УДК 519.64

Н.М. Щербина

ЧИСЕЛЬНО – АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглядається один із можливих методів розв'язування лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. Цей метод в ідейному плані подібний до методу, який детально досліджений у праці [2] і виявився ефективним при розв'язуванні багатьох практичних задач у випадку систем із сталими коефіцієнтами.

Розглянемо математичну модель у вигляді системи n лінійних звичайних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами

$$\frac{d}{dx}z(x) = A(x)z(x) + f(x)\,,\ x \in [0,b]\,, \tag{1}$$

з крайовими умовами, накладеними на функцію $z(x)$ при $x = 0$ та $x = b$ (по $n/2$ на кожному кінці, n – парне).

Тут z – невідомий вектор з компонентами $z_1, z_2, ..., z_n$; $A(x)$ – матриця розміру $n \times n$, компонентами якої є задані неперервні функції $a_{ij}(x)$ ($i,j = 1,2,...,n$) в інтервалі зміни аргументу x; $f(x)$ – вектор–функція з компонентами $f_i(x)$.

Такого типу задачі часто виникають при дослідженні напружено–деформованого стану тонкостінних елементів конструкцій (оболонок, пластин, стержнів), які перебувають під дією різних експлуатаційних навантажень.

При розв'язуванні сформульованої двоточкової лінійної крайової задачі використовуємо прийом зведення її до набору $n+1$ задач Коші

$$\frac{d}{dx}z^{(0)}(x) = A(x)z^{(0)}(x) + f(x)\,,\quad z_i^{(0)}(0) = 0\,,\ i = 1,2,...,n\,; \tag{2}$$

$$\frac{d}{dx}z^{(k)}(x) = A(x)z^{(k)}(x)\,,\ z_i^{(k)}(0) = \begin{cases} 1, i = k, \\ 0, i \neq k, \end{cases}\ (i,k = 1,2,...,n)\,. \tag{3}$$

Розв'язок крайової задачі записується через розв'язки задач (2) – (3) у вигляді

$$z(x) = z^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k z^{(k)}(x) . \tag{4}$$

Сталі C_k визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь, одержаної при задоволенні крайових умов.

Метод знаходження розв'язків задач (2) – (3) базується безпосередньо на обчисленні матриканта. Відзначимо, що при такому підході до побудови розв'язку крайової задачі немає потреби у чисельному розв'язуванні задач Коші, основною проблемою тут є обчислення матриканта G_0^x. У загальному випадку матриці $A(x)$ це є складною і аналітично практично нерозв'язальною задачею. Використовуючи зображення матриканта у вигляді мультиплікативного інтеграла [1], розроблено алгоритм для наближеного обчислення матриканта.

Отже, розв'язок крайової задачі у покомпонентному записі має вигляд

$$z_i(x) = \sum_{i=1}^{n} C_k g_{ik}(x) + \int_0^x \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x,\tau) f_j(\tau) d\tau \quad (i = 1,2,\dots,n),$$

де $g_{ij}(x)$ – елементи матриці G_0^x, $k_{ij}(x,\tau)$ – елементи матриці $K(x,\tau) = G_0^x \left[G_0^\tau\right]^{-1}$.

При $x = 0$ $n/2$ невідомих сталих C_k легко визначаються відразу. Решта сталих C_k знаходимо з наступної системи $n/2$ лінійних алгебраїчних рівнянь, отриманої при задоволенні крайових умов при $x = b$:

$$z_i(b) = z_i^{(0)}(b) + \sum_{k \in J_2} C_k g_{ik}(b) ,$$

де $J_2 = \{1,2,\dots,n\} \setminus J_1$. Через J_1 і J_2 позначені відповідно множини індексів знайдених та ще не визначених сталих C_k.

Таким чином, описаний метод дозволяє одержати наближений розв'язок крайової задачі в аналітичній формі, що є особливо цінним при розв'язуванні контактних задач [2]. Здійснена програмна реалізація методу та апробація на тестових задачах.

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1998.– 552 с.
2. Щербина Н.М. Методи розв'язування контактних задач для пружних анізотропних шаруватих циліндричних оболонок.– Препр. НАН України, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, № 7 – 94, 1994.– 56 с.