УДК 539.377:536.12

Й. Г. Шипка, Р. Й. Шипка

ОПТИМІЗАЦІЯ КЕРУВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ТОНКОЇ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ

При дослідженні надійності роботи елементів конструкцій, що перебувають в умовах інтенсивного теплового навантаження, актуальними є задачі оптимального керування розподілом температурних деформацій та напружень.

Розв'язування задач оптимального керування температурними напруженнями, деформаціями або переміщеннями може бути зведене до обернених задач теплопровідності, в яких за заданим розподілом напружень, деформацій або переміщень визначається температурне поле тіла.

В межах квазістатичної задачі термопружності розглядається математична постановка та методика розв'язку задачі оптимального керування осесиметричними напруженнями вільно опертої по контуру тонкої круглої пластинки.

Нестаціонарне осесиметричне температурне поле пластинки при наявності внутрішніх температурних джерел описується рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial T(\rho,x,\tau)}{\partial \tau}=\Delta T(\rho,x,\tau)+F(\rho,x,\tau) \quad (\rho,x)\in D\,,\tau>0 \tag{1}$$

з граничними

$$\left.\frac{\partial T(\rho,x,\tau)}{\partial \tau}\right|_{\rho=1}=0 \quad x\in[0,1],\tau>0; \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial T(\rho,x,\tau)}{\partial \tau}(-1)^i H_i\big(T(\rho,x,\tau)-t_i(\rho,\tau)\big)\right|_{x=l_i}=0\,,\rho\in[0,1]\,,\tau>0\,,$$

$$l_i=\begin{cases}0, i=1\\ 1, i=2\end{cases} \tag{3}$$

та початковою

$$T(\rho,x,\tau)\big|_{\tau=0}=f(\rho,x)\,,\ \ (\rho,x)\in\overline{D} \tag{4}$$

умовами.

$D = \{(\rho,x) | \rho \in [0,1), x \in (0,1)\}$; $\overline{D} = \{(\rho,x) | \rho \in [0,1], x \in [0,1]\}$ – область, яку займає пластинка.

Нехай теплове навантаження на граничній поверхні пластинки $x = 0$ є відомою функцією. Задача оптимального керування напруженнями пластинки полягає у визначенні в просторі $C(G),(G = \{(\rho,\tau) \in [0,1] \times [0,\tau_0]\},\tau_0 = \text{const})$ такого керування $u(\rho,x,\tau)$ – температури нагрівального середовища $t_2(\rho,t)$ або теплового потоку на поверхні $x = 1$, яке забезпечує мінімум рівномірного відхилення напружень $\sigma(\rho,x,\tau;)$ від деякого заданого розподілу $\varphi_*(\rho,x,\tau)$, тобто

$$\min_u I(u), I(u) = \max_{(\rho,x,\tau)} |\sigma(\rho,x,\tau;u) - \varphi_*(\rho,x,\tau)|, (\rho,x,\tau) \in G. \qquad (5)$$

Для знаходження розв'язку поставленої задачі керування використовується метод оберненої задачі термопружності. Припускається, що існує таке керування $u \in C(G)$, на якому функціонал $\min\limits_u I(u)$ досягає точної нижньої грані, що еквівалентно рівності

$$\sigma(\rho,x,\tau;u) = \varphi_*(\rho,x,\tau), (\rho,x,\tau) \in G, \qquad (6)$$

і будується розв'язок $T(\rho,x,\tau)$ некласичної задачі теплопровідності (1)-(4), (6) при $i = 1$. По знайденому розподілу температури шукане керування визначається з умови (3) при $i = 2$.

Використовуючи відомі методи інтегрування рівнянь термопружності, умову (6) можна записати у вигляді

$$2(1-\nu)\int_0^1\int_0^1 \xi\big(1 + 3(1-2x)(1-2\eta)\big)T(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta +$$

$$+(1+\nu)\int_0^1 \big(1 + 3(1-2x)(1-2\eta)\big)T(\rho,\eta,\tau)d\eta - 2T(\rho,x,\tau) = \varphi(\rho,x,\tau). \qquad (7)$$

Як компонента тензора напружень береться сума радіальних та кутових напружень: $\sigma(\rho,x,\tau) = \dfrac{(1-\nu)}{\alpha_T E}\big(\sigma_{rr}(\rho,x,\tau) + \sigma_{\varphi\varphi}(\rho,x,\tau)\big)$, де E,ν,α_T – відповідно модуль Юнга, коефіцієнти Пуасона та лінійного розширення.

Таким чином, вихідна задача керування напруженнями пластинки (5) зводиться до некласичної задачі (1)-(4), (7) при $i = 1$, в якій по заданому розподілу температурних напружень визначається температурне поле пластинки, тобто до оберненої задачі термопружності.

Застосовуючи до задачі (1)-(4), (7) послідовно скінченне перетворення Ханкеля та перетворення Лапласа, в просторі зображень отримаємо

$$\frac{\partial^2 T_n^L(x,s)}{\partial x^2} - \mu_n^2 T_n^L(x,s) = -\Phi_n(x,s); \tag{8}$$

$$\frac{\partial T_n^L(0,s)}{\partial x} - H_1 T_n^L(0,s) = -H_1 t_{1n}^L(s); \tag{9}$$

$$a_n \int_0^1 \bigl(1 + 3(1-2x)(1-2\eta)\bigr) T_n^L(\eta,s)\,d\eta - T_n^L(x,s) = \varphi_n^L(x,s), \tag{10}$$

де $\Phi_n(x,s) = (f_n(x) + F_n^L(x,s))/k^2$, $a_n = \begin{cases} 2 & n=0 \\ (1+\nu) & n>0 \end{cases}$; $T_n^L(x,s)$, $t_{1n}^L(s)$, $\varphi_n^L(x,s)$ – зображення по Лапласу функцій $T_n(x,\tau)$, $t_{1n}(x,\tau)$, $\varphi_n(x,\tau)$, які в свою чергу є зображеннями по Ханкелю функцій $T(\rho,x,\tau)$, $t_1(\rho,\tau)$, $\varphi(\rho,x,\tau)$; s – параметр перетворення Лапласа, $\mu_n^2 = (\gamma_n^2 + s)/k^2$, γ_n – додатні корені характеристичного рівняння $J_1(\gamma) = 0$, $J_1(\gamma)$ – функція Бесселя першого роду першого порядку.

Можна показати, що розв'язок задачі (1)-(4), (9) існує та єдиний при виконанні наступних умов погодження між функціями розподілу напружень $\varphi(\rho,x,\tau)$ та початкового розподілу температури $f(\rho,x)$:

$$\int_0^1 \bigl(1 + 3(1-2x)(1-2\eta)\bigr) f_n(x) \qquad dx = \frac{1}{a_n}(\varphi_n(x,0) + 2f_n(x)),$$

$n = 0,1,2,\ldots$

Розв'язок задачі (8)-(10) можна записати у вигляді $T_n^L(x,s) = \dfrac{P_n(x,s)}{\psi_n(s,x)}$, де $P_n(x,s)$, $\psi_n(x,s)$ – відомі функції. Проаналізувавши поведінку коренів рівняння $\psi_n(x,s) = 0$, можна побудувати розв'язок задачі (8)-(10), а потім, використовуючи зворотні перетворення Лапласа та Ханкеля, побудувати розв'язок вихідної задачі.