k)^T F(x_k) \right\|$, $\beta > 0$, $\bar{x}_k$ – визначено в (4).

5. Різницеві аналоги методу Гауса-Ньютона [3]

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k [F(2x_k - x_{k-1}, x_{k-1})^T F(2x_k - x_{k-1}, x_{k-1})]^{-1} F(2x_k - x_{k-1}, x_{k-1})^T F(x_k^{\cdot}); (6)$$

та

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k [F(x_k, x_{k-1})^T F(x_k, x_{k-1})]^{-1} F(x_k, x_{k-1})^T F(x_k), \quad k = 1,2,... \quad (7)$$

де $F(u,v)$ - поділена різниця функції $F(x)$, обчислена за вузлами u та v. Для вибору кроку α_k використовувалась стратегія лінійного пошуку.

Для методів (1)-(3) передбачено можливість задання похідних аналітично, можливе обчислення програмою за скінченними різницями. Також передбачено масштабування векторів змінних та функції у випадку сильної розбіжності за величиною їхніх компонент.

Програма NELINSQR написана на мові Delphi 3.0 Client-Server Suite для застосування під оболонками Windows 95, Windows 98, Windows NT і є розвитком програми NELIN_R, описаної в [3].

Програма NELINSQR не висуває ніяких специфічних вимог до апаратного забезпечення. У програмі передбачено певну кількість регулюючих параметрів. Ми можемо встановити кількість знаків після коми в обчисленнях, обмежуючу кількість ітерацій (при перевищенні якої процес вважається розбіжним), певні регулюючі параметри для самих методів.

У програмі передбачено Help. До візуальних компонентів підключені підказки - Hint. Також є кілька демонстраційних файлів.

До переваг програми слід віднести можливість добудови. Мається на увазі підключення тестових задач та інших методів. Щоправда, це вимагає певної кваліфікації від користувача і хоча б мінімального знання Delphi.

1. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной минимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир. 1998. 440 с. 2. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир. 1975. 558 с. 3. Шахно С.М. Методи розв`язування нелінійної задачі про найменші квадрати. Тексти лекцій. Львів, 1998. 40 с.`