

ISSN 0201-758X.

ISSN 0320-6572.

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

СЕРІЯ

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА



ВИПУСК

50

1998

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

**Львівський державний університет імені Івана
Франка**

**ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ**

Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.

Випуск 50

**ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ
ПРИКЛАДНОЇ
МАТЕМАТИКИ**

Львів
Видавництво "Світ"
1998

У Віснику вміщені матеріали Всеукраїнської наукової конференції “Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях” (22-24 вересня 1998 р., м. Львів).

Для наукових працівників, викладачів і студентів старших курсів.

Бібліогр. у кінці статей.

Редакційна колегія. д-р фіз.-мат. наук, проф. Г.А. Шинкаренко (відп. ред.), канд. фіз.-мат. наук, доц. Ю.М. Щербина (відп. секр.), канд. фіз.-мат. наук, доц. М.Я. Бартіш, д-р фіз.-мат. наук, проф. М.М. Войтович, д-р фіз.-мат. наук, проф. Я.Г. Савула, д-р фіз.-мат. наук, проф. проф. Г.Г. Цегелик.

Відповідальний за випуск доц. Ю.М. Щербина.

Адреса редколегії:

290000 Львів, вул. Університетська, 1

Університет, кафедра теорії оптимальних процесів

Тел: 79-47-91

М.Я. Бартіш

**ПРО МЕТОДИ ТИПУ НЬЮТОНА
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ
ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І ЗАДАЧ НА
ЕКСТРЕМУМ**

В обчислювальній практиці, одним із широковживаних методів розв'язування нелінійних функціональних рівнянь

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

де $P(x)$ - оператор, який діє із банахового простору X в банахів простір Y , є метод Ньютона. Мабуть, вперше метод Ньютона для розв'язування функціональних рівнянь був досліджений Л.Канторовичем [1]. Далі число робіт по застосуванню методів типу Ньютона і їх модифікацій постійно зростало і сьогодні налічується десятки, а може й сотні тисяч робіт. У цій галузі певні дослідження проведені і нами. В [2] запропоновано загальну методику побудови методів типу Ньютона, типу Рунге, різницеві методи, а також встановлено зв'язок між методами одного й того ж порядку збіжності. При побудові та дослідженні нових методів значну увагу ми приділяли їх ефективності в сенсі числа обчислень. Той метод кращий, який для знаходження розв'язку задачі потребує менше обчислень (менше часу). Побудовано і досліджено метод з порядком збіжності $1 + \sqrt{2}$ [3]. Пізніше цей метод було розглянуто в працях Лаазонена [4], Вернера [5] та інших авторів. У [6] запропоновано загальну методику побудови певних класів рекурсивних методів і дано рекомендації по вибору кращого методу в сенсі кількості обчислень для розв'язування конкретної задачі (1). В [7] розглянуто нову модифікацію методу Ньютона, яка для відповідних класів задач краща від класичного методу Ньютона. Для запропонованих методів, крім теоретичного дослідження проведено значну роботу по практичній реалізації. Для цього було використано як тестові приклади, так і задачі з реального середовища. Практичні експерименти повністю підтвердили теоретичні результати.

Розглянуті методи з успіхом можна використовувати для розв'язування задач на екстремум. Однак, враховуючи специфіку

таких задач, доцільно розглянути і певні нові модифікації для розв'язування задач типу

$$f(x) \rightarrow \min \quad x \in R^m \quad (2)$$

Для знаходження розв'язку задачі (2) розглянемо алгоритм

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \left[f''(\lambda x_k + (1-\lambda)u_k) \right]^{-1} f'(x_k), \\ \lambda &\in (0,1), \quad k = 0,1,\dots, \end{aligned} \quad (3)$$

де u_k - оператор, який породжує ітераційну формулу порядку

$$1 \leq \tau \leq 2, \quad \text{тобто} \quad \|u_k - x_*\| \leq c \|x_k - x_*\|^\tau, \quad \text{де } x_* - \text{розв'язок (2),}$$

$$c < \infty$$

Теорема. Нехай f сильно опукла функція і виконуються умови

$$1. \quad m \|h\|^2 \leq (f''(x)h, h) \leq M \|h\|^2 \quad \text{для } x \in D, \quad h \in R^n$$

$$0 < m \leq M$$

$$2. \quad \text{Для } x, y \in D, \quad \|f'''(x)\| \leq N_3$$

$$\|f'''(x) - f'''(y)\| \leq N_4 \|x - y\|$$

3. Початкове наближення x_0 вибрано так, що виконується умова

$$h_0 = K_0 \eta_0 < 1,$$

$$\begin{aligned} \text{де } K &= \frac{1}{m} \left\{ N_3 \left[\left| \lambda - \frac{1}{2} \right| + (1-\lambda) C \eta_0^{\tau-1} \right] + \frac{1}{2} N_4 \left((\lambda + (1-\lambda) C \eta_0^{\tau-1})^2 + \frac{1}{3} \eta_0 \right) \right\} \\ \|f'(x_0)\| &\leq m \eta_0. \end{aligned}$$

Тоді послідовність $\{x_k\}$, визначена по (3), збігається до розв'язку задачі (2) і справджується оцінка

$$\|x_k - x_*\| \leq \frac{1}{K} h_0^{2^k-1} \eta_0.$$

Таким чином, послідовність $\{x_k\}$, визначена по (3), має квадратичну збіжність. Якщо у формулі (3) взяти $\lambda = \frac{1}{2}$, тоді при виконанні відповідних умов послідовність $\{x_k\}$, визначена з (3) має збіжність не нижче $1+\tau$, при цьому

$$\|x_k - x_*\| \leq \frac{1}{K_1} h_0^{(\tau+1)^k-1} \eta_0,$$

$$\text{де } K_1 = \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{2} N_3 C + \frac{1}{2} N_4 \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} C \eta_0^{\tau-1} \right)^2 + \frac{1}{3} \right) \eta_0^{2-\tau} \right\}.$$

На практиці ефективним виявився алгоритм (3) у випадку $\lambda = \frac{1}{2}$ та

$$u_k = x_k - \alpha_k f'(x_k), \quad (4)$$

де $\alpha_k = \arg \min f(x_k - \alpha f'(x_k))$.

У даному випадку послідовність $\{x_k\}$, отримана по (3), має хоч і квадратичний порядок збіжності, однак для даної послідовності і послідовності $\{y_k\}$, отриманої по класичному методу Ньютона ($\lambda=1$), дійсне співвідношення

$$\frac{\|x_k - x_*\|}{\|y_k - x_*\|} \leq Cq^{2^k}, \text{ де } C < \infty, q < 1, \text{ хоча і близьке до } 1.$$

Як показала практика, запропонований алгоритм (3) має певні переваги перед методом Ньютона, однак він, як і метод Ньютона, не завжди ефективний при мінімізації функцій типу яру, тому нами запропонований алгоритм

$$u_k = x_k - \alpha_k f'(x_k);$$

$$v_k = x_k - \beta_k \left[f''(\lambda x_k + (1-\lambda)u_k) \right]^{-1} f'(x_k);$$

$$x_{k+1} = \frac{v_k - u_k}{2} + \text{sign}(f(u_k) - f(v_k)) \left[\frac{u_k - v_k}{2} + \gamma_k (v_k - u_k) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots ($$

5)

Для визначення параметрів $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ можна використовувати один із відомих алгоритмів визначення довжини кроку в градієнтному методі.

Для практичної реалізації було вибрано тестові приклади [8]: функція Розенброка, функція Пауелла, різницевий аналог задачі про брахістохрону.

При цьому виявилось, що із ростом розмірності зростає ефективність методу (5). Наприклад, при $n > 12$ для функцій Розенброка "працював" лише метод (5). Аналогічну картину мали і для інших функцій.

1. Канторович Л.В. О методе Ньютона. // Тр. Мат. ин-та им. Стеклова. 1949, Т.28, С. 104-144. 2. Бартиш М.Я. О методах типа Ньютона. // Сиб. мат. журн., 1973, Т.14, № 4. 3. Бартиш М.Я. Про один ітераційний метод розв'язку функціональних рівнянь. // Доп. АН УРСР,

- 1968, T.30 № 5, С.387-391. 4. Laasonen M.P. Ein überquadratisch convergen der iterativer Algorithmus. // Ann Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 1969. P.450.
5. Werner W. Über ein iteratives Verfahren der Ordnung $1 + \sqrt{2}$ zur Nullstellenbestimmung. // ZAMM. 1979. -59., №3. -S. 86-87.
6. Бартиш М.Я., Щербина Ю.Н. Итерационные формулы, полученные с помощью рекурсий. // Мат. сб. К.: Наукова думка, 1976. С. 50-53.
7. Бартиш М.Я., Шахно С.М. О методе Ньютона с ускоренной сходимостью. // Вестн. Киев. ун-та "Моделирование и оптимизация сложных систем." 1987, Вып.6, С. 62-66.
8. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. // М.: Мир, 1975.

УДК 519.6:517.958

І.Є. Бернакевич

НЕСТАЦІОНАРНІ ПРОЦЕСИ В СИСТЕМІ «ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА - ІДЕАЛЬНА РІДИНА»

Розглядається осесиметрична задача поширення хвиль в циліндричній оболонці, заповненій рідиною, які зумовлені імпульсним навантаженням на торець оболонки. Поведінка оболонки описується лінійними співвідношеннями типу Тимошенка [5,6], для моделювання рідини використовується акустичне наближення [4]. Для розв'язування зв'язаної задачі використовується проекційно-сіткова схема, яка передбачає використання кусково-квадратичних апроксимацій методу скінченних елементів по просторових змінних та однокрокової рекурентної схеми інтегрування в часі. З огляду на праці [1-3], в яких здійснено варіаційну постановку задачі взаємодії оболонки обертання з обмеженим об'ємом рідини, побудову проекційно-сіткової схеми та її математичне обґрунтування, дана стаття конкретизує отримані результати для випадку циліндричної оболонки. Крім цього, здійснюється порівняльний аналіз результатів, отриманих для незаповненої оболонки та оболонки, заповненої рідиною.

Варіаційна задача. Розглянемо циліндричну оболонку постійної товщини h , радіуса R , висоти L , верхній край якої шарнірно опертий, а нижній - жорстко закріплений у масивній плиті. Нехай оболонка повністю заповнена нев'язкою стисливою рідиною.

Будемо розглядати нестационарні процеси в системі «оболонка-рідина», обумовлені імпульсним навантаженням на торець оболонки.

Варіаційна задача акустичної взаємодії формулюється наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \psi_0 \in \Phi, \psi_1 \in H, s_0 \in S, s_1 \in G, l \in L^2(0, T; \Phi'), \lambda \in L^2(0, T; S'); \\ \text{знайти пару } p = (\psi, s) \in L^2(0, T; \Phi \times S) \text{ таку, що} \\ m(\psi''(t), \varphi) + a(\psi(t), \varphi) - b(s'(t), \varphi) = \langle l(t), \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi \\ \mu(s''(t), g) + \eta(s(t), g) + b(g, \psi'(t)) = \langle \lambda(t), g \rangle \quad \forall g = (v, y, v) \in S. \\ m(\psi'(0) - \psi_1, \varphi) = 0, \quad \mu(s'(0) - s_1, g) = 0 \\ a(\psi(0) - \psi_0, \varphi) = 0, \quad \eta(s(0) - s_0, g) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

Тут s - вектор пружних зміщень оболонки, ψ - потенціал швидкостей рідини.

Використані лінійні та білінійні форми визначаються формулами

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\psi, \varphi) = \int_{\Omega_F} \frac{1}{\rho_0 c^2} \psi \varphi r dr dz, \quad \mu(s, g) = \int_0^L \left(\rho h u v + \rho h w y + \frac{\rho h^3}{12} \gamma \xi \right) R dz, \\ a(\psi, \varphi) = \int_{\Omega_F} \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) r dr dz \quad \forall \psi, \varphi \in \Phi, \quad \forall s, g \in S \\ \eta(s, g) = \int_0^L \left\{ \sum_{j=1}^2 [N_j(s) \varepsilon_j(g) + M_j(s) \kappa_j(g)] + N_{13}(s) \varepsilon_{13}(g) \right\} R dz \\ b(s, \varphi) = \int_0^L w \varphi R dz, \quad \langle l, \varphi \rangle = \int_{\Omega_F} f_0 \varphi r dr dz + \int_{\Gamma_F^V} v_n \varphi R d\Gamma_F^V, \quad \langle \lambda, g \rangle = R \tilde{N}_1 \end{array} \right. \quad (2)$$

де

$$V = \{v \in H^1((0, L)) \mid v(0) = 0\}, \quad Y = \{y \in H^1((0, L)) \mid y(0) = y(L) = 0\}, \quad S = V \times Y \times V,$$

$G = [L^2((0, L))]^3$, $\Phi = \{\varphi \in H^1(\Omega_F)\}$, $H = L^2(\Omega_F)$ - простори допустимих функцій.

Тут і далі вжиті позначення запозичені з [1-3].

Відзначимо, що варіаційна задача (1) коректно поставлена, тобто існує єдиний розв'язок (s, φ) , який неперервно залежить від початкових даних задачі (1). Детальне доведення цього факту наведено в [1, 7].

Проекційно-сіткова схема. В основу чисельної процедури розв'язування варіаційної задачі (1) покладено проекційно-сіткову схему, перший крок якої передбачає напівдискретизацію Гальоркіна за просторовими змінними з використанням скінченноелементних апроксимацій. Для дискретизації варіаційної задачі в часі використовується однокрокова рекурентна схема [2,3,7] з параметрами $\Delta t, \beta, \theta$ та квадратичною апроксимацією розв'язку на кожному кроці інтегрування. Дана схема дає змогу точно задовольнити початкові умови варіаційної задачі та виконувати інтегрування зі змінним кроком у часі. Використання матричних позначень допускає наступне алгебраїчне подання рекурентної схеми:

Задано $\Delta t, \beta, \theta = \text{const} > 0$, $\{\Psi^j\}, \{\Phi^j\} \subset \mathbb{R}^K$ та $\{S^j\}, \{G^j\} \subset \mathbb{R}^N$.

Знайти $\{\Psi^{j+1}\}, \{\Phi^{j+1}\} \subset \mathbb{R}^K$ та $\{S^{j+1}\}, \{G^{j+1}\} \subset \mathbb{R}^N$ такі, що

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_F + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta \mathbf{A}_F & -\frac{1}{2} \Delta t \mathbf{B} \\ \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{B}^T & \mathbf{M}_S + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta \mathbf{A}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^{j+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{G}^{j+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{A}_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^j \\ \mathbf{S}^j \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{2} \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{L}_j \\ \mathbf{A}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_F + \frac{1}{2} \Delta t^2 (\beta - \theta) \mathbf{A}_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_S + \frac{1}{2} \Delta t^2 (\beta - \theta) \mathbf{A}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^j \\ \mathbf{G}^j \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} \Psi^{j+1} \\ \mathbf{S}^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi^j \\ \mathbf{S}^j \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} \Phi^{j+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{G}^{j+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Phi^{j+1} \\ \mathbf{G}^{j+1} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \Phi^{j+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{G}^{j+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi^j \\ \mathbf{G}^j \end{bmatrix} \quad j = 0, 1, \dots, N_T \end{aligned} \quad (3)$$

Побудова (3) передбачає, що процедура Гальоркіна використовує базиси $\{\varphi_i\}_{i=1}^K, \{g_j\}_{j=1}^N$ підпросторів $\Phi_h \subset \Phi$, $\dim \Phi_h = K$ та $S_h \subset S$, $\dim S_h = N$ відповідно, а інтегрування в часі виконується з кроком Δt , $N_T \Delta t = T$. Тоді наближений розв'язок (1) визначається з формули

$$(\psi_h(t_m), s_h(t_m)) = \left(\sum_{i=1}^K \Psi_i^m \varphi_i, \sum_{j=1}^N S_j^m g_j \right) \quad (4)$$

За типових для методу скінченних елементів припущень відносно властивостей щільності просторів апроксимацій Φ_h та S_h доведено [2,3] збіжність напівдискретних апроксимацій Гальоркіна

та побудовано апріорні оцінки їх швидкості збіжності. В [2,7] показано, що вибір параметрів β, θ рекурентної схеми з умови $\beta \geq \theta > 1/2$ забезпечує безумовну відносно вибору кроку інтегрування Δt стійкість рекурентної схеми (3). Крім цього, отримано оцінки швидкості збіжності послідовності наближених розв'язків $(\psi_{h\Delta t}, s_{h\Delta t})$ до розв'язку варіаційної задачі (1).

Чисельний приклад. Обчислення виконано для ізотропної алюмінієвої оболонки ($E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\rho = 2.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\nu = 0.3$) наступних геометричних розмірів: $R = 1.5 \text{ м}$, $L = 3 \text{ м}$, $h = 0.03 \text{ м}$. Розрахунки проведено для випадку заповнення оболонки водою ($\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c = 1500 \text{ м/с}^2$). Нестационарні процеси в системі досліджувались для випадку, коли прикладене поздовжнє зусилля задавалось у вигляді імпульсу $\tilde{N}_1 = t/T_1 - 1$, $0 < t \leq T_1$, де T_1 - час дії навантаження.

Дослідження виявило, що наявність рідини в оболонці при даному типі навантаження практично не впливає на її тангенціальні зміщення. При цьому в незаповненій оболонці спостерігається незначний залишковий ефект тангенціального зміщення, який дедалі більше проявляється з плином часу. Наявність ж рідини гасить цей процес. Що стосується прогинів оболонки, то наявність рідини суттєво впливає на їх форму та амплітуду. Прогини оболонки заповненої рідиною носять періодичний характер і їх амплітуда вдесятеро менша відповідних значень для незаповненої оболонки.

Навантаження такого типу на оболонку викликає підвищення тиску в рідині, фронт якого поширюється в двох напрямках: вздовж меридіана оболонки зі швидкістю поздовжньої хвилі в матеріалі оболонки і в напрямку осі симетрії зі швидкістю звуку в рідині. Характерним є утворення області від'ємного тиску при досягненні хвилею осі симетрії.

Проведено також аналіз енергетичних характеристик процесу деформування циліндричної оболонки, заповненої рідиною, який показав відсутність втрат енергії. Наявний лише перерозподіл між кінетичною та потенціальною енергіями, який відбувається в моменти досягнення пружною хвилею жорстко закріпленого та шарнірно опертого країв циліндричної оболонки.

І. Бернакевич І.Є., Шинкаренко Г.А. Чисельне моделювання акустичної взаємодії оболонок з рідиною. І. Формулювання і розв'язуваність варіаційних задач// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип. 41.- С. 7-13. 2. Бернакевич І.Є., Шинкаренко Г.А. Чисельне моделювання акустичної взаємодії оболонок з рідиною. ІІ.

Проекційно-сіткові апроксимації та їхня збіжність// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип. 42.- С. 12-16. 3. Бернакевич І.Є. Чисельне дослідження початково-крайових задач акустичної взаємодії рідини з тонкостінними конструкціями: Автореф. Дис. ... канд. фіз.-мат. наук.-Львів, 1997.-16 с. 4. Динамика тел, взаимодействующих со средой/ Гузъ А.Н., Маркуш Ш., Пуст Л.; К.: Наук. думка, 1991.-392 с. 5. Пелех Б.Л. Обобщенная теория оболочек. - Львов: Вища школа, 1978. - 159 с. 6. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. -Рига: Зинатне, 1988. - 284 с. 7. Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач.- Київ: НМКВО, 1991.-88 с

УДК 519.689

М.В. Білик, В.М. Горлач, І.І. Трескот

ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ «ФАКУЛЬТЕТ»

Протягом кількох останніх років у світі спостерігається бурхливий розвиток мережевих технологій. Особливе місце посідає глобальна мережа Internet та її основний компонент - World Wide Web, стрімкий ріст яких зумовив розробку ведучими виробниками програмного забезпечення нових інструментальних засобів для побудови корпоративних інформаційних систем.

Базована на принципах архітектури "клієнт-сервер" та розподіленої обробки інформації технологія Intranet передбачає наявність в корпоративній мережі Web-серверів, доступ до яких з робочих станцій здійснюється за допомогою Web-браузерів.

Інформаційна система "Факультет" проектується на прикладі структури факультету прикладної математики та інформатики Львівського державного університету ім. І.Франка. Розроблено структуру інформації та дерево каталогів для її зберігання. Санкціонований доступ забезпечується засобами операційної системи сервера. Довідкова текстова інформація щодо історії створення, спеціалізації, переліку та робочих програм основних та спеціальних курсів, наукових напрямків тощо зберігається у вигляді статичних HTML-документів та згрупована за основними структурними підрозділами: деканат, кафедри, лабораторії. Окремо зберігається інформація загального характеру (наприклад,

електронна версія "Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична" в HTML-форматі).

Частина інформації, зокрема персональні дані викладачів, аспірантів, студентів та пов'язані з ними дані щодо публікацій, успішності тощо, зберігається у вигляді баз даних. Робота з базами даних здійснюється на основі інтерфейсу CGI (Common Gateway Interface) та засобів BDE (Borland Database Engine). Програмне забезпечення CGI-застосувань реалізовано в середовищі візуального програмування Delphi 3.0, яке дозволяє створювати програми-сервери (Web Server Application) стандарту ISAPI у вигляді динамічно під'єднуваних бібліотек (DLL). Запити до баз даних формуються в HTML-формах та передаються браузером з робочої станції на Web-сервер з вказанням імені DLL-бібліотеки, яка має виконати транзакції над відповідними базами даних. Результати запиту до бази даних повертаються клієнту Web-сервера у вигляді динамічно згенерованого HTML-документа. Web-браузер компілює отримане повідомлення і представляє його користувачеві у вигляді звичайної HTML-сторінки. З використанням описаного вище підходу реалізовано службу BBS (електронну дошку оголошень), яка до звичайного тексту оголошення може під'єднувати додатково статичний чи динамічний HTML-документ.

Такий підхід, зокрема, дозволяє включати в інформаційну систему існуючі бази даних різних форматів (*.dbf, *.db,...) з відомою структурою. При цьому, розроблені з використанням різних СКБД (FoxPro, Paradox, Access...) застосування можуть використовуватись паралельно, наприклад, для внесення інформації.

Описані принципи побудови інформаційної системи мають ряд переваг над стандартними підходами:

- доступ користувачів Internet до інформаційної системи без перебудови структури та інтерфейсу системи;
- інтуїтивно зрозумілий користувачам різної кваліфікації інтерфейс;
- можливість достатньо швидкого розширення функціонального наповнення системи за рахунок підключення існуючих баз даних різних форматів;
- можливість побудови інформаційної системи рівня університету шляхом інтеграції підсистем факультетів та інших підрозділів вузу у випадку під'єднання їх комп'ютерів до університетської мережі.

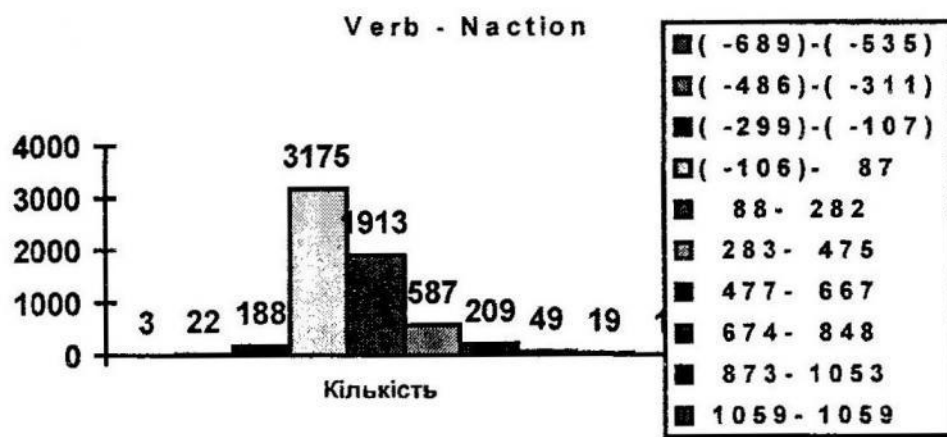
М.Е. Білинський, А.А. Переймибіда

ДІАХРОНІЧНА ЛІНІЙНІСТЬ В АВТОМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ПАРАДИГМОТВІРНОСТІ ДЕВЕРБАТИВІВ АНГЛІЙСЬКОЇ МОВИ

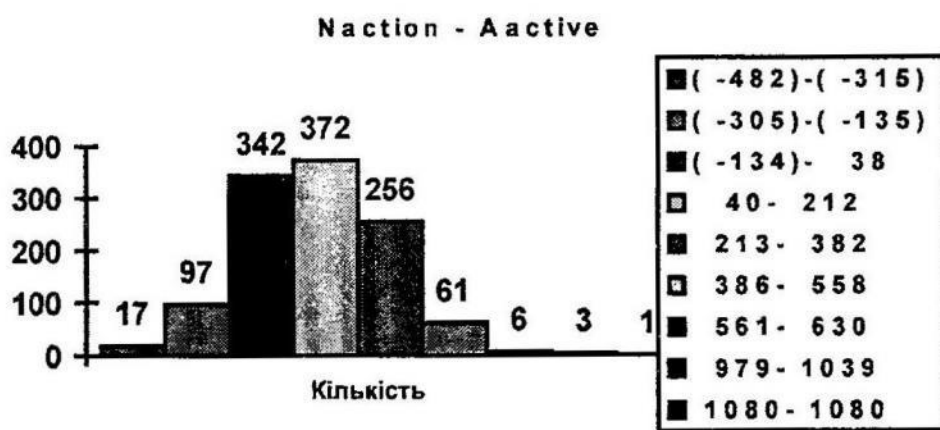
В історії мови лінгвістичним часом одиниці прийнято вважати період, під час якого вона залишається незмінною. У процесах словотвірної активності парадигмотвірна змінність одиниці означає доповнення попередніх результатів дериваційної діяльності наступним утворенням одного чи більше однокоренових похідних. Якщо дві однокоренові похідні лексеми, які засвідчені писемними пам'ятками, що потрапили до Великого Оксфордського словника та уточнень його датуваль, утворені в хронологічних рамках 50 років, то вони вважаються контактними. З метою дотримання вимоги наступності колективної пам'яті цей період рівний подвоєному часу встановлення лексичної компетенції покоління мовців та враховує дещо запізнене відображення реального узусу писемними пам'ятками. Дистантність похідних має місце за умови перевищення вказаної часової рамки між датою писемної фіксації наступного деривата та датою засвідченості останнього з контактних похідних.

На основі розробленої системи моделювання тезауруса дієслів та девербативів англійської мови [1] здійснюється оцінка віку різних у частиномовному і/або пропозитивному відношеннях девербативів стосовно їх однокоренового розгортання та попарної пріоритетності. Для обидвох моделей передбачено виведення довідкової та аналітичної інформації, хоч лише першій із них властива природна прототипність. У другій моделі хронологічний комплементанд не завжди прототипний, тому отримані параметри, за винятком оцінки транспозиційного часу, є усередненими показниками ланок парадигматичного розгортання (рис.1). Використання реляційної системи СКБД MS FoxPro як джерела для системи MS Graph 5.0 є можливим завдяки використанню вбудованих та зв'язаних об'єктів за технологією OLE [2]. Проведення оцінки розподілу різниці вікового показника порівнюваних типів дозволяє відзначати факт та аналізувати ступінь пріоритетності творення віддієслівних похідних різного категоріального статусу в еволюції лексики та його

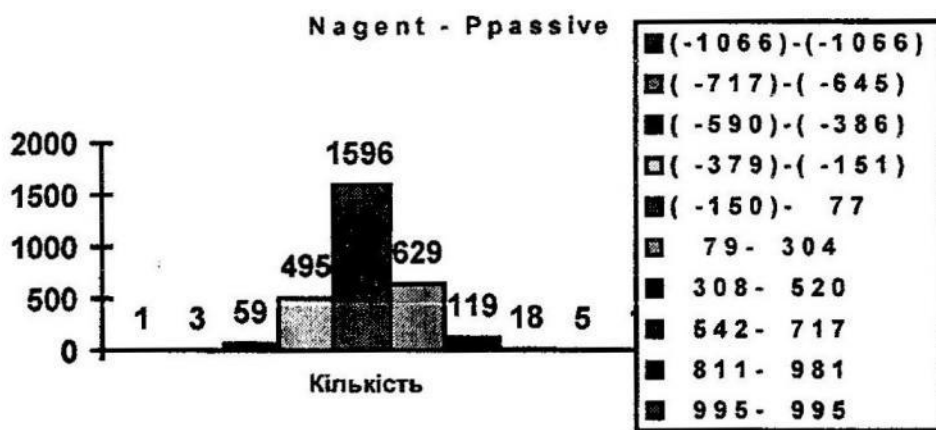
ноетичних просторів, а також виділити випадки, у яких часова пріоритетність не проявлялася.



а) транспозиційні відношення



б) трансферентні одностанові відношення



в) трансферентні різностанові відношення

Рис. 1. Зразки комплементарних відношень у часовій лінійності віддієслівних словотвірних гнізд

Моделювання однокореневої парадигматизації девербативів включає вікову індексацію однокореневого віртуального складу девербалізації із можливістю зміни рамок хронологічної дистантності, задавання фільтрів парадигматичної потужності, дискретизації бази на попередні стани, що суттєво у випадку нульових мотивуючих основ у діяхронії. Оцінка парадигматичного розгортання девербативів включає моделювання поетапного творення віртуальних парадигм та однокоренових наборів іменникового і/або прикметникового тактів девербалізації (рис.2). Опрацьована система дозволяє прецизійно вирішувати задачі декількох типів. Це – реконструкція стану парадигматики девербативів на попередніх етапах еволюції лексики та змінних синхронних зрізах, відтворення шляхів формування парадигматичних типів та перетворення протопарадигм у діяхронії, виявлення панхронічних парадигм, критерії природності стосовно швидкості процесу лексичних новоутворень, співвіднесеність віку дієслівних основ з повнотою словотвірної парадигми та стратегіями часової пріоритетності транспозиційних процесів. Сформульовані задачі релевантні для історичної лексикографії та когнітивної лексикології.

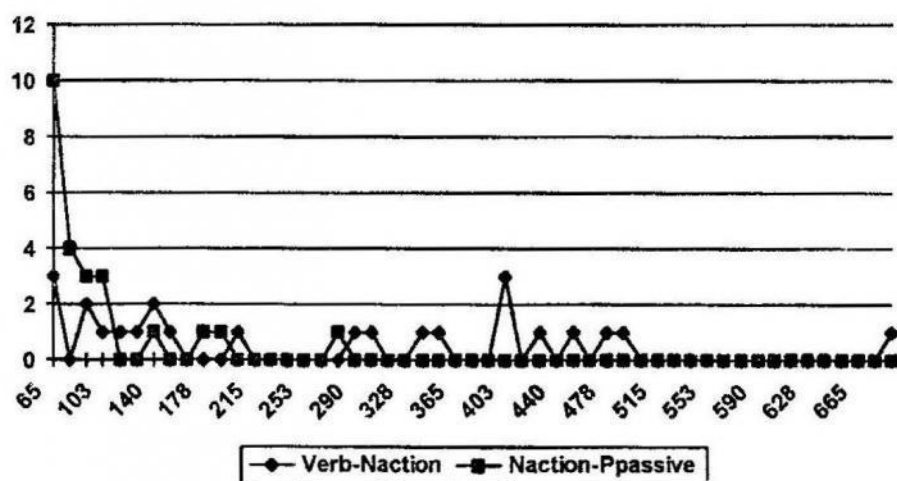


Рис.2. Зразок моделі часової дистантності при парадигматизації імен дії та пасивних дієприкметників

Комп'ютерна лексикометрія на основі реляційної СКБД виступає засобом експлікації латентних властивостей лінгвістичних об'єктів.

І. Білінський М.Е., Переймибіда А.А. Автоматизована система моделювання тезауруса дієслів та девербативів англійської мови. Львів: Всеукр. наук. конф. "Застос. обч. тех., мат. модел. та мат. мет. у наук. досл." 1997. С. 13. 2. Чеппел Д. Технологии ActiveX и OLE. М.: Изд. Отдел "Русская Редакция" ТОО "Channel Traiding Ltd." 1997.

УДК 536.24.

О.В. Блажисівська

ПРО СПРЯЖЕНИЙ ТЕПЛОМАСООБМІН ПРИ ВІЛЬНІЙ КОНВЕКЦІЇ У БІНАРНІЙ СУМІШІ ГАЗІВ ПОБЛИЗУ ВЕРТИКАЛЬНОЇ ПЛАСТИНИ

У працях з теорії тепломасоперенесення, зокрема в [1], показано, що нехтування ефектами спряженості, тобто залежності механізму кондуктивного теплообміну в твердому тілі від вільної чи вимушеної конвекції в оточуючому тілі середовищі, приводить не тільки до суттєвих кількісних помилок, але й до якісно неправильних результатів.

У монографії [2] підкреслено, що досі мало опубліковано робіт, присвячених дослідженню спряжених задач при вільній конвекції, незважаючи на очевидну важливість таких досліджень при аналізі охолодження електронної апаратури, процесів затвердіння в пресформах, проектуванні нагрівальних приладів тощо.

Проте не менш важливим є дослідження впливу геометричних та теплофізичних характеристик тіла на вільну конвекцію, зокрема, для більш точного аналізу розподілу домішок у рідині.

Оскільки конфігурація твердого тіла є фактором, який впливає на значення температури і концентрації домішок у рідині, але не суттєво змінює якісну оцінку ефекта спряженості, то логічно насамперед розглядати задачі для найпростіших областей.

Розглянемо напівбезмежну вертикальну пластину ($0 \leq x < \infty$; $-\delta \leq y \leq 0$; $-\infty < z < \infty$), яка нагрівається через нерухому поверхню $x = 0$ потоком тепла з густиною q . Поверхня пластини $y = -\delta$ є теплоізолюваною, а через поверхню $y = 0$ здійснюється теплообмін з ньютонівською рідиною ($0 \leq x < \infty$; $0 < y < \infty$; $-\infty < z < \infty$). Внаслідок різниці температур пластини та рідини, а також через

неоднорідність поля концентрацій домішок у рідині виникає вільно-конвективний ламінарний рух. Використовуючи наближення примежевого шару і апроксимацію Буссінекса [2], опишемо спряжену стаціонарну задачу про визначення температурного поля у пластинці та природної конвекції в рідині наступними рівняннями та граничними умовами:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, 0 < x < \infty, -\delta < y < 0; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(t - t_\infty) + g\beta^*(c - c_\infty) \\ u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} &= \lambda_t \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}, u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}, 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \end{aligned} \quad (2)$$

$$-\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x} = q \cdot p \text{Ц} x = 0; T = t_\infty \cdot p \text{Ц} x = \infty; \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \cdot p \text{Ц} y = -\delta; \quad T = t, \lambda_T \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda_t \frac{\partial t}{\partial y} \cdot p \text{Ц} y = 0; \quad (4)$$

$$u = 0, v = 0, c - c_\infty = k(t - t_\infty) \cdot p \text{Ц} y = 0; u = 0, t = t_\infty, c = c_\infty \cdot p \text{Ц} y = \infty. \quad (5)$$

Тут T, t – температура пластини і рідини; u, v – компоненти вектора швидкості; c – концентрація домішок; t_∞, c_∞ – температура і концентрація поза примежовим шаром (факелом); g – прискорення вільного падіння; β та β^* – термічний та концентраційний коефіцієнти об'ємного розширення; λ_T і λ_t – коефіцієнти теплопровідності стінки та рідини; D – коефіцієнт молекулярної дифузії домішок; ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості; k – стала.

Припускаючи, що пластина є геометрично і термічно тонкою, використаємо запропонований в [5] алгоритм асимптотичного інтегрування рівняння (1). В одночленному асимптотичному наближенні замість рівняння (1) та умов (4) отримаємо наступне рівняння:

$$\left. \frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2} + \frac{1}{\delta} \frac{\lambda_t}{\lambda_T} \frac{\partial T_c}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \frac{\lambda_t}{\lambda_T} < 1; T_c = T|_{y=0} = t|_{y=0}. \quad (6)$$

У цьому випадку поставлена задача має автомодельний розв'язок:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \psi = a\nu(x + \gamma)^\sigma f(\eta); \eta = b\nu(x + \gamma)^{\sigma-1}; \\ t - t_\infty &= d(x + \gamma)^{4\sigma-3} \varphi(\eta); c - c_\infty = l(x + \gamma)^{4\sigma-3} \bar{c}(\eta) \end{aligned} \quad (7)$$

де $a, b, d, c, \sigma, \gamma$ – сталі; $f(\eta), \varphi(\eta), \bar{c}(\eta)$ – шукані функції.

Рівняння (5), умови (3) та співвідношення (7) є сумісними, якщо

$$\sigma = -1, b = -\frac{56\delta}{\varphi'(0)} \frac{\lambda_T}{\lambda_t}; \quad \gamma = \left(\frac{7\lambda_T d}{q} \right)^{1/8}. \quad (8)$$

Аналогічно до [2] приймаємо, що

$$a = 4b, d = \frac{4\nu^2}{q\beta} b^4, e = kd, \quad (9)$$

а функції $f(\eta), \varphi(\eta), \bar{c}(\eta)$ знаходимо з крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь.

Для коефіцієнта тепловіддачі отримаємо формулу

$$\alpha = -\lambda_t \left(\frac{g\beta}{4\nu^2} \right)^{1/4} \frac{\varphi'(0)}{(x+\gamma)^{1/4}} (T_c - t_\infty)^{1/4} = \frac{56\lambda_T \delta}{(x+\gamma)^2}. \quad (10)$$

Зауважимо, що в роботі [3] наведена формула

$$\alpha = -\lambda_t \left(\frac{g\beta}{4\nu^2} \right)^{1/4} \frac{\varphi'_*(0)}{x^{1/4}} (T_c - t_\infty)^{1/4} \quad (11)$$

при умові, що T_c – задана функція від $x, \varphi'_*(0)$ визначається подібно до $\varphi'(0)$. Аналогічна до (11) формула наведена в [6] для ізотермічної пластини, коли $T_c = \text{const}$.

Аналіз формули (10) показує, що розв'язок суттєво залежить від числа γ , яке однозначно визначається через вхідні дані задачі та величину $\varphi'(0)$. Воно може трактуватись як віддаль від деякого фіктивного джерела до торця пластинки.

За формулою $L = (d/\varepsilon t_\infty) - \gamma$ знаходимо таку висоту пластини, на якій досягається виконання граничної умови із заданою відносною похибкою ε . Тоді отримаємо наступне середнє значення коефіцієнта тепловіддачі:

$$\bar{\alpha} = \frac{56\lambda_T \delta}{\gamma(L+\gamma)}, \quad (12)$$

приймаючи $\alpha = \text{const} = \bar{\alpha}$, отримаємо

$$T_c = t_\infty + \frac{q}{\lambda_T \kappa} \exp(-\kappa x), \kappa^2 = \frac{\bar{\alpha}}{\lambda_T}. \quad (13)$$

Обчислення, проведені для керамічних та скляних пластинок у спряженій постановці та при умові $\alpha = \bar{\alpha}$, показали суттєві відхилення у значеннях температури пластини і концентрацій домішок. Оскільки

$$T_c|_{x=0} = t_\infty + d^{1/8} \left(\frac{q}{7\lambda_T} \right)^{7/8} \quad \text{або} \quad T_c|_{x=0} = t_\infty + \frac{q}{\lambda_T \kappa}$$

залежно від того спряженою, чи не спряженою є постановка, то похибка суттєво залежить від q і може перевищувати 100%. Врахування концентраційної конвекції змінює розв'язок в межах 10%

Дорфман А.Ш. Теплообмен при обтекании неизоотермических тел.- М.: Машиностроение, 1982. 2.Гебхард Б., Джалурия И., Махаджан Р., Сэммакия Б. Свободно-конвективные течения, тепло- и массообмен. В 2 ч. – М.: Мир,1991. 3. Bodnaruk V.I., Dimitrishchuk V.T., Shcherbina L.A., Grinka V.I. The influence of gravitation on the heat exchange conditions // J. Thermoelectricity. - 1997.- № 3. P. 20-25. 4. Кривошей Ф.А. Теплоотдача при обтекании неизоотермических тел: статистический подход// Доп. НАН України. – 1997.- №6.-С. 114-117. 5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк.,1990. 6. Теория тепломассообмена / Под ред. А.И. Леонтьева. – М.: Высш. шк., 1979.

УДК 519.68:159.955

І.Ю. Бобало

ПРОЦЕДУРА СТРУКТУРИЗАЦІЇ ПОЧАТКОВОЇ ІНФОРМАЦІЇ ДЛЯ СЛАБОСТРУКТУРОВАНИХ ЗАДАЧ ВИБОРУ

Під час наукових досліджень дуже часто виникає необхідність прийняття тих чи інших рішень. Більшість цих задач характеризується слабою структуризацією початкової інформації і нечіткою залежністю між очікуваними результатами і наслідками від рішень, що приймаються. Єдиними апріорно відомим параметром є мета прийняття рішення.

Основними джерелами невизначеності вхідної інформації є невизначеність або нечіткість множини альтернатив та невизначеність множини критеріїв.

Основним способом усунення невизначеності вхідної інформації є збір і відповідне опрацювання експертної інформації. Метою проведення експертизи є отримання інформації про елементи множини альтернатив та множини критеріїв – їх кількість та конкретний зміст. Така експертиза має ітераційний характер і повинна проводитись в декілька етапів.

Оскільки якість отриманої під час експертизи інформації сильно залежить від персонального складу експертів, то задача формування групи експертів набуває великого значення.

Таким чином можна говорити про три підзадачі етапу структуризації: формування групи експертів, визначення множини альтернатив, визначення множини критеріїв.

Пропонується процедура проведення такої експертизи і опрацювання отриманих результатів за допомогою ЕОМ. Кожному експерту пропонується запитальник, кожне з питань якого належить до однієї з підзадач експертизи, наприклад: 1) Яких ще експертів Ви рекомендуєте для розв'язання даної задачі; 2) Вкажіть список альтернатив для даної задачі; 3) Вкажіть список критеріїв які характеризують ступінь досягнення мети прийняття рішення.

Спосіб опрацювання відповідей експертів на запропоновані запитання є індивідуальним для кожної підзадачі.

Формування групи експертів є ітераційним процесом і в загальному випадку може містити велику кількість ітерацій, а саме, коли рекомендовані кимось експерти рекомендують нових, ті ще інших і т. д. Тому має сенс обмежити цей процес або за максимальною кількістю експертів або за характером отримуваної від них інформації (відсутність нової інформації по запитаннях 2 і 3). Другий спосіб є складнішим, оскільки вимагає аналізу цієї інформації на кожній ітерації.

На основі отриманої інформації будується орієнтований граф, вузли якого відповідають експертам, а дуги – рекомендаціям. Рекомендація експертом A експерта B відображається як дуга з вузла A в вузол B . Кількість дуг, що входять у вузол неявно характеризує відомість даного експерта, кількість дуг, що виходять з вузла – ширину наукових поглядів. Ці характеристики можна використати при узагальненні отриманої інформації.

Визначення множини альтернатив проводиться після кожної ітерації процесу формування групи експертів або після його закінчення. Позначимо через N кількість опитаних експертів. Нехай i -й експерт визначив n_a^i альтернатив ($i=1..N$) $a^i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n_a^i}\}$.

Формуємо узагальнену множину $a = \bigcup_{i=1}^N a^i = \{a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{N,n_a^N}\}$.

Пронумеруємо $a = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_a}\}$, $n_a = \sum_{i=1}^N n_a^i$. Наступний етап –

отримання результуючої матриці альтернатив A , шляхом скорочення множини a , за рахунок об'єднання однакових або

подібних альтернатив. При великих n_a це можна реалізувати шляхом послідовного перебору множини a , вказуючи для кожної альтернативи аналогічну їй альтернативу з раніше розглянутих, або ж використанням процедур неповного перебору з використанням попередніх оцінок.

При невеликих n_a доцільніше побудувати $n_a \times n_a$ матрицю подібності S , елементами якої $0 \leq s_{ij} \leq 1$ відображають ступінь подібності альтернатив a_i та a_j :

$$s_{i,j} = s_{j,i} = \begin{cases} 1 - a_i \text{ і } a_j \text{ по суті однакові;} \\ 0 - a_i \text{ і } a_j \text{ по суті різні,} \end{cases} ; i, j = 1 \dots n_a.$$

Після заповнення такої матриці можна вибрати певне порогове значення $s_{\text{пор}}$ і отримати A з заданою деталізацією. Автором розроблені алгоритми динамічного вводу таких матриць, коли при порівнюванні двох альтернатив відразу прибирається один рядок і один стовпець матриці. Це значно зменшує обсяги роботи по заповненню такої матриці.

Визначення множини критеріїв аналогічне визначенню множини альтернатив: нехай i -й експерт визначив n_k^i критеріїв $k^i = \{k_{i,1}, k_{i,2}, \dots, k_{i,n_k^i}\}$, формуємо узагальнену множину

$$k = \bigcup_{i=1}^N k^i = \{k_1, k_2, \dots, k_{n_k}\}, \quad n_k = \sum_{i=1}^N n_k^i.$$

Формування результатуючої множини критеріїв K можна здійснити двома способами – об'єднанням однакових критеріїв та відкиданням малозначущих.

На основі отриманої інформації можна визначити важливість критеріїв за принципами: важливість критеріїв пропорційна частоті згадування про нього експертами, та важливіші критерії вказуються першими. При цьому враховуються коефіцієнти довіри до експертів, які формуються по кількості посилань на експерта і кількості висунутих цим експертом і підтверджених іншими експертами альтернатив і критеріїв.

Визначена таким чином важливість є підставою для відкидання малозначущих критеріїв. Задаючи порогови значущості критеріїв, можна отримувати множину критеріїв заданої величини. При цьому враховуються коефіцієнти довіри експертам, які формуються за згаданим вище принципом.

Можливі напрямки розвитку: агрегація даних з урахуванням подібності поглядів експертів, які рекомендували один одного, ваги дуг у графі експертів, які характеризують ступінь кореляції їх

поглядів. Це дасть можливість збільшити якість отриманої інформації про значущість критеріїв.

УДК 519.681

Д.Б. Буй

ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЇ РЕКУРСІЇ

Викладені властивості операції рекурсії: її монотонність та неперервність, замкненість класів монотонних (неперервних) функцій відносно рекурсії. Рекурсія уточнює декларативні (неявні) засоби специфікації програм, що розглядаються в методі нерухомої точки програм [1-2]. Для випадку формальних мов рекурсія розглядалась у [3], під назвою метакомпозиції найменшої нерухомої точки рекурсія наводилась у [4]. Всі неозначувані позначення та поняття використовуються в розумінні [2]. Нижче $(D \rightarrow D')$ - клас всіх тотальних функцій з множини D в множину D' , $(D \xrightarrow{m} D')$ - клас всіх тотальних монотонних функцій з частково впорядкованої множини (ч.в.м.) D в ч.в.м. D' , $[D \rightarrow D']$ - клас всіх тотальних неперервних функцій з індуктивної множини D в індуктивну множину D' . Рекурсія базується на наступній теоремі про нерухому точку.

Терема 1. *Всяка монотонна функція вигляду $f: D \rightarrow D$, де D індуктивна множина, має найменшу нерухому точку. Відображення $\text{Fix}: (D \xrightarrow{m} D) \rightarrow D$, що зіставляє монотонній функції її найменшу нерухому точку, монотонне.*

Для виведення рекурсії розглянемо наступне рівняння відносно невідомого x з параметром $y: x = f(y, x)$, де

$f: D' \times D \rightarrow D$, а D індуктивна множина. Якщо функція f монотонна за другим аргументом, при кожному значенні параметра y це рівняння має за теоремою 1 єдиний найменший розв'язок.

Нижче через $(D' \times D \xrightarrow[m]{2} D)$ позначимо підклас всіх функцій з класу $(D' \times D \rightarrow D)$, які монотонні за другим аргументом; позначення $[D' \times D \xrightarrow[m]{2} D]$ розуміється аналогічно для неперервних функцій.

Означення 1. Під *рекурсією* розуміємо операцію вигляду $R:(D' \times D \xrightarrow[m]{2} D) \rightarrow (D' \rightarrow D)$, де D індуктивна множина, таку, що довільне значення $R(f)(\bar{y})$, $\bar{y} \in D'$ є найменшим розв'язком рівняння при цьому значенні параметра.

Встановимо зображення рекурсії через добуток та абстракцію Λ ; згідно з [5], замість $\Lambda(f)$ будемо писати $\hat{f}$.

Твердження 1. Абстракція вигляду

$$\Lambda:(D' \times D'' \rightarrow D) \rightarrow (D' \rightarrow (D'' \rightarrow D)) \quad ,$$

де D ч.в.м., мотонна. В припущенні часткової впорядкованості множин D'', D виконується еквівалентність: функція f монотонна за другим аргументом $\Leftrightarrow$ функція $\hat{f}$ є функцією вигляду: $\hat{f}: D' \rightarrow (D'' \xrightarrow[m]{2} D)$. У припущенні часткової впорядкованості множин D, D' виконується еквівалентність: функція f неперервна за першим аргументом $\Leftrightarrow$ функція $\hat{f}$ монотонна. Зокрема, в припущенні часткової впорядкованості всіх множин D, D', D'' виконується еквівалентність: функція f монотонна (за всіма аргументами) $\Leftrightarrow$ функція $\hat{f}$ є монотонною функцією вигляду:

$$\hat{f}: D' \rightarrow (D'' \xrightarrow[m]{2} D).$$

Твердження 2. Для довільної функції $f \in (D' \times D \xrightarrow[m]{2} D)$, де D індуктивна множина, справедлива рівність $R(f) = \hat{f} \circ \text{Fix}$, де Fix розуміється як у теоремі 1.

Теорема 2. Рекурсія є монотонною операцією. Клас монотонних функцій замкнений відносно рекурсії.

Неперервність рекурсії спирається на її зображення та неперервність абстракції.

Твердження 3. *Абстракція вигляду*

$$\Lambda: (D' \times D'' \rightarrow D) \rightarrow (D' \rightarrow (D'' \rightarrow D)),$$

де D індуктивна множина, неперервна. В припущенні індуктивності множин D, D'' виконується еквівалентність:

функція f неперервна за другим аргументом $\Leftrightarrow$ функція $\hat{f}$ є функцією вигляду:

$$\hat{f}: D' \rightarrow [D'' \rightarrow D].$$

В припущенні індуктивності множин D, D' виконується еквівалентність: функція f неперервна за першим аргументом $\Leftrightarrow$ функція $\hat{f}$ неперервна. Зокрема, в припущенні індуктивності всіх множин D, D', D'' виконується еквівалентність: функція f неперервна (за всіма аргументами) $\Leftrightarrow$ функція $\hat{f}$ є неперервною функцією вигляду:

$$\hat{f}: D' \rightarrow [D'' \rightarrow D].$$

Теорема 3. Клас неперервних (за всіма аргументами) функцій замкнений відносно рекурсії. Операції рекурсії вигляду

$$R: [D' \times D \rightarrow D] \rightarrow (D' \rightarrow D) \text{ та } R: [D' \times D \rightarrow D] \rightarrow [D' \rightarrow D]$$

неперервні.

Досліджені властивості рекурсії використовуються для обґрунтування методу Гаусса розв'язання рівнянь в індуктивних множинах [6].

1. Манна З. Теория неподвижной точки программ // Кибернет. сб. Нов. сер. - М.: Мир, 1978.-Вып. 15. С.38-100.
2. Буй Д.Б., Редько В.Н. Программологические аспекты метода неподвижной точки // Кибернетика и систем. анализ. - 1994. - №5. С.158-167.
3. Редько В.Н. Некоторые вопросы теории языков // Кибернетика. - 1965. - №4. С.12-21.
4. Никитченко Н.С. Семантико-синтаксические структуры программ: Дис....канд.физ.мат.наук: 01.01.09. -К., 1980. 134 с.
5. Барендрегт Х. Его синтаксис и семантика. - М.:Мир, 1985. - 606с.
6. Буй Д.Б. Системи рівнянь в індуктивних множинах: операція рекурсії та метод Гаусса виключення невідомих // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. - 1997. - Вип.4.-С.118-123.

Д.Б. Буй, С.А. Поляков

КОМПОЗИЦІЙНІ СТРУКТУРИ SQL – ПОДІБНИХ МОВ: ФІЛЬТРАЦІЯ ТА ПОВНИЙ ОБРАЗ

Робота розглядає завдання формальної семантики мов типу SQL [1,2] методами композиційного програмування [3] та продовжує [4].

Введемо множину доменів $Dom_1, Dom_2, \dots, Dom_n$, елементи яких назвемо атомарними даними і позначимо $d_1, d_2, \dots$; об'єднання всіх доменів назвемо універсальним доменом і позначимо DOM .

1. Кортежом називається скінченна послідовність атомарних даних. Кортежі будемо записувати у вигляді $\langle d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_k} \rangle$, де $d_{i_j} \in Dom_{j_j}$. Множину всіх кортежів позначимо через Tr , а окремі кортежі - через tp . Під схемою кортежа $\langle d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_k} \rangle$ будемо розуміти послідовність $\langle D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_k} \rangle$, таку, що $d_{i_j} \in D_{i_j}$. Розглянемо основні операції на кортежах.

2. Конструктор кортежів $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$, $n \geq 1$: параметризована за n функція типу $DOM \times \dots \times DOM \rightarrow TP$, яка формує з аргументів кортеж; конкатенація кортежів $tp_1 \parallel tp_2$: бінарна функція типу $TP \times TP \rightarrow TP$.

3. Введемо поняття рядка. Нехай задана множина імен V , елементи якої позначимо символами v_i . Функцією іменування кортежів назвемо бієкцією множини $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ в початковий відрізок натурального ряду. Такі функції домовимось позначати $\mu_{v_1, \dots, v_k}$; при цьому припускається, що v_1 відображається в 1, v_2 - в 2, і т.п. Рядком назвемо пару вигляду $(\langle d_1, \dots, d_k \rangle, \mu_{v_1, \dots, v_k})$. Множину всіх рядків позначимо як R , а окремі рядки як r_i . Схемою рядка (tp, μ) назвемо пару вигляду $(sch(tp), \mu)$, де $sch(tp)$ - схема кортежа tp . Розглянемо деякі операції на рядках.

4. Іменування $v \leftarrow (d)$: унарна функція типу $DOM \rightarrow R$; її значення буде рядок $\langle d, \mu_v \rangle$. З'єднання рядків $r_1 \|_R r_2$: бінарна часткова функція типу $R \times R \rightarrow R$. Покладемо за означенням $\mu_{V'_1, \dots, V'_m} \circ \mu_{V''_1, \dots, V''_k} = \mu_{V'_1, \dots, V'_m, V''_1, \dots, V''_k}$, якщо $\{V'_1, \dots, V'_m\} \cap \{V''_1, \dots, V''_k\} = \emptyset$, і невизначено в протилежному випадку. Тоді $(tp_1, \mu_1) \|_R (tp_2, \mu_2) = (tp_1 \| tp_2, \mu_1 \circ \mu_2)$, якщо значення $\mu_1 \circ \mu_2$ визначено, та невизначено в іншому випадку.

5. Введемо поняття таблиці. Мультимножиною назовемо множину з дублікатами; їх будемо записувати у вигляді $\{a_1^{i_1}, \dots, a_k^{i_k}\}$, де a_j - елементи мультимножини, i_j - кількість дублікатів даного елемента. Таблицею назовемо скінченну мультимножину рядків, для яких існує одна схема. Множину всіх таблиць позначимо через T , а окремі таблиці - через t . Схемою таблиці назовемо схему, спільну для всіх рядків. Оскільки схема зіставляється неоднозначно, то й схема таблиці також зіставляється неоднозначно.

Введемо наступні позначення. Нехай $d'' \in S$ означає, що мультимножина S містить рівно n дублікатів елемента d , а запис $d^0 \in S$ - що мультимножина не містить жодного дубліката елемента d .

Для таблиць запис $tp^n Et$ означає, що таблиця містить рівно n дублікатів рядка (tp, μ) , де μ - функція іменування кортежів таблиці t ; запис $tp^0 Et$ означає, що таблиця не містить жодного дубліката вказаного рядка.

Таблиці назовемо сумісними за об'єднанням, якщо існують їхні схеми, перші компоненти яких збігаються (тобто збігаються схеми кортежів, які містяться в рядках). Розглянемо операції об'єднання таблиць.

6. Об'єднання таблиць $t_1 \cup_1 t_2, t_1 \cup_{ALL} t_2$ - бінарні часткові функції типу $T \times T \rightarrow T$. Нехай μ - функція іменування кортежів, яка належить схемі таблиці t_1 . Тоді для сумісних за об'єднанням таблиць функції визначаються таким чином:

$$t_1 \cup_1 t_2 = \{r^i | r = (tp, \mu) \& (tp Et_1 \vee tp Et_2)\},$$

$$t_1 \cup_{ALL} t_2 = \{r^{i+j} | r = (tp, \mu) \& (tp^i Et_1 \vee tp^j Et_2)\}.$$

7. Композиціями виступають спеціальні операції над функціями та предикатами. Аргументи та значення функцій належать множинам DOM, R та T ; аргументи предикатів також

належать цим множинам, а значення- множині $\{True, False, \omega\}$, де ω означає невизначене значення. Нехай $S_1, S_2, \dots \in \{DOM, R, T\}$.

Розглянемо наступні композиції.

Композиція фільтрації Fl зіставляє предикату $p^{(n+2)}$ функцію $f^{(n+1)}$, $n \geq 0$; де $p^{(n+2)}: S_1 \times \dots \times S_n \times T \times R \rightarrow \{True, False, \omega\}$ та $f^{(n+1)}: S_1 \times \dots \times S_n \times T \rightarrow T$; значення нової функції задається рівністю

$$f^{(n+1)}(s_1, \dots, s_n, t) = \{r^i \mid p^{(n+2)}(s_1, \dots, s_n, t, r) = True \& r^i \in t\}.$$

Композиція взяття повного образу Im зіставляє функції $f^{(n+2)}$ функцію $g^{(n+1)}$, $n \geq 0$; де $f^{(n+2)}: S_1 \times \dots \times S_n \times T \times R \rightarrow R$ та $g^{(n+1)}: S_1 \times \dots \times S_n \times T \rightarrow T$; значення нової функції задається рівністю

$$g^{(n+1)}(s_1, \dots, s_n, t) = \cup_{ALL} \{f^{(n+2)}(s_1, \dots, s_n, t, r)^i\}.$$

Введені композиції фільтрації, повного образу і стандартна суперпозиція, структури даних та певні природні функції і предикати дають змогу задати семантику досить потужного фрагмента мови SQL; фрагмент містить оператори SELECT, в яких не використовуються операції зовнішнього з'єднання, агрегатні функції, конструкції групування (GROUP BY та HAVING), впорядкування (ORDER BY), а також розгалуження (вирази типу CASE). Функції, що виступають семантиками операторів цього фрагмента, будуються з вихідних функцій вказаними композиціями.

1. Дейт К. Руководство по реляционной СУБД DB2. - М.: Финансы и статистика, 1988. - 320 с. 2. Грабер М. Справочно руководство по SQL. - М.: ЛОРИ, 1997. -292 с. 3. Редько В.Н. Основания композиционного программирования // Программирование. - 1979. -№5. -С.3-13. 4. Поляков С.А. Композиційна семантика SQL-подібних мов. // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. -1997. -Вип.3. -С.205-211.

П.П. Вагін, Ю.В. Іщук

ВОДНА ЕРОЗІЯ ҐРУНТІВ НА ОСНОВІ ЕМПІРИЧНОЇ МОДЕЛІ (ДЛЯ РІЗНИХ ТИПІВ ҐРУНТІВ)

Нехай ми маємо земельну ділянку, задану у вигляді двох карт - карти рельєфу у вигляді ізоліній або точок-висот і карти ґрунтів. Потрібно знайти кількість ґрунту, яка змиється під час дощу або поливу з відомою інтенсивністю з заданої ділянки за деякий проміжок часу. Але оскільки наведена далі модель не враховує зміни інтенсивності змиву з часом, то ми фактично будемо рахувати цю інтенсивність, тобто кількість змитого ґрунту за одиницю часу (причому проміжок часу досить невеликий).

Тому вихідною моделлю для цього проекту є модель, описана в [1]. Основною особливістю цієї моделі є те, що формула, яка описує кількість змитого ґрунту для земельної ділянки, отримана виключно експериментальним шляхом, тобто в результаті польових досліджень, і практично всі дані про ґрунт, що використовуються у формулі, можна знайти у довідковій літературі. Ця формула для смуги одиничної ширини схилу довжиною s і нахилом (тангенсом кута нахилу до горизонту) i має вигляд:

$$q_x = 6,4 \cdot 10^{-6} \cdot \gamma \cdot \omega \cdot d \cdot \int_0^s \left(\frac{V_{\Delta x}^2}{V_{\Delta \text{дон}}^2} - 1 \right) dx,$$

де q_x - шукана інтенсивність змиву, т/м, γ - об'ємна вага ґрунту, ω - середня частота пульсацій розмиваючих швидкостей, які виникають через турбулентність руху води (при відсутності дослідних даних $\omega=0,1$), d - середній діаметр частинок ґрунту, s - відстань від вододілу до кінця схилу, $V_{\Delta x}$ - швидкість потоку води на відстані x від вододілу, $V_{\Delta \text{дон}}$ - допустима швидкість, або максимальна швидкість потоку, при якій ще не починається ерозія.

Швидкість потоку води визначається за формулою:

$$V_{\Delta x} = \frac{((I - k) \cdot x m)^{0,3} i^{0,35} \Delta^{0,17}}{n^{0,7}},$$

де I - інтенсивність опадів, м/с, k - інтенсивність поглинання, м/с, x - відстань від вододілу, м, m - коефіцієнт умов змиву, що характеризує присутність наносів у колоїдному стані (при відсутності наносів $m=1$), $i = \operatorname{tg} \alpha$ - нахил схилу, Δ - висота виступів шорсткості, n - коефіцієнт шорсткості, що за відсутності дослідних даних можна обчислити як $n = 0,0166666 \cdot d\%$.

Для визначення допустимої швидкості застосовується співвідношення

$$V_{\Delta don} = 1,25 \sqrt{\frac{2gm(\rho_1 - \rho_0)d}{0,44\rho_0 n}},$$

де g - прискорення земного тяжіння, m - коефіцієнт перевантажень, ρ_1 - щільність ґрунту, ρ_0 - щільність води, d - середній діаметр частинок ґрунту, n - коефіцієнт, що характеризує пульсацію швидкостей у потоці.

Розглянемо розбиття заданої області (земельної ділянки) на квадрати, для кожного з яких відомі нахил i_k і відстань від вододілу x_k . Тоді формулу (1) можна наблизити таким виразом:

$$q^h = 6,4 \cdot 10^{-6} \cdot \gamma \cdot \omega \cdot d \cdot \sum_k \left\{ \left(\frac{V_{\Delta x}^{(k)}}{V_{\Delta don}} \right)^2 - 1 \right\} \cdot h^2,$$

де $V_{\Delta x}^{(k)}$ - значення швидкості потоку води на k -тому квадраті, h - довжина сторони квадрата. Збіжність q^h до q_x при $h \rightarrow 0$ випливає із збіжності квадратурної формули прямокутників.

Ця модель у такому вигляді була реалізована на мові *Avenue* геоінформаційної системи *ArcView* версії 3.0, з використанням розширення *ArcView Spatial Analyst* версії 1.0, яке дозволяє працювати з картами, що представлені у вигляді сітки з квадратними комірками, і значення параметра, що визначається цією картою, у кожній комірці постійне.

Вхідними даними для проекту є:

- карта рельєфу, що задається або у вигляді ізоліній, або як точки - заміри висот;
- карта ґрунтів;
- середня інтенсивність дощу або штучного поливу (вважається сталою для даної ділянки).



Рис. 1. Елемент карти еродованості (з ізолініями).

1. Мирцхулава Ц.Е. Инженерные методы расчета и прогноза водной эрозии. - М.: Колос, 1970.-240 с. 2. Кузнецов М.С., Глазунов Г.П., Зорина Е.Ф. Физические основы эрозии почв. - М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1992.-95 с. 3. Эрозия почвы / Под редакцией М. Дж. Киркби / Перевод с английского и предисловие М.Ф.Пушкарева. - М.: Колос, 1984.-415с.

УДК 539.3

П.П. Вагін, Г.Й. Лучко, В.Я. Федорович

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ЕРОЗІЇ ВОДНОГО КАНАЛУ

Зі всього комплексу осадових порід найбільш поширені глинисті породи у природі. Вони складають близько 80% всієї осадової товщі земної поверхні і трапляються в покладах різного

© Вагін П.П., Лучко Г.Й., Федорович В.Я., 1998

віку. Глинисті породи найчастіше зустрічаються при побудові різних споруд (особливо каналів). Аналіз спостережень за каналами а також, літературні дані вказують на те, що найсуттєвіші фактори, що зумовлюють ерозію, – це характеристика потоку, склад, властивості та ступінь вологості ґрунту, що утворює дно каналу, форма каналу в перерізі та багато інших факторів. Г.П. Ляель та В.В. Докучаєв довели, що рельєф долини та русла є головним чином результатом діяльності самого водного потоку. Цей висновок отримав повне визнання в геології та гідрології.

Для розрахунку ерозії каналу попередньо необхідно мати дані про допустиму (нерозмиваючу) придонну швидкість та знати ґрунтові характеристики і глибину каналу. Ґрунти замінюються ідеалізованими, що характеризуються однорідністю або суцільністю. В процесі розмиву усереднені характеристики як ґрунту так і потоку, а також шорсткість не змінюються ні в просторі, ні в часі. Передбачається лінійна пружність частинок, що відриваються в процесі розмиву і єдиним джерелом відривних сил вважається пульсаційна дія швидкості потоку. Розмиваючий потік – рівномірний, стаціонарний. Відрив частинок відбувається внаслідок послаблення зв'язків виступу з масивами ґрунту. Хімічна дія на ґрунт ігнорується. Опір виступу, як і силова дія потоку, усереднюється по поверхні ґрунту. Відрив відбувається частинками, зв'язаними між собою силами зчеплення. Як характерний розмір прийнято середній діаметр шару, рівнооб'ємного частинкам, що відриваються. Відірвану частинку миттєво відносить потік. Час, необхідний для відриву частинки, залежить від параметрів потоку та властивостей ґрунту.

З рівняння, що описує граничний стан частинки, одержимо наступні залежності для розрахунку розмиваючих середніх, допустимих придонних і середніх швидкостей:

$$v_{\Delta p} = 1.25 \sqrt{\frac{2m}{1.3\rho_0 n} [(\rho_{ch} - \rho_0)gd + 1.25C_y^H]} \quad (1)$$

$$v_{\Delta H, dop} = 1.25 \sqrt{\frac{2m}{2.6\rho_0 n} [(\rho_{ch} - \rho_0)gd + 1.25C_y^H K]} \quad (2)$$

$$v_{H, dop} = \left(\lg \frac{8.8H}{d} \right) \sqrt{\frac{2m}{2.6\rho_0 n} [(\rho_{ch} - \rho_0)gd + 1.25C_y^H K]} \quad (3)$$

Якщо швидкості водного потоку русла перевищують допустимі (нерозмиваючі) придонні швидкості для даного ґрунту, то відбувається підмив схилів, які внаслідок втрати стійкості

обвалюються. Опір розмиву поваленого ґрунту порушеної структури значно менший опору розмиву того ж ґрунту в непорушеному стані. Тому повалений ґрунт відноситься потоком з підвищеною інтенсивністю. Враховуючи це, одержуємо (за даними Мирцхулаві Ц. Е.):

$$h_{\Delta} = 0.0000064 \omega d \left(\frac{v_{\Delta x}^2}{v_{\Delta H.dop}^2} - 1 \right) t; \quad (4)$$

$$B = \frac{4 - K_0^2}{4K_0} \pi h_{\Delta}; \quad (5);$$

$$v_{\Delta x} = \frac{1.25v}{\left(\lg \frac{8.8H}{d} \right)}. \quad (6);$$

де h_{Δ} - глибина розмиву за інтервал часу t ; $v_{\Delta x}$ - придонна швидкість на початку розмиву; $v_{\Delta H.dop}$ - допустима (нерозмиваюча) придонна швидкість; B - ширина саморозмиваючого каналу; K_0 - коефіцієнт, що залежить від C_y^H та K .

При участі в загальному розмиві берегів кожній глибині розмиву русла відповідає відповідний опис поперечного перерізу в цей проміжок часу. Вважаємо, що розмив русла відбувається до тих пір, поки поперечний переріз і повздовжній профіль не набудуть стійкого положення. Для визначення такого положення прийнято розраховувати стійкий повздовжний профіль каналу. Він визначається з наступної залежності нахилу водотоку:

$$Y = - \frac{v_{\Delta x}^{2.86} q^{0.86}}{22.2^{2.86} n_0^{0.86}} X + Const \quad (7);$$

яка одержується із врахуванням того, що придонна швидкість потоку $v_{\Delta x}$ в граничному стані стійкості русла приблизно дорівнює допустимій $v_{\Delta dop}$ (нерозмиваючій) придонній швидкості течії ($v_{\Delta x} = 1.15 v_{\Delta dop}$).

Слід зауважити, що формули (4)-(7) виведені для тих самих умов і припущень, які були використані при виведенні формул

допустимої швидкості (1)-(3). Вони дають можливість обрахувати з достатньою точністю результуючу глибину каналу і його ширину після деякого періоду дії водного потоку, а також обчислити стійкий повздовжній профіль каналу. Ці формули не вимагають знання великої кількості значень нових параметрів, окрім тих, що необхідні для розрахунку допустимої придонної швидкості. Саме це робить їх дуже зручними для використання, оскільки збір значень усіх параметрів у теперішніх умовах є досить складною задачею.

Для програмної реалізації даної моделі ерозії водного каналу розроблено програми на мовах C++ та Avenue, які дають можливість швидко, зручно та наглядно дослідити ерозію каналів при різних характеристиках ґрунту та течії. В GIS ArcView можна побачити результати досліджень у вигляді карт. Завдяки цьому можна прогнозувати ерозію каналів з достатньою точністю, щоб передбачити розвиток ерозії та виробити міри для її запобігання.

1. Мирцхулава Ц.Е. Основы физики и механики эрозии русел.- Л.:Гидрометеиздат, 1988. 298 с. 2. Мирцхулава Ц.Е. Инженерные методы расчета и прогноза водной эрозии. - М.: Колос, 1970. - 240 с. 3. Маккавеев Н.И. Русло реки и эрозия в её бассейне. - М.: Изд-во АН СССР, 1955, -280 с. 4. Environmental Systems Research Institute, Inc. Getting to Know ArcView. – 1996. 500 p.

УДК 539.3

П.П. Вагін, О.Й. Піскозуб

МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ РЕЛЬЄФУ МІСЦЕВОСТІ НА ПОВЕРХНЕВО-СХИЛОВУ ЕРОЗІЮ ҐРУНТУ

На даний момент розроблено досить багато моделей розрахунку водної ерозії, і зокрема поверхневого змиву ґрунтів під впливом дощів. Кількісно ці матеріали оброблялись мало через складність обчислень та протиріччя вихідних даних.

Нехай маємо земельну ділянку, рельєф якої заданий у вигляді ізоліній (ліній рівня). Розглянемо задачу еродованості цієї ділянки, тобто обчислення можливої кількості змитого ґрунту для певного проміжку часу, інтенсивності дощу та механічних характеристик ґрунту.

Пропонуємо реалізацію моделі обчислення залежності поверхнево-схилової ерозії від форми рельєфу поверхні. Запропонований розв'язок отриманий емпірично на основі дослідів багатьох авторів. В [1, 2] був розв'язаний частковий випадок задачі - схил плоский, у вигляді трапеції.

$$W_L = a \left(I^n(L) \frac{d(L^*{}^p L)}{dL} + L^*{}^p L \frac{dI^n(L)}{dL} \right), \quad (1)$$

де W_L - кількість змиву, L - довжина схилу або довжина акумульованого потоку, визначає кількість води, що проходить через даний створ за одиницю часу. L^* - довжина прямокутного схилу, рівновеликого за площею до даного. I - нахил схилу, визначає швидкість потоку. dI/dL - профіль схилу, визначає прискорення потоку: на опуклому схилі прискорення буде додатним, на ввігнутому - від'ємним. a - враховує фактори, що не залежать від рельєфу.

Це співвідношення отримане з міркувань, що середня кількість змиву пропорційна до довжини L в степені p та до нахилу I в степені n , значення p та n були визначені експериментально кількома авторами та усереднені.

Узагальнення розв'язку полягає в розбитті схилу на смуги, по яких змив відбувається незалежно. В свою чергу ці смуги, перетинаючись з лініями рівня, утворюють сітку криволінійних чотирикутників, які при досить густому розбитті можна вважати наближеннями плоских трапецій і застосовувати до них отриману формулу. Для розбиття схилу на такі смуги аналізували форми схилу з метою визначення можливих траєкторій потоків води під час дощу. Кожна пара знайдених траєкторій утворює смугу, стік води по якій, а отже, і поверхневий змив, відбувається незалежно від стоку на інших таких самих смугах.

Аналіз рельєфу місцевості проводився за допомогою геоінформаційної системи GIS ArcView та додатка ArcView Spatial Analyst, у якому запрограмовані всі використані чисельні методи. Вхідними даними задачі є рельєф поверхні, заданий у вигляді карти векторно-растрового формату з зображеними на ній ізолініями рельєфу поверхні.

Першим етапом аналізу поверхні було знаходження поверхні рельєфу шляхом інтерполяції точок, з яких складаються ізолінії. Вибір методу інтерполяції здійснювався з міркувань, що отримана поверхня повинна якомога точніше відображати реальну. Для випадку відтворення поверхні природного рельєфу місцевості найдоцільніше використовувати метод сплайнів, бо поверхня,

відтворена цим методом є максимально гладка, якою і повинна бути поверхня природного рельєфу місцевості. При інтерполяції методом сплайнів накладаються дві основні вимоги:

- поверхня точно проходить через всі точки заміру;
- поверхня має мінімальну кривизну, тобто сума квадратів других похідних взятих у кожній точці поверхні мінімальна. Ця техніка забезпечувала гладку поверхню і гладку першу похідну по поверхні, що виявилось корисним, коли треба було обчислювати другу похідну по поверхні.

Незважаючи на те що метод сплайнів дає максимально гладку поверхню, все таки цю поверхню можна ще більше наблизити до реальної. Помилка інтерполяції в даному випадку полягає в тому, що на поверхні допускається існування заглибин - ділянок, звідки вода не витікає. В природі такі випадки трапляються рідко (уявіть собі калюжу на схилі). Тому після інтерполяції всі такі заглибини згладжувались.

Наступним після інтерполяції поверхні етапом аналізу було визначення напрямків потоку води на кожній точці поверхні. Оскільки кожна точка поверхні представляє квадратну ділянку поверхні на карті, то існує вісім точок, що дотикаються до даної (стороною або вершиною), а отже, і вісім можливих напрямків потоку із даної точки. Вважалось, що вода стікає у найбільш похилому вниз напрямку. В реальних умовах при невеликій швидкості потоку це наближення досить точно відображає процес стоку. Якщо існував неоднозначний вибір напрямку - кілька точок мали однакову найменшу висоту, то напрямок визначався по "сусідах сусідів" і так далі. Нескладно було визначити акумульовану довжину потоку L : будувалась послідовність точок за картою напрямків потоку.

Після того як була отримана поверхня та карта напрямків потоків, стало можливим взяти першу та другу похідні у напрямку потоку води у всіх точках поверхні і застосувати (1). Результатом роботи програми є карта розмірів поверхнево-схилової ерозії ґрунту на даній місцевості.

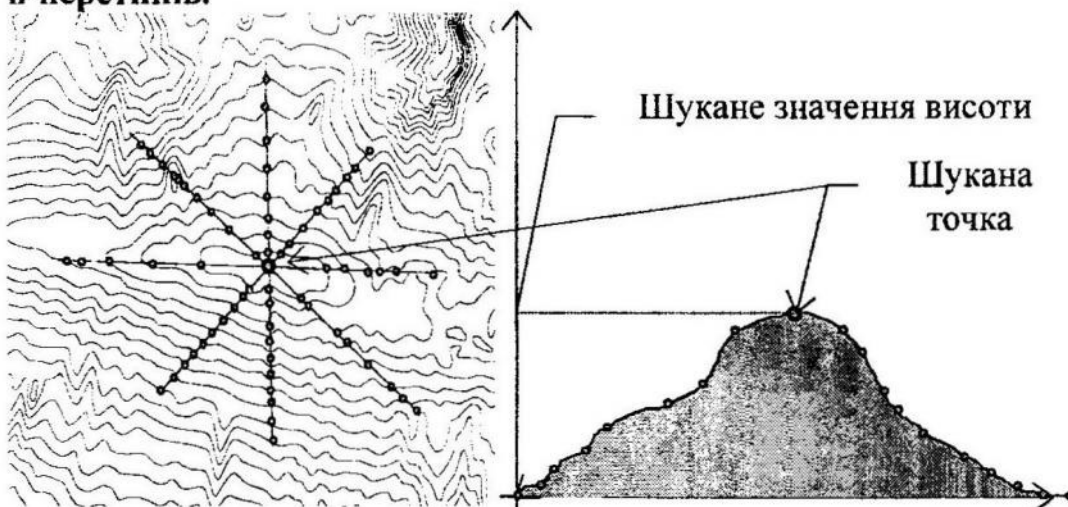
1. Ш в е б с Г. И. Формирование водной эрозии стока наносов и их оценки (на примере Украины и Молдавии); Л.: Гидрометеиздат, 1974.
2. Ш в е б с Г. И. Теоретические основы эрозиоведения; Киев; Одесса: Вища школа; 1981.

П.С. Венгерський, Д. В. Косарев, Ю.О. Чоботок, Г.А. Шинкаренко

СИСТЕМА ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ НА РЕЛЬЄФІ ПОВЕРХНІ

Багато років люди збирали інформацію про рельєф місцевості. Згодом результати досліджень почали зберігати у вигляді топографічних карт, на які наносили позначки характеристик рельєфу ділянки території або використовували лінії рівня (ізолінії) для зображення розподілу даних. Для отримання загального характеру рельєфу розвиток сучасних комп'ютерних технологій дозволяє представити рельєф як тривимірну модель. Запропонована система саме і передбачає виконання основних етапів побудови перспективного зображення рельєфу поверхні з існуючої топографічної карти. Одним з початкових кроків загального алгоритму є задача визначення висоти в будь-якій точці карти.

1. Алгоритм довизначення висоти в точці поверхні. Метод n -перетинів.

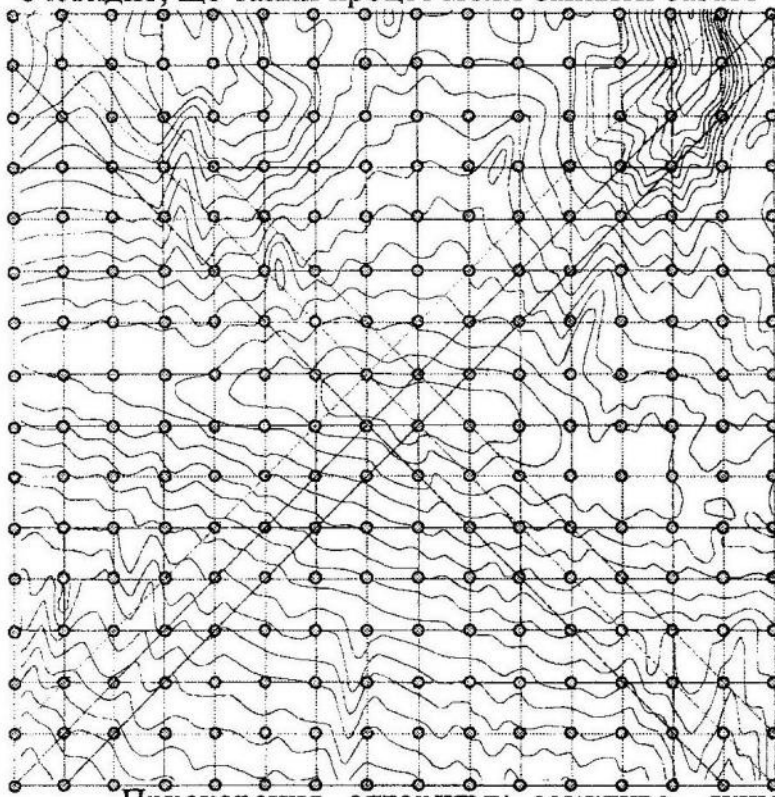


Основна ідея даного алгоритму полягає в тому, що через шукану точку проводиться n -перетинів у різних напрямках. Для кожного перетину визначаються точки перетину з лініями рівня. Отже, якщо розглянути площину перетину з отриманими точками перетину та невідомою точкою, то очевидно, що значення в невідомій точці можна довизначити через значення в точках перетину. Таку операцію проводимо для всіх перетинів, і в

результаті отримаємо n значень висот в шуканій точці. За шукане значення висоти беремо середнє значення серед отриманих n значень.

2. Оптимізація методу n -перетинів.

На практиці може виникнути проблема швидкості обчислення точок перетину з лінією рівня. Якщо врахувати, що лінія рівня представляється як набір з'єднаних між собою точок, то задача визначення точок перетину прямої з лінією рівня зводиться до задачі визначення перетину прямої з відрізками, що утворюють лінію рівня. На практиці, кількість точок, що задають лінію рівня, може бути дуже великою і очевидно, що такий процес може зайняти багато часу.

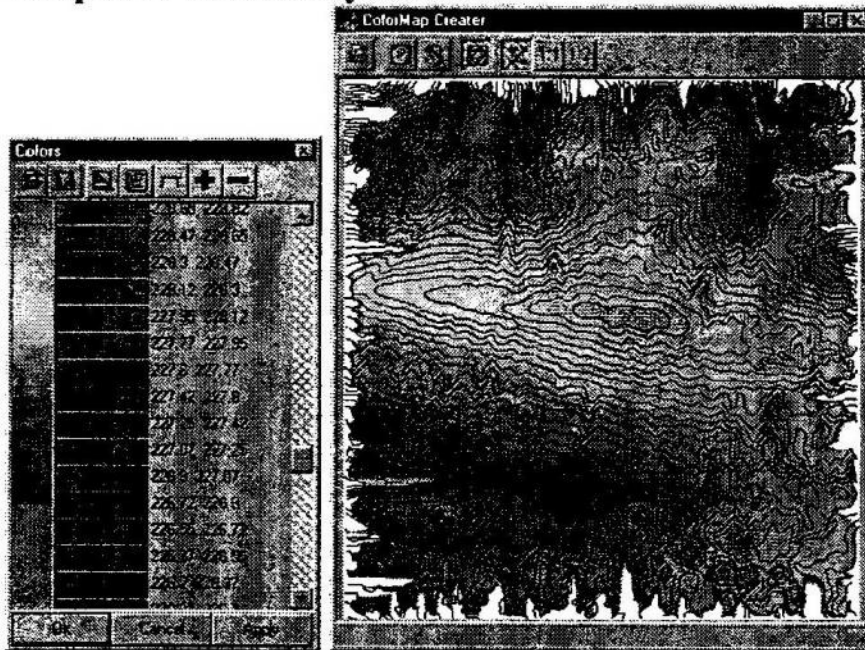


Прискорення алгоритму можливе, якщо значення висот шукати в вузлах прямокутної або іншої регулярної сітки. Розглянемо квадратну сітку. Для кожної точки такої сітки будемо будувати 4 перетини: вертикальний, горизонтальний, та два під кутом 45 градусів. Легко бачити, що деякі перетини є однаковими для різних точок. Таким чином, ми спочатку вираховуємо і зберігаємо потрібні перетини, а потім декілька разів використовуємо їх. Наприклад, при сітці n на m і при схемі з двома перерізами, без оптимізації потрібно порахувати $n \cdot m$ перетинів, а при оптимізованій схемі лише $n + m$. Але практичні задачі, як правило, вимагають обчислення значень у багатьох точках, які не є вузлами регулярної прямокутної сітки. Для такого випадку розроблена схема допоміжної апроксимаційної сітки. Будуються допоміжні значення висот у вузлах регулярної

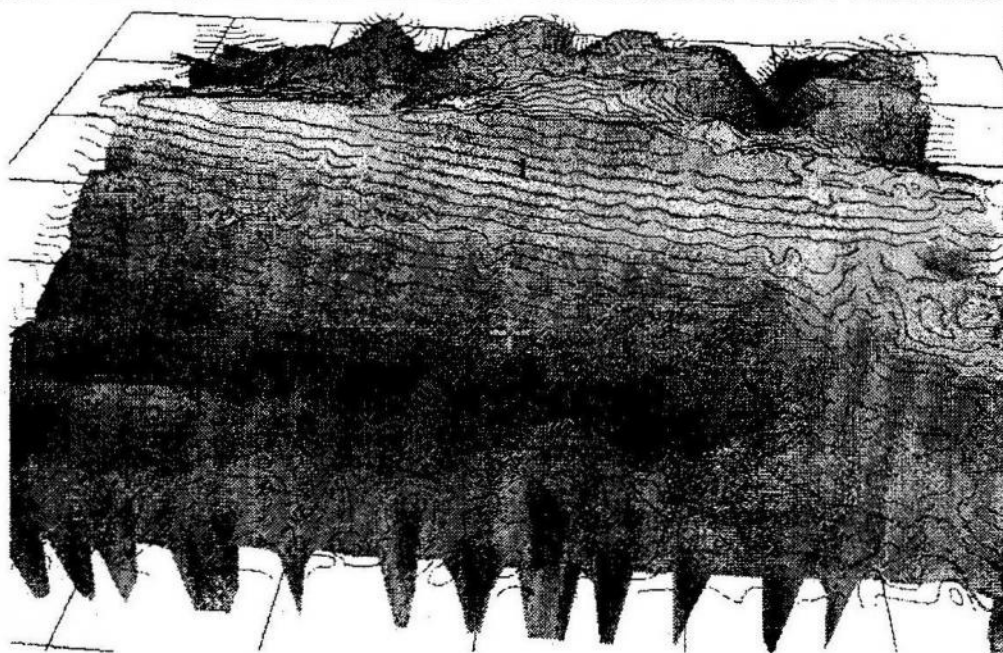
прямокутної сітки, для якої спрацьовує описаний вище алгоритм оптимізації. Далі значення висоти в будь-якій точці будемо обчислювати за допомогою допоміжної прямокутної сітки. Змінюючи густину сітки, ми змінюємо точність обчислень. Піднявши точність обчислень і згустивши допоміжну сітку, ми майже не програємо в швидкості на головному етапі, а лише програємо в швидкодії на допоміжному етапі, який обчислюється лише один раз.

3. Застосування алгоритму n-перетинів для реальних даних. Для роботи з ізолініями, а саме завантаження ізоліній з реальних карт місцевості, був побудований спеціальний модуль. Цей модуль дозволяє працювати з картографічними векторними даними, які зберігаються в shape-форматі (формат, який підтримується більшістю картографічних систем). На базі цього модуля був розроблений модуль, який дозволяє завантажити реальну карту рельєфу в shape-форматі, та за допомогою алгоритму n-перетинів до визначити значення висоти в будь-якій точці карти.

4. Практичне застосування.



- Програма для побудови карти кольороподілу (DEM Digital Elevation Model). Вхідними даними для цієї програми є файл з ізолініями в shape-форматі. Програма дозволяє поєднати діапазони висот з відповідним кольором і після того побудувати відповідне бітове зображення. Практичне застосування цієї програми полягає в тому, що створене нею растрове зображення можна використовувати як картографічне покриття в інших геоінформаційних програмах, таких як Arcview та ін.



- Система для моделювання тривимірного рельєфу поверхні. Ця система дозволяє на базі shape-файла з ізолініями побудувати тривимірну модель рельєфу поверхні, на якій можна моделювати та досліджувати інші картографічні об'єкти та їх властивості. Зокрема, показати ізолінії та застосувати карту кольороподілу.

Розроблена система є деякою мірою відкритою модульною системою, що дозволяє розв'язувати або демонструвати результати задач, які пов'язані з картографічними даними.

УДК 517.648:519.68

П.С. Венгерський, Ю.Я. П'єц

ПРИСКОРЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ІНТЕРВАЛЬНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДОМІНУЮЧОЮ ДІАГОНАЛЛЮ

Відомо багато різних інтервальних методів для розв'язування систем нелінійних рівнянь, які знаходять всі дійсні корені в наперед заданих вхідних інтервалах. Але в більшості з них необхідно знаходити інтервальне розширення оберненої матриці похідних

системи рівнянь. В даній роботі запропоновано тип інтервальних ітераційних методів, в яких, враховуючи структуру інтервальної матриці похідних, спрощується обчислення оберненої матриці.

1. Інтервальні методи. Починаючи з інтервального вектора $x^{(0)}$, розглянемо послідовність $x^{(k)}$, що обчислюється ітераційним методом:

$$\begin{cases} u^{(k+1)} = m(x^{(k)}) - D(x^{(k)})^{-1} \{ B(x^{(k)})(m(x^{(k)}) - x^{(k)}) + f(m(x^{(k)})) \} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} \cap u^{(k+1)}, \quad m(x^{(k)}) \in x^{(k)}, \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Обчислення інтервального розширення $f'(x^{(k)})$ займає багато часу, тому є сенс в методі (1) робити більше одного кроку обчислення локалізації для розв'язку без зміни $f'(x^{(k)})$. Кількість r кроків, які виконуються після обчислення $f'(x^{(k)})$, також може залежати від k : $r = r(k)$. Це приводить до наступного ітераційного процесу:

$$\begin{cases} x^{(0,0)} = x^{(0)}, \\ u^{(k+1,i)} = m(x^{(k)}) - D_p(x^{(k)})^{-1} \{ B_p(x^{(k)})(m(x^{(k)}) - x^{(k,i-1)}) + f_p(m(x^{(k)})) \} \\ x^{(k,i)} = x^{(k,i-1)} \cap u^{(k+1,i)}, \quad 1 \leq i \leq r_k, \\ x^{(k+1)} = x^{(k,r_k)}, \\ x^{(k+1,0)} = x^{(k+1)}, \quad k \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

В методі (1) дійсний n -вектор $m(x^k)$ може бути вибраний будь-якою точкою з інтервалу x^k , найчастіше його вибирають серединою інтервалу. Опишемо метод для вибору $m(x^k)$ [1], який дозволяє прискорити збіжність методу знаходження розв'язку. Щоб сформулювати цей метод, введемо функцію K , яка визначається

$$\text{наступним чином: } K(w, x) = \begin{cases} x_1, & w < x_1, \\ w, & w \in x, \\ x_2, & w > x_2. \end{cases}$$

Для $x = (x_i)$ і $u = (u_i)$ визначимо $p(u, x) = (K(u_i, x_i))$.

Використовуючи p , розглянемо метод який відрізняється від (1) лише правилом вибору $m(x^k)$.

Нехай задано фіксоване число $r \in N_0$, і $m(x^k)^0$ є центром x^0 . Обчислимо інтервал $[a^{(k)}, b^{(k)}]$, $0 < a^{(k)}$, який містить всі власні значення матриць $m(H(x^k))$ і $m(V(x^k))$, де $f'(x) = H(x^k) + V(x^k)$. Далі обчислимо $L = 2^r$ параметрів: $\alpha_i^{(k)}$, $1 \leq i \leq L$.

Прийнявши $u^{k+1,0} = m(x^k)$, розв'язуємо L лінійних систем рівнянь:

$$M(\alpha_i^{(k)}, x^k)(u^{k+1,i} - m(x^k)) = N(\alpha_i^{(k)}, x^k)(u^{k+1,i-1} - m(x^k)) - f(m(x^k))$$

$$M(\alpha_i^{(k)}, x^k) := (1/2\alpha_i^{(k)}) \{m(H(x^k) + \alpha_i^{(k)}I)\} \{m(V(x^k) + \alpha_i^{(k)}I)\}$$

$$N(\alpha_i^{(k)}, x^k) := (1/2\alpha_i^{(k)}) \{m(H(x^k) - \alpha_i^{(k)}I)\} \{m(V(x^k) - \alpha_i^{(k)}I)\}$$

для $i=1,2,\dots,L$, $u^{k+1} = u^{k+1,L}$

$$m(x^{k+1}) = p(u^k, x^{k+1}), \quad k=0,1,2,\dots$$

метод знаходження параметрів $\alpha_i^{(k)}$ складається з наступних процедур:

а) $a_0 = a^{(k)}$, $b_0 = b^{(k)}$, $a_{j+1} = \sqrt{a_j b_j}$, $b_{j+1} = (a_j + b_j)/2$, $i=0, (1)r-1$,

$$s^{(0)}_1 = \sqrt{a_r b_r},$$

б) обчислюємо для $j=0,1,2,\dots,r-1$:

$$s_i^{(j+1)} = s_i^{(j)} + \sqrt{s_i^{(j)2} - a_{r-1-j} b_{r-1-j}},$$

$$s_{i+2^j}^{(j+1)} = s_i^{(j)} - \sqrt{s_i^{(j)2} - a_{r-1-j} b_{r-1-j}}.$$

с) $\alpha_i^{(k)} = s_i^{(k)}$; $i = 1(1)l$; $l = 2^r$.

Матриці $m(H(x^k))$ і $m(V(x^k))$ є дійсні матриці, що вибрані з $H(x^k)$ і $V(x^k)$ відповідно. Природно вибрати центри цих матриць.

Якщо замість похідної $f'(x)$ вибрати лінійну комбінацію

$$1/4 f'(m(x)) + 3/4 f'(m(x) + 2/3(x - m(x))),$$

то ми отримаємо так званий інтервальний метод типу Рунге з використанням покомпонентних перетинів.

2. Застосування. Розглянемо один клас задач, які можуть бути зведені до розв'язування системи нелінійних рівнянь даного виду. Нехай маємо задачу Діріхле:

$$\Delta u \equiv u_{ss} + u_{tt} = f(s, t, u), \quad (s, t) \in \Omega$$

$$u(s, t) = \phi(s, t) \text{ для } (s, t) \in \bar{\Omega}.$$

Дискретизувавши її, отримаємо n^2 рівнянь:

$$f(x) = Ax + g(x) - b = 0 \quad (3),$$

де $x = (x_{i,j}) \in V_{n^2}(R)$, A – блочна трьохдіагональна матриця, g_j

$(x) = h^2 f(kh, lh, x_j)$, $j = lm + k$, $b = (b_1, \dots, b_m)^T$ – вектор, що містить граничні значення.

Розглянемо для конкретного прикладу наступну крайову задачу:

$$u_{ss} + u_{tt} = u^3 / (s^2 + t^2 + 1), \quad (s, t) \in (0, 1) \times (0, 1)$$

$$u(s, 0) = 1, \quad s \in [0, 1], \quad u(0, t) = 1, \quad t \in [0, 1]$$

$$u(s, 1) = 2 - e^s, \quad s \in [0, 1], \quad u(1, t) = 2 - e^t, \quad t \in [0, 1]$$

Результати обчислень занесемо в наступну таблицю (точність = $10E-10$, $n=5$, $r=4$)

Метод	Число ітерацій	Результат	Число ітерацій
Класичний метод	83	9	6
Чисельний метод	13.1	5.21	4.05

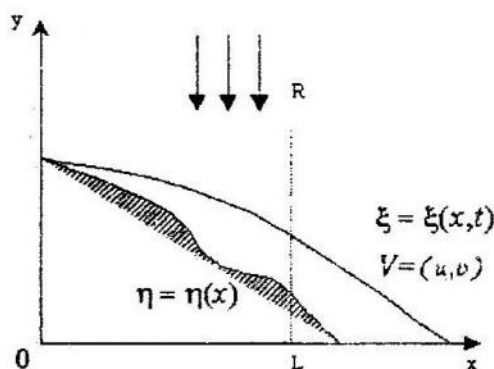
Аналізуючи результати обчислень, бачимо що спеціальний вибір внутрішньої точки суттєво прискорює збіжність методу, більше того, послідовність $m(x^{(k)})$ швидше збігається до розв'язку, ніж межі інтервалу. Ці методи можна ефективно використовувати для розв'язування систем нелінійних рівнянь, в яких матриця похідних системи має домінуючу діагональ.

1. Cornelius H. On the acceleration of an interval- arithmetic iteration method.// Siam journal on numerical analysis. 1983. Vol.20. № 5. P.1010-1022.

УДК 519.6:532.5

П.С. Венгерський, Н.Я. Смушак, Г. А.Шинкаренко

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СТОКУ ВОЛОГИ НА ПОВЕРХНІ ВОДОЗБОРУ



Математична модель руху води по поверхні водозбору залежить від багатьох факторів, а саме рельєфу поверхні, розташування підземних вод, кількості атмосферних опадів тощо, тому важливим є вивід основних рівнянь руху

вологи. В даній роботі записано рівняння руху води для двовимірного випадку, здійснено перехід до одновимірної задачі та сформульовано варіаційну постановку даної задачі.

1. Основні рівняння руху води. Введемо систему декартових координат таким чином, щоб вісь y була спрямована вертикально вгору. Площина руху води розташована під кутом α до осі X . Тоді для опису руху води в площині xOy використаємо наступну систему рівнянь:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1.3)$$

де u, v - складові швидкості; ρ - густина води; p - гідродинамічний тиск; k - коефіцієнт в'язкості; g - прискорення вільного падіння.

На верхній границі потоку $y = \xi(x, t)$ задано кінематичну умову

$$v + R = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad (1.4)$$

де R - інтенсивність джерел притоку води; u_0 - горизонтальна складова швидкості точок вільної поверхні.

На нижній нерухомій границі $y = \eta(x)$ будемо вважати $u = 0$ і задамо умову $v(\eta) = -I$, де I - інтенсивність інфільтрації води в ґрунт.

Оскільки рух води в напрямі осі y відіграє невелику роль, то всі величини, що входять в систему (1.1) - (1.3) можна усереднити по змінній y . Проінтегрувавши рівняння (1.2) від деякого фіксованого y до ξ , отримаємо

$$p(\xi) = \rho R \Lambda + p_a + \rho g (\xi - y),$$

де Λ - швидкість притоку води, p_a - атмосферний тиск.

Усереднимо рівняння (1.1) по глибині потоку від ξ до η , враховуючи умову нестисливості (1.3) і кінематичну умову (1.4), отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta}^{\xi} u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^{\xi} u^2 dy - u_0 R = -\frac{1}{\rho} \int_{\eta}^{\xi} \frac{\partial p}{\partial x} dy + \int_{\eta}^{\xi} \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy.$$

Введемо повні потоки та дотичне напруження

$$q_x = \int_{\eta}^{\xi} u dy; \quad q_y = \int_{\eta}^{\xi} v dy; \quad q_x = \tilde{u}(\xi - \eta);$$

$$F_x = \int_{\eta}^{\xi} \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \frac{1}{\rho} (\tau_{\text{ax}} - \tau_{\text{ax}}),$$

де $\tau_{\text{ax}}, \tau_{\text{ax}}$ - дотичні напруження на дні і вільній поверхні потоку.

Після деяких перетворень отримаємо систему усереднених рівнянь руху. Позначивши $U = (\tilde{u}, h)$, в матричній формі цю систему можемо записати у вигляді

$$A \frac{\partial U}{\partial t} + B \frac{\partial U}{\partial x} = F_R, \quad (1.5)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \tilde{u}h & gh \\ gh & \tilde{u}g \end{pmatrix};$$

$$F_R = \begin{pmatrix} u_0 R - \tilde{u}(R - I) - h \frac{\partial}{\partial x} (R\Lambda) - gh \frac{\partial \eta}{\partial x} - F_x \\ g(R - I) \end{pmatrix}.$$

Доповнимо ці рівняння початковими та крайовими умовами

$$\tilde{u}|_{t=0} = u_*, \quad h|_{t=0} = h_*, \quad \text{на } [0, L] \quad (1.6)$$

$$\tilde{u} = 0, \quad h = 0 \quad \text{при } x = 0. \quad (1.7)$$

2. Ліанеризована початково-крайова задача. Шукані функції $\tilde{u}, h$ подамо у вигляді $\tilde{u} = u_0 + \Delta u$, $h = h_0 + \Delta h$, де Δu та Δh - невідомі збурення характеристик потоку відносно відомих значень u_0 та h_0 . Припускаючи, що квадратами збурень можна знехтувати внаслідок їх малості порівняно з самими збуреннями, отримаємо наступну ліанеризовану початково-крайову задачу для відшукування згаданих збурень:

$$\left\{ \begin{aligned} & h_0 \frac{\partial \Delta u}{\partial t} + h_0 u_0 \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \left(h_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + R - I \right) \Delta u + h_0 g \frac{\partial \Delta h}{\partial x} + \\ & + \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + g \frac{\partial h_0}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (R\Lambda) \right) \Delta h = u_* R - F_x - \\ & - \left(h_0 \frac{\partial u_0}{\partial t} + h_0 u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + h_0 g \frac{\partial h_0}{\partial x} + (R - I) u_0 + g \frac{\partial \eta}{\partial x} h_0 + h_0 \frac{\partial}{\partial x} (R\Lambda) \right); \\ & h_0 \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial h_0}{\partial x} \Delta u + \frac{\partial \Delta h}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \Delta h}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \Delta h = R - I - \left(\frac{\partial h_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h_0}{\partial x} + h_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right); \\ & \Delta u|_{t=0} = \Delta h|_{t=0} = 0; \\ & \Delta u|_{x=0} = \Delta h|_{x=0} = 0. \end{aligned} \right.$$

3. Варіаційна задача. Введемо простори допустимих функцій.

$$V := \{v \in H^1(D), v(0) = 0\}, \quad \Phi := \{v \in H^1(D), v(0) = 0\}.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \text{знайти пару } (u, h) \in L^2(0, T; V \times \Phi) \text{ таку, що} \\ & m_1(u', v) + a_1(u, v) + b_{11}(v, h) - b_{12}(v, h) = f_1(v), \quad \forall v \in V \\ & m_2(h', \varphi) + a_2(h, \varphi) + b_{21}(u, \varphi) + b_{22}(u, \varphi) = f_2(\varphi), \quad \forall \varphi \in \Phi \\ & m_1(u(0), v) = 0, \quad m_2(h(0), \varphi) = 0, \end{aligned} \right.$$

Тут введено наступні білінійні форми.

$$m_1(u, v) = \int_D h_0 u v dx;$$

$$a_1(u, v) = \int_D \left(h_0 u_0 \frac{\partial u}{\partial x} v + \left(h_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + R - I \right) u v \right) dx;$$

$$m_2(h, \varphi) = \int_D h \varphi dx; \quad a_2(h, \varphi) = - \int_D \left(u_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) h dx + u_0 \varphi h|_{x=L};$$

$$b_{11}(v, \varphi) = \int_D \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} (h_0 + \eta) + \frac{\partial}{\partial x} (R\Lambda) \right) v \varphi dx + h_0 g v \varphi|_{x=L}$$

$$b_{12}(v, \varphi) = \int_D g \frac{\partial (h_0 v)}{\partial x} \varphi dx;$$

$$b_{21}(v, \varphi) = \int_D \frac{\partial h_0}{\partial x} v \varphi dx;$$

$$b_{22}(v, \varphi) = \int_D h_0 \frac{\partial v}{\partial x} \varphi dx;$$

$$f_1(v) = \int_D \left(u_* R - F_x - \left(h_0 \frac{\partial u_0}{\partial t} + h_0 u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + h_0 g \frac{\partial h_0}{\partial x} + (R - I) u_0 + g \frac{\partial \eta}{\partial x} h_0 + h_0 \frac{\partial}{\partial x} (R \Lambda) \right) \right) v dx$$

;

$$f_2(v) = \int_D \left(R - I - \left(\frac{\partial h_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h_0}{\partial x} + h_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right) v dx .$$

Дана задача розв'язується методом скінченних елементів з використанням кусково-лінійних апроксимацій.

УДК 517.6

П.С. Венгерський, В.М. Трушевський, П.С. Сеньо

ОЦІНКА ГЛИБИНИ РЕКУРСІЇ ОДНОГО КЛАСУ ДВОСТОРОННІХ МЕТОДІВ

Двосторонні методи у порівнянні з іншими ітераційними методами дають гарантовані оцінки наближення до точних розв'язків. Для оцінки параметрів цих методів можна використати зручний апарат інтервального аналізу. В даному дослідженні розглянуто двосторонні методи ньютонівського типу, в яких обернена матриця похідних наближається верхньою границею інтервального розширення відповідної матриці. Побудовано рекурсивну схему даного класу методів та обчислено оптимальну глибину рекурсії.

1. Методи. Розглянемо загальну ітераційну схему одного з видів двосторонніх методів[1] для розв'язування систем нелінійних рівнянь вигляду $f(x)=0$, де $f: D \subseteq V_n(R) \rightarrow V_n(R)$.

$$\begin{cases} y^{(k,0)} = y^{(k)}, y^{(k,r+1)} = y^{(k,r)} - P^{(k)} f(y^{(k,r)}), y^{(k+1)} = y^{(k,l+1)}, 0 \leq r \leq l, \\ x^{(k,0)} = x^{(k)}, x^{(k,r+1)} = x^{(k,r)} - P^{(k)} f(x^{(k,r)}), x^{(k+1)} = x^{(k,l+1)}, 0 \leq r \leq l, \\ P^{(k+1)} = P^{(k)} + P^{(k)} \sum_{\mu=1}^{m+1} (-1)^\mu [B(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}) P^{(k)} - I]^\mu, k \geq 0, l, m \in N. \end{cases} \quad (1.1)$$

Будемо розглядати її при різних значеннях l та m ($l=0, m=0$; $l=0, m$ -довільне; l, m - довільні). Матриця $P^{(k)}$ - це наближення оберненої

матриці до матриці $B(x^{(k)}, y^{(k)})$, яка обчислюється як верхня оцінка відповідного інтервального розширення.

2. Оцінка глибини рекурсії. Для практичного застосування методів (1.1) важливим є питання вибору оптимальної глибини рекурсії (параметр l). Методику оцінки глибини рекурсії можна знайти в [2]. Для нашого випадку застосуємо інший підхід.

Встановимо глибину рекурсії методу (1.1) при $P^{(k)} = B(x^{(k)}, y^{(k)})^{-l}$. Для цього оцінимо різницю $x^{(k,p+1)} - y^{(k,p+1)}$. Введемо позначення $A^{(k,p)} = A(x^{(k,p)}, y^{(k,p)})$, тоді

$$x^{(k,p)} - y^{(k,p)} = (I - P^{(k)} A^{(k,p-1)})(x^{(k,p-1)} - y^{(k,p-1)}). \quad (2.1)$$

використовуючи це співвідношення для різних p , (2.1) перепишемо у вигляді

$$x^{(k,p+1)} - y^{(k,p+1)} = (I - P^{(k)} A^{(k,p)})(I - P^{(k)} A^{(k,p-1)}) \dots (I - P^{(k)} A^{(k)}) \times (x^{(k)} - y^{(k)}) \quad (2.2)$$

де $A^{(k)} = A^{(k,0)}$, $x^{(k)} = x^{(k,0)}$, $y^{(k)} = y^{(k,0)}$. Розкладемо різницю $I - P^{(k)} A^{(k,p)}$ наступним чином

$$I - P^{(k)} A^{(k,p)} = P^{(k)} B^{(k)} - P^{(k)} A^{(k,p)} = P^{(k)} (B^{(k)} - A^{(k,p)}).$$

Оцінимо норму

$$\|B^{(k)} - A^{(k,p)}\| \leq M_1 \|y^{(k)} - x^{(k)}\|, \dots, \|B^{(k)} - A^{(k)}\| \leq M_p \|y^{(k)} - x^{(k)}\|. \quad (2.3)$$

Тоді, використавши (2.2) та (2.3), запишемо

$$\|x^{(k,p+1)} - y^{(k,p+1)}\| \leq L \|y^{(k)} - x^{(k)}\|^{p+2}. \quad (2.4)$$

Використовуючи (2.4), можемо зробити наступні оцінки

$$\|x^{(k)} - y^{(k)}\| \leq L_1 \|x^{(k-1)} - y^{(k-1)}\|^{p+2}, \dots, \|x^{(k+1)} - y^{(k+1)}\| \leq L_0 \|x^{(0)} - y^{(0)}\|^{(p+2)^{(k+1)}}$$

На n -му кроці будемо мати

$$\|x^{(n)} - y^{(n)}\| \leq M_0 \|x^{(0)} - y^{(0)}\|^{(p+2)^n} \quad (2.5)$$

Введемо позначення $\varepsilon = \|x^{(n)} - y^{(n)}\|$, $X_0 = \|x^{(0)} - y^{(0)}\|$. Тоді (2.5) запишеться у вигляді

$$\varepsilon \leq M_0 \cdot X_0^{(p+2)^n}. \quad (2.6)$$

Нехай на обчислення $x^{(k)}$, $y^{(k)}$ ($k=1, \dots, n$) витрачається $N_1 = N_{1x} + N_{1y} = 2N_{1x}$ обчислень (операцій, інтервал часу), а на обчислення $x^{(k,i)}$, $y^{(k,i)}$ ($i=1, \dots, p+1$) $N_2 = N_{2x} + N_{2y} = 2N_{2x}$ обчислень. Тоді на обчислення $x^{(k+1)}$, $y^{(k+1)}$ при відомих $x^{(k)}$, $y^{(k)}$ витрачається $N_1 + lN_2$

обчислень. Починаючи з $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, для отримання $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ необхідно провести $n(N_1 + lN_2)$ обчислень. Параметр p будемо вибирати так, щоб об'єм обчислень для отримання $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ був мінімальним. Знайдемо вигляд функції $n=n(p)$. Прологарифмувавши співвідношення (2.6), будемо мати

$$(l+2)^n = T, \text{ де } T = (\ln \varepsilon - \ln M_0) / \ln X_0.$$

Звідки

$$n = \ln T / \ln (l+2). \quad (2.7)$$

Тоді на обчислення $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ витрачається $n(N_1 + lN_2) \ln T / \ln (l+2)$ обчислень.

Будемо рахувати параметр p неперервним аргументом, тоді необхідною умовою мінімуму обчислень є

$$\ln T \frac{(l+2)N_2 \ln(l+2) - N_1 - lN_2}{(l+2) \ln^2(l+2)} = 0,$$

або

$$1+a/z = \ln z, \text{ де } z = l+2, a = N_1 / N_2 - 2. \quad (2.8)$$

Отже, оптимальна глибина рекурсії методу визначається зі співвідношення (2.8).

3. Застосування. Розглянемо тестову задачу

$$y'' = \sin y + y, y(0) = 1, y(1) = 1.$$

Дискретизувавши її, застосуємо метод (1.1) з різними параметрами l та m ($n=20$ - розмірність схеми; i - кількість ітерацій; t - час обчислень (мк.с.); $\varepsilon = 10^{-10}$ - похибка обчислень)

$m=1$

Інтервали	$L=0$	$L=1$	$L=2$	$L=3$
$[-1,1]$	$i=10$ $t=41$	$i=9$ $t=37$	$i=8$ $t=34$	$i=8$ $t=36$
$[-10,10]$	$i=11$ $t=44$	$i=9$ $t=38$	$i=9$ $t=40$	$i=8$ $t=37$
$[-100,100]$	$i=11$ $t=45$	$i=9$ $t=38$	$i=9$ $t=41$	$i=8$ $t=37$

$m=2$

Інтервали	$L=0$	$L=1$	$L=2$	$L=3$
$[-1,1]$	$i=10$ $t=52$	$i=9$ $t=48$	$i=8$ $t=44$	$i=8$ $t=47$
$[-10,10]$	$i=10$ $t=52$	$i=9$ $t=48$	$i=8$ $t=44$	$i=8$ $t=46$
$[-100,100]$	$i=10$ $t=57$	$i=9$ $t=48$	$i=8$ $t=44$	$i=8$ $t=46$

m=3

Інтервали	L=0	L=1	L=2	L=3
[-1,1]	i=10 t=64	i=9 t=59	i=8 t=53	i=8 t=55
[-10,10]	i=10 t=64	i=9 t=59	i=8 t=53	i=8 t=54
[-100,100]	i=11 t=71	i=9 t=59	i=8 t=52	i=8 t=55

З отриманих результатів видно, що збіжність схеми (1.1) суттєво залежить від вибору параметрів l та m . При збільшенні параметрів m та l ми хочемо прискорити збіжність методу, але існують такі оптимальні значення m_0 і l_0 , при збільшенні яких збіжність не покращується. Для даного прикладу $m_0=2$, $l_0=2$.

1. Венгерський П.С., Трушевський В.М., Сеньо П.С. Використання інтервального аналізу для побудови одного типу двосторонніх методів для розв'язування систем нелінійних рівнянь. Львів, 1998. - 24с. - Рукопис деп. в УкрНДІНТІ (в друці).
2. Давиденко Д.Е. О приложении метода вариации параметра к теории нелинейных функциональных уравнений // Укр.мат.журн. 1955., Т.7. №1.

УДК 517.6

В.Д. Вовк, Р.Б. Петришин, Г.А. Шинкаренко

ВЕРХІВКА СИСТЕМИ КЛАСІВ ПРОГРАМНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ

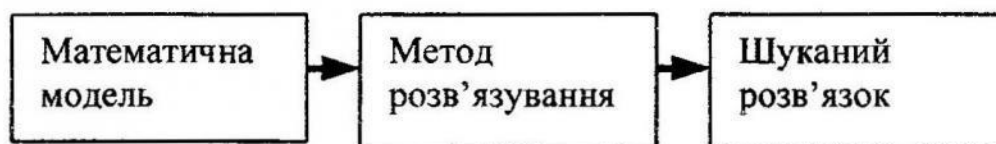
Застосування об'єктного підходу не має альтернативи при розробці складних програмних систем. Оскільки складність реалізації окремих чисельних методів, наприклад, методу скінченних елементів (МСЕ), сумнівів не викликає, то зрозумілими є намагання розробників використовувати засоби об'єктно-орієнтованого програмування при створенні своїх систем. Проте у більшості випадків це призводить до збільшення в загальному затрат на створення програмного продукту, а ефективність програми не тільки не зростає, а часто й зменшується. Причиною цього є те, що видима складність структури математичних методів належить до іншої

категорії, ніж структурна складність великих інформаційних систем, при створенні яких об'єктний підхід дає максимальний вииграш. Одним із підтверджень сказаного є відомий факт, що питома вага стандартних операцій лінійної алгебри в реалізаціях чисельних методів становить понад 70 відсотків.

Все ж використання об'єктного підходу при чисельному аналізі математичних моделей може бути ефективним, а у багатьох випадках – і необхідним. Йдеться про створення структурно-складних програмних комплексів, здатних проводити дослідження декількох математичних моделей багатьма методами. Тільки у цьому випадку накладні видатки на підтримку об'єктного підходу окуповуються багаторазовим використанням і гнучкістю раніше написаного програмного коду.

Проте розробка окремої системи класів для кожної конкретної, нехай навіть досить загальної, задачі апріорі обмежує область використання створеного програмного забезпечення. Подальше ж його адаптування до застосувань, що не входять у наперед визначене коло задач, тим більше не ефективне, чим більший радіус цього кола. У даній роботі розглядається ідея створення єдиної для всіх чисельних методів ієрархії класів, реалізація і підтримка якої іншими розробниками програмного забезпечення дала б можливість використати переваги об'єктного підходу повною мірою. Нижче запропоновано варіант верхівки повної структури класів чисельного аналізу з прикладом деталізації однієї гілки до рівня МСЕ.

У вершині ієрархії лежать три базові класи



Наведемо конкретний вигляд на мові C++ тільки першого:

```

Class TMathModel
{
  TOperator *F, *G; // Рівняння моделі і крайових умов
  TFunctional *f, *g; // Дані математичної моделі
  TGeometry *Г; //Розглядувана область визначення
  розв'язку

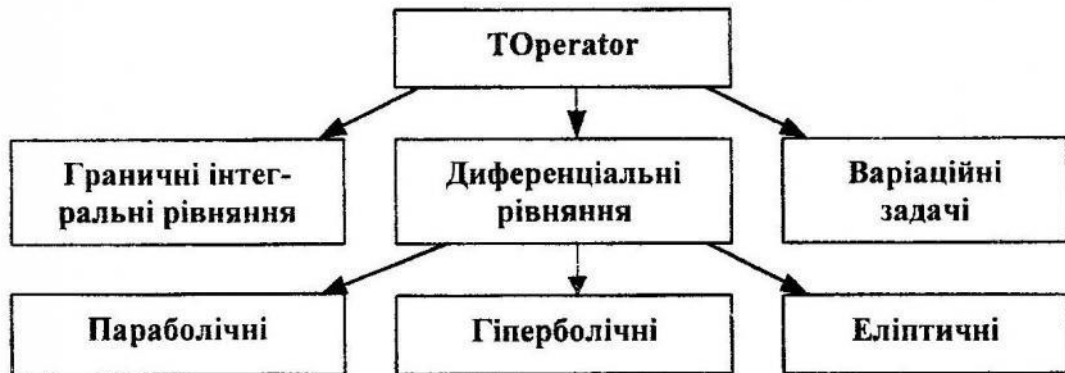
```

```

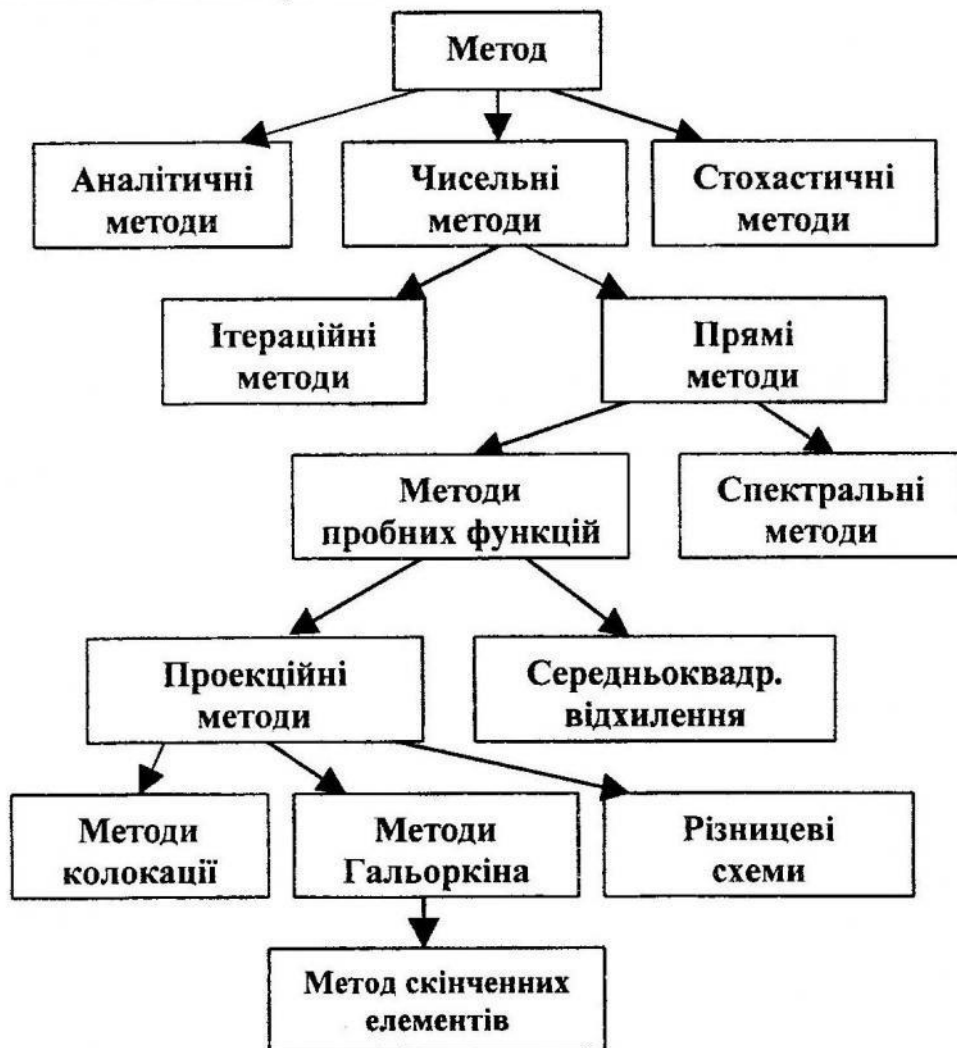
  TmathModel (); // Конструктор
}

```

Зокрема, тип **TOperator** є вершиною розгалуженої системи класів:



Клас методів має три основні гілки:



Зрозуміло, що наведена тут ієрархія класів не є ні достатньо повною, ні достатньо детальною. Зокрема, класи **Ітераційні методи**, **Спектральні методи** лежать в основі розгалужених далі гілок методів. Проте наведений вибір кожного пункту даної ієрархії має достатнє математичне обґрунтування і може служити початковим

наближенням для створення загальноприйнятої структури класів чисельних методів.

Зрозуміло, що для покриття затрат на створення такої системи класів (як і будь-якої іншої програмної системи) потрібна певна “критична маса” організаційних заходів, програмних напрацювань і користувачів. Проте приклади використання відомих структур класів (наприклад, MFC фірми Microsoft) свідчать про необхідність та ефективність такої розробки.

УДК 519.6

В.Д. Вовк, Р.Б. Петришин, Г.А. Шинкаренко

РОЗВ'ЯЗУВАНІСТЬ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

1. Постановка початково-крайової задачі. Для дослідження закономірностей фізичних процесів у пружних тілах, де враховується скінченна швидкість поширення тепла, розглянемо початково-крайову задачу узагальненої термопружності, сформульовану Підстригачем та Коляно.

2. Варіаційна задача. Ввівши простори допустимих функцій та простори лінійних неперервних функціоналів, можемо сформулювати відповідну варіаційну задачу узагальненої термопружності:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } u_0 \in V, v_0 \in H, \theta_0 \in Z, q_0 \in R, \mu \in L^2(0, T; V' \times G'); \\ \text{знайти трійку } \psi = (u, \theta, q) \in L^2(0, T; V \times G \times R) \text{ таку, що} \\ m(u''(t), v) + a(u'(t), v) + c(u(t), v) - b(\theta(t), v) = \langle l(t), v \rangle, \\ s(\theta'(t), \xi) + d(q(t), \xi) + b(\xi, u'(t)) = \langle \mu(t), \xi \rangle, \\ \tau, k(q'(t), r) - d(r, \theta(t)) + k(q(t), r) = 0, \\ m(u'(0) - v_0, v) = 0, c(u(0) - u_0, v) = 0 \forall v \in V, \\ s(\theta(0) - \theta_0, \xi) = 0, k(q(0) - q_0, r) = 0 \forall \xi \in G, \forall r \in R. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Коефіцієнт $\tau_r \geq 0$ називається часом термічної релаксації і при $\tau_r = 0$ варіаційна задача узагальненої термопружності збігається з варіаційною задачею класичної термопружності.

3. Напівдискретизація Гальоркіна та енергетичне рівняння. Використовуючи напівдискретизацію Гальоркіна за просторовими змінними можемо записати задачу для знаходження розв'язку варіаційної задачі для якої маємо таке енергетичне рівняння і наступні енергетичні норми

$$\frac{1}{2} \|\psi_h(t)\|^2 + \int_0^t \|\psi_h(\tau)\|^2 d\tau = \int_0^t [l(\tau), u'_h(\tau) + \mu(\tau), \theta_h(\tau)] d\tau + \frac{1}{2} \|\psi_h(0)\|^2 \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \|\psi_h(t)\|^2 := m(u'_h(t), u'_h(t)) + c(u_h(t), u_h(t)) + s(\theta_h(t), \theta_h(t)) + \tau_r k(q_h(t), q_h(t)), \\ \|\psi_h(t)\|^2 := a(u'_h(t), u'_h(t)) + k(q_h(t), q_h(t)) \quad \forall \psi_h = (u_h, \theta_h, q_h) \in \Phi_h = V_h \times G_h \times R_h. \end{cases} \quad (3.2)$$

Виходячи з енергетичного рівняння (3.1) і нерівностей Буняковського-Шварца приходимо до наступної апіорної оцінки напівдискретних апроксимацій Гальоркіна

$$\frac{1}{2} \|\psi_h(t)\|^2 + \int_0^t \|\psi_h(\tau)\|^2 d\tau \leq K \left\{ \|v_0\|_H^2 + \|u_0\|_R^2 + \|\theta_0\|_Z^2 + \|q_0\|_R^2 \right\} + \int_0^t \left\{ \|l(\tau)\|_*^2 + \|\mu(\tau)\|_*^2 \right\} d\tau \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall h > 0. \quad (3.3)$$

4. Коректність варіаційної задачі.

Теорема. (про коректність задачі узагальненої термопружності).

Варіаційна задача узагальненої термопружності (2.1) допускає єдиний розв'язок $\psi = (u, \theta, q)$ такий, що

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0, T; V), u' \in L^2(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), u'' \in L^2(0, T; V'), \\ \theta \in L^\infty(0, T; Z) \cap L^2(0, T; G), \theta' \in L^2(0, T; G'), \\ q \in L^\infty(0, T; Z) \cap L^2(0, T; R), q' \in L^2(0, T; R'), \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{2} \|\psi_h(t)\|^2 + \int_0^t \|\psi_h(\tau)\|^2 d\tau \leq K \left\{ \|v_0\|_H^2 + \|u_0\|_R^2 + \|\theta_0\|_Z^2 + \|q_0\|_R^2 \right\} + \int_0^t \left\{ \|l(\tau)\|_*^2 + \|\mu(\tau)\|_*^2 \right\} d\tau \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.2)$$

де $K = \text{const} > 0$ не залежить від величин, що нас цікавлять.

Доведення теореми наведемо в три етапи.

1). *Існування розв'язку.* Як випливає з (3.3), послідовності напівдискретних апроксимацій $\{u_h, \theta_h, q_h\}$ (відпов. $\{u'_h\}$) утворюють при $h > 0$ обмежені множини в просторах $L^\infty(0, T; \mathcal{V})$, $L^\infty(0, T; Z) \cap L^2(0, T; G)$, $L^\infty(0, T; Z) \cap L^2(0, T; R)$ (відпов. $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; \mathcal{V})$).

Тому, зокрема, з послідовності $\psi_h = (u_h, \theta_h, q_h)$ можна вибрати збіжну підпослідовність $\psi_\Delta = (u_\Delta, \theta_\Delta, q_\Delta)$ і пару $\psi = (u, \theta, q)$ таку, що

$$\begin{cases} (u_\Delta, \theta_\Delta, q_\Delta) \rightarrow (u_h, \theta_h, q_h) \text{ в } L^2(0, T; V \times G \times R) \text{ слабо,} \\ u'_\Delta \rightarrow u' \text{ в } L^2(0, T; H) \text{ слабо.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Залишається показати, що знайдена таким чином трійка $\psi = (u, \theta, q)$ з простору $L^2(0, T; V \times G \times R)$ є розв'язком задачі (2.1).

Нехай $v_1, \dots, v_N$, $\xi_1, \dots, \xi_M$ і $r_1, \dots, r_S$ – базиси просторів $V_h \subset V$, $G_h \subset G$ і $R_h \subset R$. Введемо простір $W = \{g \in C^1([0, T]) \mid g(T) = 0\}$ і розглянемо функції виду

$$v_h(t) = \sum_{i=1}^N g_i(t) v_i, \quad \xi_h(t) = \sum_{i=1}^M \hat{g}_i(t) \xi_i, \quad r_h(t) = \sum_{i=1}^S \tilde{g}_i(t) r_i. \quad (4.4)$$

Підставляючи ψ_Δ в рівняння напівдискретизованої задачі, якщо $v = v_h$, $\xi = \xi_h$ і $r = r_h$, та інтегруючи їх на проміжку $(0, T)$ знайдемо, що

$$\begin{cases} \int_0^T \{-m(u'_\Delta, v'_h) + a(u'_\Delta, v_h) + c(u_\Delta, v_h) - b(\theta_\Delta, v_h) - \langle l, v_h \rangle\} d\tau = -m(u'_\Delta(0), v_h(0)), \\ \int_0^T \{-s(\theta_\Delta, \xi_h) + d(q_\Delta, \xi_h) + b(\xi_h, u'_\Delta) - \langle \mu, \xi_h \rangle\} d\tau = s(\theta_\Delta(0), \xi_h(0)), \\ \int_0^T \{\tau, k(q_\Delta, r_h) - d(r_h, \theta_\Delta) + k(q_\Delta, r_h)\} d\tau = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Переходячи в цих рівняннях до границі при $\Delta \rightarrow 0$, а потім знову застосовуючи інтегрування по частинах, отримаємо, що

$$\begin{cases} \int_0^T \{-m(u', v_h') + d(u', v_h) + c(u, v_h) - b(\theta, v_h) - \langle l, v_h \rangle\} d\tau = m(u(0) - v(0), v_h(0)) \forall v_h \in C^1([0, T]; V_h), \\ \int_0^T \{-s(\theta, \xi_h) + d(q, \xi_h) + b(\xi_h, u') - \langle \mu, \xi_h \rangle\} d\tau = s(\theta(0) - \theta(0), \xi_h(0)) \forall \xi_h \in C^1([0, T]; G_h), \\ \int_0^T \{\tau, k(q, r_h) - d(r_h, \theta) + k(q, r_h)\} d\tau = 0 \forall r_h \in C^1([0, T]; R_h). \end{cases} \quad (4.6)$$

Але оскільки V_h , G_h , R_h щільні в просторах V , G , R відповідно, то останні рівняння виконуються для кожного $\forall v \in C^1([0, T]; V)$, $\forall \xi \in C^1([0, T]; G)$ і $\forall r \in C^1([0, T]; R)$; в силу (3.2) показуємо, що границя $\psi = (u, \theta, q)$, яка визначається в (4.5), задовольняє всі рівняння варіаційної задачі (2.1).

2). *Обмеженість розв'язку.* Шляхом граничного переходу в (3.3) при $h \rightarrow 0$ (а це можливо!) переконаємось, що для розв'язку $\psi = (u, \theta, q)$ задачі (2.1) також справедлива апріорна оцінка (4.2).

3). *Єдиність розв'язку* безпосередньо випливає з апріорної оцінки (4.2), якщо використати доведення від супротивного.

УДК 518:517.948

Я.С. Гарасим, Б.А. Остудін

ПРО ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО РОДУ В ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ

Вибір конкретного наближеного алгоритму при розв'язуванні граничних задач математичної фізики обумовлюється багатьма чинниками, а саме, типом диференціального рівняння, виглядом початкових та крайових умов, класом допустимих граничних поверхонь, загальною розмірністю задачі і т.п. Зокрема, для розв'язання досить широкого класу зовнішніх задач теорії

потенціалу на незамкнених поверхнях природно застосувати апарат граничних інтегральних рівнянь (ІР), який дозволяє сформулювати проблему у вигляді еквівалентного ІР. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що в $\mathbf{R}^3$ міститься лише одна достатньо гладка поверхня S . Розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля в області $\Omega := \mathbf{R}^3 \setminus \bar{S}$, якщо на S задане граничне значення потенціалу $g(P)$ ($P \in S$). Як показано в [1, 2], дана проблема зводиться до розв'язання ІР першого роду зі слабкою особливістю в ядрі

$$K\tau := \int_S K(P, M)\tau(M)dS_M = g(P), \quad P \in S, \quad (1)$$

яке має єдиний розв'язок для довільної функції $g(P) \in H^{1/2}(S)$.

Розглянемо питання наближеного розв'язування ІР (1) в припущенні, що поверхня S задається параметричними рівняннями $x = x(\alpha, \beta)$, $y = y(\alpha, \beta)$, $z = z(\alpha, \beta)$ ($(\alpha, \beta) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$). Враховуючи сингулярну поведінку густини τ на ребрі S , поділимо проміжок зміни параметрів α і β на N_α та N_β рівних частин, відступивши при цьому від границі відповідно на δ_α і δ_β . В результаті отримаємо наступну сітку

$$\begin{cases} \alpha_k := H_\alpha k - 1 + \left(\left[\frac{N_\alpha - k}{N_\alpha} \right] - \left[\frac{k}{N_\alpha} \right] \right) \delta_\alpha, k = \overline{0, N_\alpha}, \\ \beta_l := H_\beta l - 1 + \left(\left[\frac{N_\beta - l}{N_\beta} \right] - \left[\frac{l}{N_\beta} \right] \right) \delta_\beta, l = \overline{0, N_\beta}. \end{cases}$$

Тут $H_\alpha := 2/N_\alpha$, $H_\beta := 2/N_\beta$, а квадратні дужки означають цілу частину внутрішнього виразу. Виберемо центр кожного елемента $[\alpha_{k-1}, \alpha_k] \times [\beta_{l-1}, \beta_l]$, $k = \overline{1, N_\alpha}$, $l = \overline{1, N_\beta}$ за початок локальної системи координат $0\xi\eta$ виконавши заміну змінних

$$\begin{cases} \alpha(\xi, \eta) := \frac{1}{2} H_\alpha (2k - 1 + \xi) - 1 + (\Delta_{\alpha k}^{(-)} - \Delta_{\alpha k}^{(+)} \xi), \\ \beta(\xi, \eta) := \frac{1}{2} H_\beta (2l - 1 + \eta) - 1 + (\Delta_{\beta l}^{(-)} - \Delta_{\beta l}^{(+)} \eta), \end{cases} \quad -1 \leq \xi, \eta \leq 1,$$

де

$$\begin{cases} \Delta_{\alpha k}^{(-)} := \left(\left[\frac{N_\alpha - k + 1}{N_\alpha} \right] - \left[\frac{k}{N_\alpha} \right] \right) \frac{\delta_\alpha}{2}, \\ \Delta_{\alpha k}^{(+)} := \left(\left[\frac{N_\alpha - k + 1}{N_\alpha} \right] + \left[\frac{k}{N_\alpha} \right] \right) \frac{\delta_\alpha}{2}, \end{cases}$$

а $\Delta_{\beta l}^{(-)}$ і $\Delta_{\beta l}^{(+)}$ вводяться аналогічно заміною у попередньому записі k на l та α на β . Позначимо якобіан переходу до системи $0\xi\eta$ через

$$\partial_{kl} = \left(\frac{1}{2} H_\alpha - \Delta_{\alpha k}^{(+)} \right) \left(\frac{1}{2} H_\beta - \Delta_{\beta l}^{(+)} \right).$$

Для апроксимації шуканої густини $\tau(\alpha, \beta)$ в межах кожного елемента використаємо бікубічні базисні функції (див. рис. 1).

$$\tau(\alpha(\xi, \eta), \beta(\xi, \eta)) := \sum_{k=1}^{N_\alpha} \sum_{l=1}^{N_\beta} \sum_{i=3k-3}^{3k} \sum_{j=3l-3}^{3l} \tau_{ij} \psi_{ij}(\xi, \eta),$$

де

$$\tau_{ij} := \tau \left(\alpha_k - \left(k - \frac{i}{3} \right) H_\alpha + \Delta_{\alpha k}^{(i)}, \beta_l - \left(l - \frac{j}{3} \right) H_\beta + \Delta_{\beta l}^{(j)} \right),$$

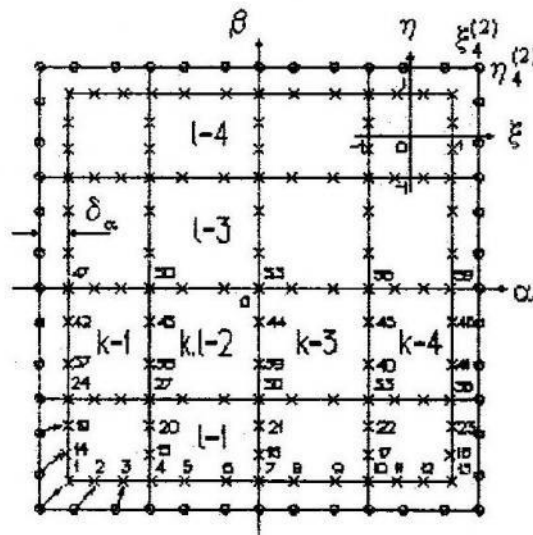


Рис. 1.

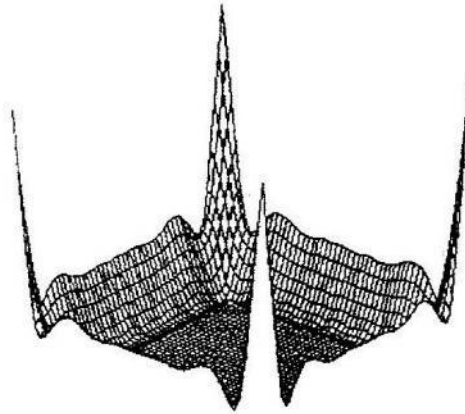


Рис.2.

$$\begin{cases} \Delta_{\alpha k}^{(i)} := \left[\frac{N_\alpha - k + 1}{N_\alpha} \right] \frac{3-i}{3} \delta_\alpha - \left[\frac{k}{N_\alpha} \right] \frac{i+3-3N_\alpha}{3} \delta_\alpha, \\ \Delta_{\beta l}^{(j)} := \left[\frac{N_\beta - l + 1}{N_\beta} \right] \frac{3-j}{3} \delta_\beta + \left[\frac{l}{N_\beta} \right] \frac{j+3-3N_\beta}{3} \delta_\beta, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \psi_{ij}(\xi, \eta) := & \frac{1}{64} (1 + (-1)^i) (1 + (-1)^{k+i/3} \xi) \times \\ & \times (1 + (-1)^{j+l/3} \eta) (9\xi^2 + 9\eta^2 - 10) + \frac{9}{64} (1 - (-1)^i) \times \\ & \times (1 + \xi_0 \xi + \eta_0 \eta) (1 - \eta_0^2 \xi^2 - \xi_0^2 \eta^2) (1 + (-1)^q 3\eta_0 \xi - (-1)^q 3\xi_0 \eta), \\ r = & \left[\frac{2i+j}{3} \right] + \left[\frac{2j+1}{3} \right], \quad q = \left[\frac{2i+2}{3} \right] + \left[\frac{i}{3} \right] + \left[\frac{j+1}{3} \right] + k + l + 1, \\ \xi_0 := & \frac{1}{2} ((-1)^{i_0} - (-1)^{j_0}), \quad \eta_0 := \frac{1}{2} ((-1)^{i_0} + (-1)^{j_0}), \\ i_0 := & \left[\frac{i}{3} \right] + \left[\frac{j}{3} \right] + k + l + 1, \quad j_0 := \left[\frac{i}{3} \right] + \left[\frac{j+2}{3} \right] + k + l + 1, \end{aligned}$$

причому беруться до уваги лише ті індекси i та j , для яких виконується умова

$$\left(\left\{ \frac{i}{3} \right\} = 0 \right) \vee \left(\left\{ \frac{j}{3} \right\} = 0 \right) = \text{true}.$$

Фігурні дужки тут означають дробову частину внутрішнього виразу.

Отже, дискретний аналог IP (1) запишеться у вигляді

$$\sum_{k=1}^{N_\alpha} \sum_{l=1}^{N_\beta} \sum_{i=3k-3}^{3k} \sum_{j=3l-3}^{3l} \tau_{ij} I_{kl}^{(ij)}(\alpha_0, \beta_0) = g(\alpha_0, \beta_0), \quad -1 \leq \alpha_0, \beta_0 \leq 1. \quad (2)$$

Тут

$$I_{kl}^{(ij)}(\alpha_0, \beta_0) := \partial_{kl} \int_{\xi_k^{(1)} \eta_l^{(1)}}^{\xi_k^{(2)} \eta_l^{(2)}} K(\alpha_0, \beta_0; \xi, \eta) J(\xi, \eta) \psi_{ij}(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

J – якобіан переходу від поверхневого інтеграла до подвійного,

$$\xi_k^{(1)} := -\frac{H_\alpha + \left[\frac{N_\alpha - k + 1}{N_\alpha} \right] \delta_\alpha}{H_\alpha - \left[\frac{N_\alpha - k + 1}{N_\alpha} \right] \delta_\alpha}, \quad \xi_k^{(2)} := \frac{H_\alpha + \left[\frac{k}{N_\alpha} \right] \delta_\alpha}{H_\alpha - \left[\frac{k}{N_\alpha} \right] \delta_\alpha},$$

підставивши на місце k та α відповідно l та β отримаємо аналогічне представлення для $\eta_l^{(1)}$ і $\eta_l^{(2)}$. Вибравши контрольні значення (α_0, β_0) у вузлових точках із (2), отримаємо СЛАР для визначення τ_{ij} . Відзначимо, що при цьому проблема коректного заповнення матриці СЛАР не є тривіальною. Зокрема, пропонується перенумерувати всі невідомі τ_{ij} , наприклад, починаючи від нижнього лівого кута зліва направо та знизу вверх. Тоді зв'язок між τ_{ij} та його порядковим номером n у рівнянні (2) є

$$n := (3N_\alpha + 1) \left\lfloor \frac{j+2}{3} \right\rfloor + (N_\alpha + 1) \left\lfloor \frac{2j}{3} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{j}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j+2}{3} \right\rfloor + 1 \right) i + \left(\left\lfloor \frac{j+2}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j}{3} \right\rfloor \right) \left\lfloor \frac{i}{3} \right\rfloor + 1.$$

Аналогічним чином можна перенумерувати контрольні точки (α_0, β_0) . Зауважимо, що при наявності декількох поверхонь в останній формулі необхідно внести поправку на кількість невідомих на розглянутих вже поверхнях.

Рис. 2 ілюструє розподіл густини ІР, отриманий описаною методикою на рівномірній сітці $N_\alpha = N_\beta = 10$ ($\delta_\alpha = \delta_\beta = 0.05$) для квадратного електрода з потенціалом $g(P) \equiv 1$. Контрольний розрахунок основної задачі проводився на пластині $I_\Gamma(u_{k+1}, \lambda_k) = I_{\bar{\Gamma}}(u_{k+1}, \lambda_k)$ у проміжних точках. При цьому середньоквадратичне відхилення від очікуваного результату становило 0,2%.

На закінчення відзначимо таке. Характерною особливістю описаної методики є те, що при певних обмеженнях на геометрію граничних поверхонь вдається обчислити аналітично всі двовимірні інтеграли (включаючи невідомі), які входять у зображення

коефіцієнтів названих СЛАР. Такий спосіб чисельного аналізу досить широкого класу практично важливих задач суттєво прискорює час їх розв'язання.

1. Гарасим Я.С., Остудін Б.А. Наближене розв'язування деяких граничних задач теорії потенціалу методом інтегральних рівнянь без використання кубатурних формул// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1997. Вип. 46. С. 73-82. 2. Sybil Yu.M. Three dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface// Математичні студії. 1997. Т. 8. № 2. С. 79-96.

УДК 517.958:519.6

Н.П. Головач, І.І. Дияк

АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ДЕФОРМАЦІЙУ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ПМГЕ

Проводиться дослідження квазістатичної задачі термопружності на основі застосування прямого методу граничних елементів (ПМГЕ) в однорідній та ізотропній області V із границею S на основі рівнянь

$$\partial_j \Sigma_{ij} = 0, \quad x \in V, \quad (1)$$

$$\Sigma_{ij} n_j = T_i, \quad x \in S_t \quad (2)$$

$$u_i = \tilde{u}_i, \quad x \in S_u \quad (3)$$

$$\text{де } \Sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \frac{\alpha E \theta}{1 - 2\nu} \delta_{ij}; \quad T_i = t_i + \frac{\alpha E \theta}{1 - 2\nu} n_i.$$

Тут σ_{ij} - компоненти тензора напружень; t_i - компоненти поверхневих навантажень; θ - приріст температури; α - коефіцієнт температурного розширення; E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуасона і δ_{ij} - символ Кронекера.

Крім цього, має місце закон Гука

$$\Sigma_{ij} = \lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \quad (4)$$

та співвідношення Коші

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad (5)$$

де λ і μ - коефіцієнти Ламе, E_{ij} - компоненти тензора деформації.

Для розв'язання вище сформульованої задачі (1)-(5) необхідне задання

- а) геометрії границі області розв'язання задачі;
- б) теплофізичних характеристик матеріалу (α, ν, E);
- в) розподілу температури в області V . (Розв'язок задачі нестационарної теплопровідності отриманий ПМГЕ [1] на тій же гранично-елементній сітці);
- г) граничних умов;

Основні співвідношення ПМГЕ для задачі термопружності мають вигляд [2]

$$c_{ij}(x)u_j(x) = \frac{\alpha E}{1-2\nu} \int_V \partial_j U_{ij}(x, y) \theta(y) dv_y + \int_S U_{ij}(x, y) t_j(y) ds_y - \int_S T_{ij}(x, y) u_j(y) ds_y. \quad (6)$$

Де U_{ij} - фундаментальний розв'язок [2].

Тут розглянемо питання, пов'язані з обчисленням інтегралу впливу температурного поля. Запишемо ядро

$$\partial_j U_{ij} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{4\pi E(1-\nu)R^2} (y_i - x_i).$$

Порядок сингулярності вище записаного ядра є $\frac{1}{R}$.

Інтегрування по області доданку з даним ядром, при обчисленні поля переміщень, не створює додаткових обчислювальних труднощів. Проте вони з'являються у випадку обчислення компонентів тензора напружень, тому що інтеграл, який враховує вплив температурного навантаження матиме порядок сингулярності $\frac{1}{R^2}$. Пропонується спосіб обчислення інтегралу на основі використання формули Гріна з врахуванням рівняння нестационарної теплопровідності. Дана методика дозволяє звести інтеграл до обчислення двох граничних інтегралів та інтегралу по області з ядром, порядок сингулярності якого $\frac{1}{R}$ [3]. Чисельно задачу квазістатичної термопружності досліджуємо ПМГЕ у постановці Бубнова-Гальоркіна [2].

Для апробації запропонованої схеми врахування впливу температурного поля розв'язана задача термопружності для

пластини, умови навантаження, якої зображено на рис. 1. Тут q – заданий тепловий потік.

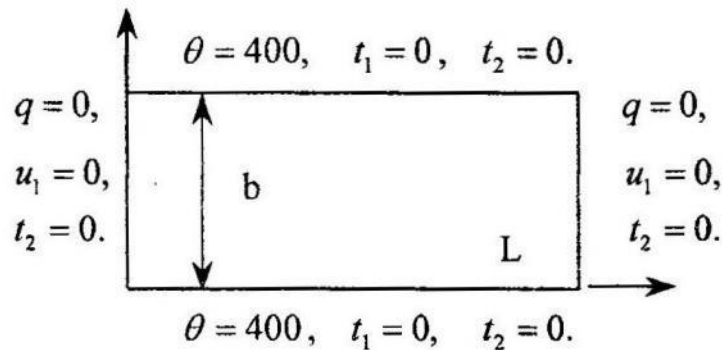


Рис. 1

Обчислення проводились для наступних параметрів
 $E = 5,668 \times 10^{10} \frac{H}{m^2}$; коефіцієнт теплопровідності
 $k = 8,19 \times 10^{-5} \frac{m^2}{c}$;

$$\nu = 0,37; \alpha = 2,786 \times 10^{-5} \frac{1}{C^0}; \quad b = 0,05m; \quad L = 0,2m.$$

Апроксимація проводилась на 100 лінійних ізопараметричних граничних елементах.

На рис. 2 подано результат чисельного обчислення напружень $\sigma_{11}(\nu - 1)/\alpha E$ на лінії $x = 0,1m$ у два моменти часу.

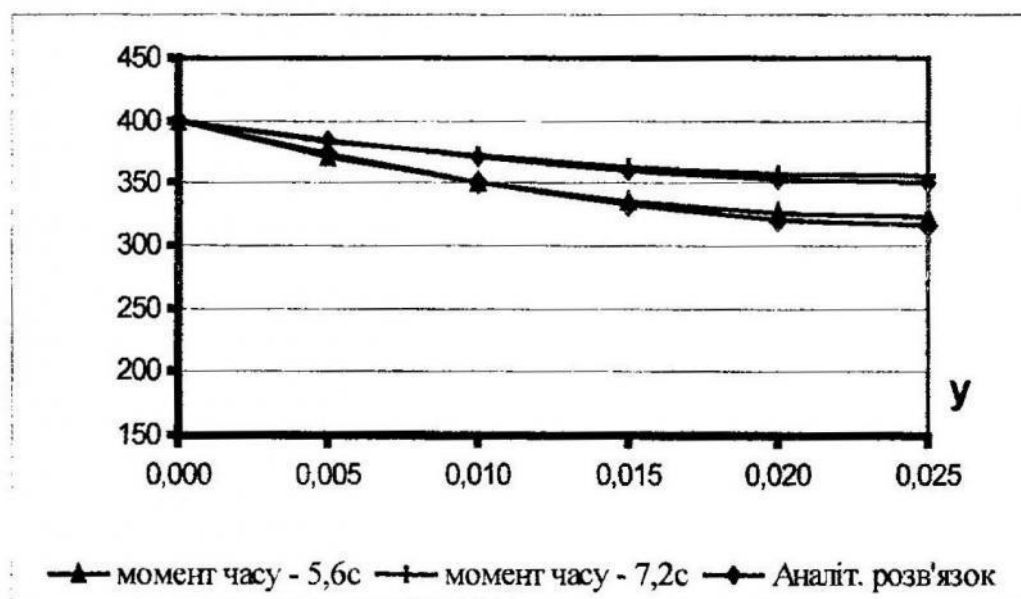


Рис.2

Як видно із наведених графів, чисельні результати добре узгоджуються з аналітичним розв'язком [4]. Максимальна відносна похибка становить не більше 2%, що свідчить про ефективність запропонованого підходу.

І.Головач Н.П. Застосування прямого методу граничних елементів для чисельного розв'язання задачі нестационарної теплопровідності. // Вісн. ЛДУ. Сер.мех.-мат. 1995. Вип.42. С.96-101. 2. Головач Н.П., Дияк І.І. Прямий метод граничних елементів чисельного розв'язування задачі термопружності. // Вісн. ЛДУ. Сер.мех.-мат. 1996. Вип.44. С.57-62. 3. Chaudouet A. Three-dimensional transient thermo-elastic analyses by the BIE method. // Int. J. Num. Meth. Eng., 1987, Vol. 24, pp. 25-45. Sládek V, Sládek J. Computation of thermal stresses in quasi-static non-stationary thermoelasticity using boundary elements. // Int. J. Num. Meth. Eng., 1989. Vol. 28., pp. 1131-1144.

УДК 519.689

В.В. Головащенко, В.В. Лихочвор, Г.Г. Цегелик

ЕКСПЕРТНА СИСТЕМА ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ВИБОРУ ОПТИМАЛЬНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ ВИРОЩУВАННЯ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ КУЛЬТУР

Нами проводиться робота над розробкою експертної системи підтримки прийняття рішень вибору оптимальної технології вирощування с.-г. культур – “ТехноЕксперт”. Предметною областю для розробки прототипу цієї експертної системи була вибрана технологія вирощування озимої пшениці.

Згідно з класифікацією, поданою в [1], “ТехноЕксперт” належить до експертних систем консультаційного типу, тому що основною функцією даної експертної системи є надання порад щодо вибору оптимальної технології вирощування тієї чи іншої с.-г. культури упродовж усього технологічного циклу – від вибору посівної площі до збирання урожаю [2].

Загальна структура експертної системи “ТехноЕксперт” подана на рис.1.



Рис. 1. Структура експертної системи "ТехноЕксперт"

Основними компонентами даної експертної системи є:

- База знань
- Машина логічного виводу
- Підсистема управління базою знань
- Інтерфейс з користувачем

Інтерфейс з користувачем та підсистема управління базою знань будуються за допомогою універсальної мови програмування Borland Delphi 3.0. База знань реалізується за допомогою спеціалізованого для розробки експертних систем засобу програмування FuzzyCLIPS 6.0. При цьому використовується універсальна мова програмування Borland Delphi 3.0. Машина логічного виводу є однією з основних складових частин мови FuzzyCLIPS 6.0 [3, 4].

База знань складається з таких компонентів як:

- Дані – реляційна база даних.
- Процедурні знання – процедури або функції, які згідно власного алгоритму обчислюють результат, використовуючи попередньо отриману деяку вхідну інформацію.
- Правила – опис подій, що трапляються, або дій, які потрібно виконати за деяких наявних умов чи обставин.

Узагальнена BNF-форма правил експертної системи "ТехноЕксперт" наступна:

```

<ПРАВИЛО> ::= <ЯКЩО частина> => <ТО ДІ частина>
               <коеф.впевненості>
<ЯКЩО частина> ::= <умовний елемент>*
<умовний елемент> ::= <шаблон-зразок> | <not-UE> | <and-UE> |
                     <or-UE> | <виклик функції>
<not-UE> ::= not <умовний елемент>
<and-UE> ::= <умовний елемент> and <умовний

```


	елемент>
<or-УЕ>	::= <умовний елемент> or <умовний елемент>
<шаблон-зразок>	::= зразок, з яким зпівставляється фактичний вміст оперативної пам'яті машини логічного виводу
<виклик функції>	::= здійснюється виклик функції, яка повертає деякий результат. Саме таким чином використовуються процедурні знання.
<ТОДІчастина>	::= набір дій, що повинні бути виконані
<коэф. Впевненості>	::= число в межах від 0 до 1, яка визначає міру можливості того, що при виконанні ЯКЩОчастини виконається ТОДІчастина

Дані, що містяться в базі знань, організовані як реляційна база даних. Дані передбачено поділяти на два види:

- чіткі – дані, що констатують деякі чітко визначені факти
- нечіткі або неповні дані – це дані, що не мають чітких значень і є відносними.

Представлення такого роду інформації як нечіткі або неповні дані базується на теорії нечітких множин. Одним з прикладів нечітких даних, взятих з системи “ТехноЕксперт”, є поняття *урожай до 60 ц/га*. Таке поняття представляється за допомогою нечіткої множини, зображеної на рис. 2.



Рис. 2. Нечітка множина “урожай до 60 ц/га”

Машина логічного виводу реалізована як система зпівставлення зі зразком та система логічного виводу “від фактів до мети”. Машина логічного виводу може оперувати не лише чітко визначеними, але й нечіткими чи неповними даними. Крім цього, вона оперує коефіцієнтами впевненості, що асоційовані як з правилами, так і з даними. Машина логічного виводу безпосередньо пов'язана з базою знань, оскільки база знань – це фактично FuzzyCLIPS програма, що будується підсистемою управління базою знань.

Підсистема управління базою знань має наступні основні функції:

- Введення та виведення даних та правил, що є основними складовими бази знань, у зручній для користувача формі
- "Спілкування" з машиною логічного виводу та вивід результату її роботи у зручній для користувача формі.

1. Hayes-Roth F., Waterman D.A. and Lenat D. Building Expert Systems, Reading, Mass: Addison-Wesley, 1983.
 2. Лихочвор В.В. Ресурсноощадна технологія вирощування озимої пшениці для умов Західної України, Львів: ЛДАУ, 1997. 3. CLIPS Reference Manual, Version 6.0, Vol.1, Vol.2. Software Technology Branch, Lyndon B. Johnson Space Center, 1993. 4. Orchard R.A. FuzzyCLIPS Version 6.04. Knowledge Systems Laboratory, Institute for Information Technology, National Research Council, Canada, 1995.

УДК 519.6

Б.М. Голуб, Ю.П. Оліярник

ЛОКАЛЬНЕ ЗБІЛЬШЕННЯ ФУНКЦІЇ МЕТИ В ТУНЕЛЬНИХ АЛГОРИТМАХ ГЛОБАЛЬНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ

Розглянемо задачу глобальної оптимізації

$$f(x) \rightarrow \min_X, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \subset R^n, \quad (1)$$

де $f(x)$ – ліпшицева функція на компактній множині X .

Нехай $x^* \in X$ – деяка ізольована точка локального мінімуму задачі

(1). Позначимо:

$$A(f; x^*) = \{x \in X : f(x) \geq f(x^*)\} \setminus \{x^*\}; \quad (2)$$

$$B(f; x^*) = \{x \in X : f(x) < f(x^*)\} \quad (3)$$

$$B_\varepsilon(f; x^*) = \{x \in X : f(x) \leq f(x^*) - \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0 \quad (4)$$

$$S(f; x^*) = \{x \in X : f(x^*) < f(\alpha x + (1-\alpha)x^*) < f(\beta x + (1-\beta)x^*) < f(x)\}, \quad 0 < \alpha < \beta < 1 \quad (5)$$

Означення [1]. Функція $R(x, x^*, \alpha)$, де $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ – деякий вектор параметрів, $s \in N$, називається тунельною для функції $f(x)$ в точці локального мінімуму x^* на множині X , якщо:

- 1) x^* – точка максимуму для $R(x, x^*, \alpha)$;
- 2) $R(x, x^*, \alpha)$ не має стаціонарних точок на множині $\text{int } A(f; x^*)$;
- 3) Якщо $B_\varepsilon(f; x^*) \neq \emptyset$, то $R(x, x^*, \alpha)$ має стаціонарні точки на $B_\varepsilon(f; x^*)$.

Істотною проблемою при побудові тунельних методів глобальної оптимізації є пошук точки $\bar{x} \in B_\varepsilon(f; x^*)$ на тунельній фазі [1,2]. В даній роботі пропонується один із можливих способів спрощення такого пошуку.

Нехай на k -й ітерації методу, де $k \geq 3$, вже знайдено локальні мінімуми $x_1^*, x_2^*, \dots, x_{k-1}^*$ цільової функції $f(x)$ задачі (1) з точністю ε по значенню функції. Розглянемо функцію

$$\varphi_k(x, x_{k-2}^*, x_{k-1}^*) = f(x) + \omega_{k-1}(x, x_{k-2}^*, x_{k-1}^*), \quad k \in N, \quad k \geq 3, \quad (6)$$

де $\omega_{k-1}(x, x_{k-2}^*, x_{k-1}^*)$ вибирається так, щоб виконувались наступні умови:

- 1) $f(x_{k-1}^*) < \varphi_k(x, x_{k-2}^*, x_{k-1}^*) < f(x_{k-2}^*)$;
- 2) $\left| \varphi_k(x, x_{k-2}^*, x_{k-1}^*) - f(x) \right| / \|x - x_{k-1}^*\|^p \rightarrow 0$,

якщо $\|x - x_{k-1}^*\| \rightarrow \delta_{k-1} - 0$, де $\delta_{k-1} > 0$, $p > 1$ – деякі константи;

$$3) \varphi_k(x, x_{k-2}^*, x_{k-1}^*) = f(x) \quad \forall x, \quad \|x - x_{k-1}^*\| \geq \delta_{k-1}$$

$$4) S(f; x_{k-1}^*) = S(\varphi_k; x_{k-1}^*).$$

Можна довести, що:

$$\text{mes } B(\varphi_k; x_{k-1}^*) > \text{mes } B(f; x_{k-1}^*) \quad (7)$$

Умови 2) та 3) означають локальний характер відхилення функції $\varphi_k(x, x_{k-2}^*, x_{k-1}^*)$ від цільової функції $f(x)$ задачі (1). Умова 4) означає збереження характеру цільової функції $f(x)$ в околі точки x_{k-1}^* . Формула (7) виражає основну перевагу тунельної функції,

побудованої для функції $\varphi_k(x, x_{k-2}^*, x_{k-1}^*)$, порівняно з тунельною функцією, побудованою для $f(x)$. Формулу (6) можна узагальнити таким чином, щоб досягти локального збільшення в околах декількох знайдених точок локальних мінімумів цільової функції, що спричинить посилення нерівності (7) і відповідне покращення характеристик побудованих тунельних алгоритмів глобальної мінімізації.

1. Голуб Б.М., Оліярник Ю.П. Тунельний алгоритм пошуку глобального мінімуму неперервної функції // Вісн. Львів. ун-ту. - 1995. - Вип.45 - С.35-39. 2. Голуб Б.М., Оліярник Ю.П. Функції наповнення і їх застосування в глобальній оптимізації// Тези доп. міжнар. конф. "Моделювання і дослідження стійкості процесів. Дослідження систем." Київ, 19-23 травня 1997 р. - К.: 1997.- С.26.

УДК 519.6

Б.М. Голуб, Ю.М. Щербина

КВАЗІНЬЮТОНІВСЬКА МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Одним з найбільш ефективних методів розв'язування задач математичного програмування з нелінійними функціями є метод лінеаризації Пшеничного [1] та його модифікації. У загальному випадку метод лінеаризації володіє лінійною швидкістю збіжності. В [2] запропонована квазіньютонівська модифікація з надлінійною швидкістю збіжності в околі точки розв'язку. Для розв'язування поширених на практиці задач математичного програмування на простій множині типу паралелепіпеда в [3] досліджено метод лінеаризації із явним врахуванням паралелепіпедних обмежень.

У даній статті сформульований алгоритм методу лінеаризації для розв'язування задач математичного програмування

$$\min_{u \in U} \{f_0(u) : f_i(u) \leq 0, \quad i \in J = \{1, 2, \dots, l\}\}, \quad (1)$$

де $U = \{u \in R^n : -\infty < a^i \leq u^i \leq b^i < \infty, \quad i \in I = \{1, 2, \dots, n\}\}$, R^n - n -вимірний евклідів простір, $f_i(u), i \in \{0\} \cup J$ - неперервно диференційовні на U функції. З метою спрощення формул у задачі

(1) відсутні обмеження типу рівності. Відзначимо, що ефективність наведеного нижче алгоритму в порівнянні з іншими методами оптимізації була найбільш істотною при наявності нелінійних обмежень типу рівності.

На кожній ітерації методу в поточній точці u потрібно розв'язувати допоміжну задачу квадратичного програмування

$$\min_{p \in Q(u, \mu)} \{ \langle f_0(u), p \rangle + \frac{1}{2} \langle p, Ap \rangle : \langle f_i'(u), p \rangle + f_i(u) \leq 0, i \in J_\delta(u) \}, \quad (2)$$

де A – симетрична додатно означена матриця, $Q(u, \mu)$ – означене нижче,

$$J_\delta(u) = \{i \in J : f_i(u) \geq F(u) - \delta\}, \quad \delta > 0,$$

$$F(u) = \max\{0, f_1(u), \dots, f_l(u)\}.$$

Ефективні алгоритми розв'язування задачі (2) наведено, наприклад, в [1]. Множники Лагранжа цієї задачі позначимо через $\lambda^i, i \in J_\delta(u)$. Прийmemo $\lambda^i = 0, i \in J \setminus J_\delta(u)$. Позначимо

$$L(u, \lambda) = f_0(u) + \sum_{i \in J} \lambda^i f_i(u), \quad \Phi_N(u) = f_0(u) + NF(u), \quad N > 0.$$

Матриця A вирішальним чином впливає на швидкість збіжності алгоритму. Якщо $A = L_{mm}''(u, \lambda)$, то теоретично можна досягти квадратичної збіжності. Оскільки обчислення других похідних не завжди є можливим, пропонується для розрахунку елементів матриці A використовувати квазіньютонівські формули. Доцільно (з точки зору кількості обчислень) вести перерахунок не самої матриці A , а її факторів Холеського L (нижня трикутна одинична матриця) та D (додатна діагональна матриця): $A = LDL^*$. Обчислювальні схеми квазіньютонівського перерахунку модифікованих факторів Холеського наведені в [4]. Позначимо

$$a^{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} a^i, \quad d^{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} d^i.$$

Означимо множини:

$$I(x) = \{i \in I : a^i + r < u^i < b^i - r\},$$

$$I_\Gamma(u, \lambda) = \{i \in I : \partial L(u, \lambda) / \partial u^i > 0, u^i = a^i; \partial L(u, \lambda) / \partial u^i < 0, u^i = b^i\}$$

$$I_a(u, \lambda) = \{i \in I \setminus I_\Gamma(u, \lambda) : u^i \leq a^i + r\},$$

$$I_b(u, \lambda) = \{i \in I \setminus I_\Gamma(u, \lambda) : u^i \leq b^i - r\},$$

$$Q(u, \lambda) = \{p \in R^n : p^i \geq -\theta^i(u), i \in I_a(u, \lambda),$$

$$p^i \leq \theta^i(u), i \in I_b(u, \lambda), p^i = 0, i \in I_\Gamma(u, \lambda)\},$$

де $\theta^i(u) = u^i - a^i$, $i \in I_a(u, \lambda)$, $\theta^i(u) = b^i - u^i$, $i \in I_b(u, \lambda)$,
 $0 < r < \min\{1, \min_i (b^i - a^i)/2\}$, а $I_\Gamma(u, \lambda)$ - множина індексів з I , яка
 перераховується під час виконання алгоритму.

Нехай обрано числа $N > 0$, $\delta > 0$, $S > 1$, $\sigma > 0$,
 $r > 0$, $0 < \varepsilon < 0.5$, $c_0 > 0$, $0 < \gamma < 1$ і початкове наближення $u_0 \in U$.
 Прийmemo $L_0 = I_n$, $D_0 = I_n$ (I_n - n -вимірний одиничний матриця), а
 також $\lambda_{-1} = 0$, $\lambda_{-1} \in R^I$ і $I_\Gamma(u_0, \lambda_{-1}) = I_{\bar{\Gamma}}(u_0, \lambda_{-1})$.

Опишемо загальний крок алгоритму. Нехай точка u_k , число
 c_k , множина $I_\Gamma(u_k, \lambda_{k-1})$ та матриці L_k та D_k вже побудовані.

Алгоритм.

1. Розв'язати задачу (2) при $u = u_k$, $\lambda = \lambda_{k-1}$, $A = L_k D_k L_k^*$.
 Отримаємо $p_k = p(u_k)$, $\lambda_k^i = \lambda^i(u_k)$, $i \in J_\delta(u_k)$. Прийmemo $u_k^i = 0$ для
 $i \notin J_\delta(u_k)$.

2. Якщо $\|p_k\| = 0$, то перейти до кроку 9.

3. Обчислити $\beta_k = \max\{\beta: \beta \leq 1, u_k + \beta p_k \in U\}$.

4. Якщо $\|p_k\| \leq c_k$, $\beta_k = 1$, $\Phi_N(u_k + p_k) \leq \Phi_N(u_0)$, то прийняти
 $u_{k+1} = u_k + p_k$, $c_{k+1} = \gamma \|p_k\|$ і перейти до кроку 6. Інакше прийняти
 $c_{k+1} = c_k$ і перейти до наступного кроку.

5. Починаючи з $\alpha = \beta_k$, дробити α діленням навпіл до
 першого виконання нерівності
 $\Phi_N(u_k + \alpha p_k) \leq \Phi_N(u_k) + \alpha \varepsilon \langle p_k, L'_u(u_k, \lambda_k) \rangle$. Приймати
 $u_{k+1} = u_k + \alpha p_k$.

6. Прийняти $I_\Gamma(u_{k+1}, \lambda_k) = I_{\bar{\Gamma}}(u_{k+1}, \lambda_k)$. Якщо $I_\Gamma(u_{k+1}, \lambda_k) \neq$
 $I_\Gamma(u_k, \lambda_{k-1})$, то перейти до кроку 8.

7. Перерахувати матриці L_{k+1} та D_{k+1} [4]. Якщо
 $a_{k+1}^{\max} / a_{k+1}^{\min} \leq S$, то перейти до кроку 10.

8. Прийняти $L_{k+1} = I_n$, $D_{k+1} = I_n$ і перейти до кроку 10.

9. Якщо $\lambda_k^i \geq 0$, $\lambda_k^i f_i(u_k) = 0$, $i \in J$ і

$$\frac{\partial L(u, \lambda)}{\partial u^i} \begin{cases} \geq 0, \text{ якщо } u^i = a^i \\ = 0, \text{ якщо } a^i < u^i < b^i \\ \leq 0, \text{ якщо } u^i = b^i \end{cases},$$

то процес обчислень завершуємо. У протилежному випадку прийmemo $u_{k+1} = u_k$, $I_\Gamma(u_{k+1}, \lambda_k) = \emptyset$.

10. Приймемо $k = k + 1$ та перейдемо до кроку 1.

Теорема. Нехай існують такі константи $N > 0$, $\delta > 0$ та $r > 0$, що

- 1) множина $\Omega = \{u \in U : \Phi_N(u) \leq \Phi_N(u_0)\}$ компактна;
- 2) $f'_i(u)$, $i = 0, \dots, l$ задовольняють в Ω умові Ліпшиця;
- 3) задача (2) має розв'язок при довільному $u \in \Omega$, причому $\sum_{i \in J_\delta(u)} \lambda^i(u) \leq N$.

Тоді алгоритм будує послідовність $\{u_k\}$ таку, що $u_k \in U$, $p(u_k) \rightarrow 0$, $F(u_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ і в довільній граничній точці цієї послідовності задовольняються необхідні умови екстремума для задачі (1).

При деяких додаткових умовах щодо гладкості функцій $f_i(u)$ і регулярності точки розв'язку для квазіньютонівських формул Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шенно та Девідона-Флетчера-Пауелла [4] можна довести надлінійну швидкість збіжності в околі точки розв'язку.

Сформульований алгоритм ефективно розв'язував [5] і задачі оптимального керування у наступній постановці:

$$\min_{u, \xi} \int_0^T f_0(x(t), u(t), t, \xi) dt + \Psi(x(T), T, \xi), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad & dx/dt = f(x(t), u(t), t, \xi), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(0) = v(\xi), \\ & h_0(u(0), \xi) = 0, \quad g_0(u(0), \xi) \leq 0, \\ & h(x(T), u(T), T, \xi) = 0, \quad g(x(T), u(T), T, \xi) \leq 0 \\ & h(x(t), u(t), t, \xi) = 0, \quad g(x(t), u(t), t, \xi) \leq 0 \\ & \int_0^T \bar{h}(x(t), u(t), t, \xi) dt + H(x(T), T, \xi) = 0 \\ & \int_0^T \bar{g}(x(t), u(t), t, \xi) dt + G(x(T), T, \xi) \leq 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $\xi \in R^q$, t — час, а всі вектор-функції неперервно диференційовані за сукупністю аргументів.

Наведена задача оптимального керування шляхом дискретизації [6] зводиться до задачі (1).

Для розв'язування задач (1) або (4)-(5) наведеним алгоритмом розроблено пакет прикладних програм.

1. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. – М.: Наука, 1983.
2. Щербина Ю.Н., Голуб Б.М. Квазиныютоновская модификация метода линеаризации // Кибернетика. – 1988. - №6. – С.66-71.
3. Щербина Ю.Н., Голуб Б.М. Модификация метода линеаризации для решения задачи математического программирования на простом множестве типа параллелепипеда // Математ. методы и физ.-мех. поля. – 1989. - №30. – С.24-28.
4. Голуб Б.М. Одна схема побудови квазіньютонівських алгоритмів для безумовної мінімізації функцій // Вісн. Львів. ун-ту. – 1989. – Вип.31. – С.22-24.
5. Голуб Б.М., Щербина Ю.М. Чисельне розв'язування задач оптимального керування // Вісн. Львів. ун-ту. – 1993. – Вип.39. – С.8-14.
6. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. - М.: Наука, 1982.

УДК 681.3:06:51

Мирослава Дзіковська

ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДАНИХ ДЛЯ СТИЙКОГО РОЗУМІННЯ МОВИ У ДІАЛОВОЇ СИСТЕМІ TRIPS-98

1. Вступ

На практиці все більшого застосування набувають системи, призначені для розуміння людської мови і розумного спілкування комп'ютера з користувачем. Хоча сьогодні найширшого застосування набули системи автоматичного диктування, які майже не проводять аналізу отриманих речень, вже існують системи, здатні розуміти зміст певної множини фраз і виконувати певні дії як результат розмови з користувачем, як наприклад, автоматизовані системи резервування авіаквитків.

Розроблена на факультеті комп'ютерних наук Рочестерського університету діалогова система TRIPS призначена для планування перевезення людей і вантажів в екстремальних ситуаціях. Її попередником була система TRAINS, призначена для планування руху на залізниці [1]. Більша частина модулів написана на мові Common LISP, за винятком системи вводу-виводу графічної інформації, написаної на мові Java, і системи обробки звуку, написаної на C++.

Одним із завдань розробки системи було створення умов, при яких не потрібне було б спеціальне навчання роботі з системою і кількість обмежень, накладених на мову користувача, була б мінімальною [2]. Окрім того, система розпізнавання голосу повинна працювати однаково ефективно для всіх користувачів без додаткового настроювання, що спричиняє доволі велику (до 25%) кількість помилок при розпізнаванні голосу. Тому однією з необхідних властивостей системи є стійкість щодо помилок, які можуть бути спричинені як неправильним розпізнаванням голосу, так і безпосередніми граматичними помилками у мові користувача. Було розроблено систему засобів корекції помилок, які дозволяють суттєво підвищити ефективність роботи системи.

2. Архітектура системи

Структура системи зображена на рисунку. Система дозволяє ввід з голосу або з клавіатури. Оцифрований звук надходить на вхід розпізнавача голосу. Він розроблений на базі системи SPHINX-II, розробленої в Carnegie Mellon University[3]. Всі слова, введені з клавіатури, проходять попередню орфографічну перевірку.



Архітектура системи TRIPS-97.

Отримана послідовність слів передається парсеру. Система використовує простий висхідний парсер, який керується правилами, синтаксис яких базується на основі узагальненої фразово-структурної граматики[4].

Важливим джерелом інформації є словник. Його структури даних надають інформацію

про граматичні особливості слів, наприклад, синтаксичні й семантичні обмеження на аргументи дієслів або типи іменників.

Парсер будує синтаксичне дерево, у якому кожен вузол характеризується рядом синтаксичних і семантичних характеристик. Крім того, парсер проводить елементарний семантичний аналіз і з перевіркою відповідності семантики синівських вузлів до семантики, яка дозволяється батьківським вузлом. Це дає змогу виключити з розгляду значну кількість беззмістовних речень. З отриманим деревом працює постпроцесор, призначений винятково для

виправлення помилок на основі наявної синтаксичної і семантичної інформації. Менеджер діалогу завершує семантичний аналіз речення, ідентифікує тип мовного акту (просьба, запитання, інформація), дає вказівки іншим модулям щодо модифікації їх поточного стану (наприклад, якщо користувач повідомив, що якась ділянка дороги вийшла з ладу, планер повинен це врахувати і змінити всі плани, які цю ділянку використовують), і щодо виводу інформації про результати голосом і на екран. Якщо не вдалося провести повний синтаксичний або семантичний аналіз, менеджер діалогу інформує користувача, що система не зрозуміла речення, і вказує можливу причину, наприклад, не вказано місце, до якого потрібно перевезти людей.

Планер займається плануванням перевезень і зберігає інформацію про виконання поточних планів. Менеджер виводу контролює стан екрана і виконує запити на виведення різних типів графічної інформації. Генератор мови на основі системи TRUE TALK генерує речення і звук на запит менеджера діалогу. Крім того, система містить симулятор, який може бути використаний для перевірки якості і надійності отриманих планів.

3. Представлення даних

Всі операції в системі проводяться з семантичними об'єктами, які представляють концепції типу "перевезти" або "транспортний засіб", і вони організовані у вигляді ієрархії. Кожному слову зі словникового запасу системи ставиться у відповідність множина семантичних об'єктів, що відповідають різним можливим значенням цього слова.

За результатами синтаксичного аналізу парсер утворює структуру, яка містить інформацію про вид речення, синтаксичне дерево і рівень надійності проведеного аналізу. Синтаксичне дерево також містить додаткову семантичну інформацію, зокрема семантичні класи, до яких належать всі вузли. Менеджер діалогу доповнює цей список іншими даними, зокрема уточненою інформацією про вид мовного акту (запит на виконання, запитання, визначення мети), а також інформацією про об'єкти, використовувані в реченні, таку як глобальні ідентифікатори об'єктів, відомих системі, – міст, поїздів, груп людей. Після того як система виконає певні дії у відповідь на запит, висловлений у реченні, до структури додаються поля, які характеризують ці дії.

Парсер і менеджер діалогу використовують системний словник. У попередніх версіях системи словник був організований як неструктурований файл, який містив усі слова, відомі системі, з наборами характеристик для кожного слова. У версії 4.0 було

розроблено новий словник, який складається з 3 файлів. У файлі семантики міститься опис всіх семантичних об'єктів, які використовуються у системі. Дані представляються у вигляді фреймів.

У файлі синтаксису міститься опис відповідності між синтаксичними аргументами дієслова чи іменника і відповідними їм семантичними ролями. У файлі словника є список слів, відомих системі, з посиланнями на синтаксичні і семантичні структури, які відповідають кожному можливому значенню слова. Таке представлення дає значно краще уявлення про структуру знань системи і дозволяє поліпшити розуміння помилок.

4. Результати

Було проведено експериментальну оцінку роботи системи з користувачами з мінімальним рівнем комп'ютерних знань[5]. У 90% випадків користувач міг створити доволі складний план перевезення людей упродовж 5 хвилин після 15 хвилинної демонстрації роботи з системою. Експерименти без використання постпроцесора показали, що його використання дозволяє зменшити час на створення плану в середньому на 25% і полегшити користування системою.

Введення нових структур даних словника у версії 4.0 дозволили систематизувати представлення знань системи і збільшити кількість словосполучень, які система може правильно розуміти, а також дозволить розробку більш досконалих засобів корекції помилок.

5. Подяка

Автор висловлює вдячність Оксані Костів і Джеймсу Аллену за підтримку і поради при підготовці цієї доповіді.

1. G. Ferguson, J. Allen, and B. Miller, "TRAINS-95: Towards a Mixed-Initiative Planning Assistant," Proceedings of the Third Conference on Artificial Intelligence Planning Systems (AIPS-96), Edinburgh, Scotland, 29-31 May, 1996. P. 70-77. 2. J. F. Allen, L. K. Schubert, G. Ferguson, P. Heeman, C. H. Hwang, T. Kato, M. Light, N. G. Martin, B. W. Miller, M. Poesio, and D. R. Traum, "The TRAINS Project: A case study in building a conversational planning agent," Journal of Experimental and Theoretical AI, 7(1995), 7-48. 3. <http://www.cs.cmu.edu/ai/SPHINX> 4. James F Allen, Natural Language Understanding, MIT Press, 1995. 5. J. Stent and J. F. Allen, "TRAINS-96 System Evaluation", TRAINS TN 97-1, Computer Science Dept., U. Rochester, March 1997.

Х.С. Дороцька, Г.Г. Цегелик

ДО ПОБУДОВИ ОПТИМАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ОДНОРІВНЕВИХ ІНДЕКСНО-ПОСЛІДОВНИХ ФАЙЛІВ

Розглядаємо однорівневий індексно-послідовний файл, який міститься в зовнішній пам'яті ЕОМ. Якщо файл містить велику кількість записів, то індекс може мати великі розміри. В цьому випадку одним з можливих шляхів прискорення пошуку запису в файлі є використання в індексі методу блочного пошуку.

Нехай N - число записів файла; m - розмір блоків записів файла; n - розмір індексу, $n=s \cdot l$, де s - кількість блоків індексу, l - кількість елементів у блоці; t_0 і t_1 - час перегляду відповідно запису файла і елемента індексу; $a_0=b_0+d_0m$ і $a_1=b_1+d_1n$ - час читання відповідно блока записів файла і індексу в основну пам'ять, де b_0 , b_1 , d_0 , d_1 - деякі константи; p_i - ймовірність звертання до i -го запису файла; E - математичне сподівання загального часу, необхідного для пошуку запису в файлі. Тоді при використанні для пошуку в індексі методу блочного пошуку, а в файлі - послідовного перегляду для E матимемо формулу

$$E = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m (a_0 + a_1 + (k+i)t_1 + jt_0) p_{(k-1)m + (i-1)m + j}.$$

Явний вираз для E у випадку різних законів розподілу ймовірностей звертання до записів і співвідношення для знаходження значень параметрів, при яких математичне сподівання досягає мінімуму, наведені в [1-3]. В даній статті досліджується поведінка математичного сподівання в околі точок мінімуму і залежність математичного сподівання від зміни закону розподілу ймовірностей. Наведемо окремі результати таких досліджень.

Якщо розподіл ймовірностей звертання до записів є рівномірним, то

$$E = a_0 + a_1 + \frac{1}{2}((s+l+2)t_1 + (m+1)t_0).$$

Поведінка функції E/d_0 в околі точки мінімуму математичного сподівання показана на рис. 1.

При "бінарному" законі розподілу ймовірностей

$$E = a_0 + a_1 + \frac{l}{2^N} t_1 + \frac{m}{2^N} t_0 + (1 - 2^{-N}) \left(\left(\frac{2^{ml} - l}{2^{ml} - 1} + \frac{2^m}{2^m - 1} \right) t_1 + \left(2 - \frac{m}{2^m - 1} \right) t_0 \right).$$

Поведінка функції E/d_0 в околі точки мінімуму показана на рис. 2.

Якщо ймовірності звертання до записів розподілені за законом Зіпфа, то

$$E = a_0 + a_1 + \frac{1}{H_N} \left(\left(2H_N + s + \left(\frac{1}{2} \ln s + C_1 \right) (l-2) - \frac{1}{2} \ln l \right) t_1 + \frac{Nt_0}{sl} \left(\frac{1}{2} \ln sl + C_1 \right) \right)$$

Поведінка функції E/d_0 в околі точки мінімуму приведена рис. 3.

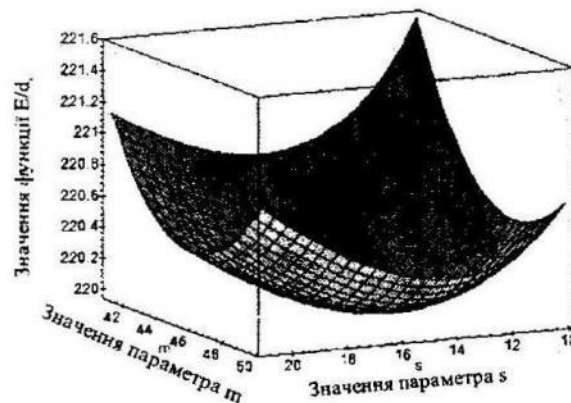


Рис. 1. Поведінка функції E/d_0 в околі точки мінімуму математичного сподівання при рівномірному розподілі ймовірностей звертання до записів ($N=10000$, $(b_1 + b_0)/d_0=100$, $t_0/d_0=0.5$, $t_1/d_1=2$)

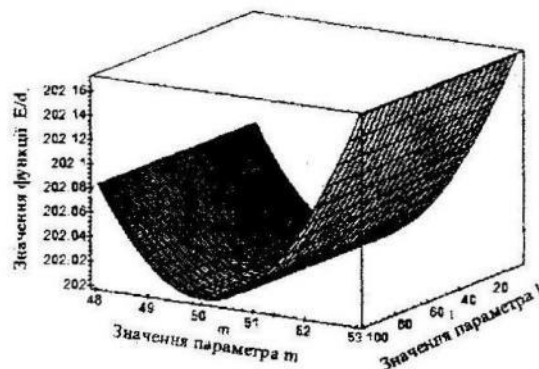


Рис. 2. Поведінка функції E/d_0 в околі точки мінімуму математичного сподівання при "бінарному" розподілі ймовірностей звертання до записів ($N=10000$, $(b_1 + b_0)/d_0=100$, $t_0/d_0=0.5$, $t_1/d_1=2$)

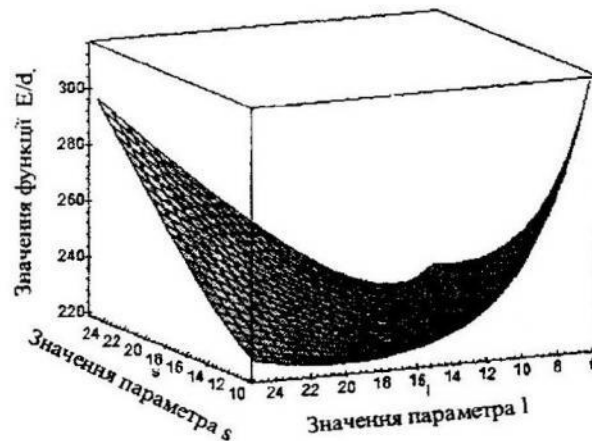
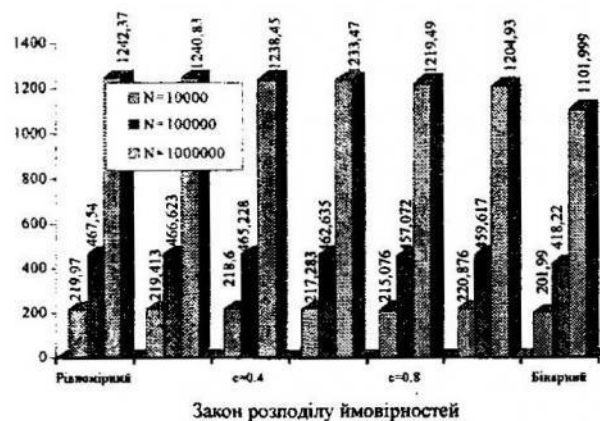


Рис. 3. Поведінка функції E/d_0 в околі точки мінімуму математичного сподівання при розподілі ймовірностей звертання до записів за законом Зіпфа ($N=10000$, $(b_1+b_0)/d_0=100$, $t_0/d_0=0.5$, $t_1/d_1=2$)

На діаграмі представлена залежність оптимальних значень функції E/d_0 від зміни закону розподілу ймовірностей звертання до записів



Діаграма. Залежність оптимального значення математичного сподівання від зміни закону розподілу ймовірностей звертання до записів ($N=10000$, $t_0/d_0=0.5$, $t_1/d_1=2$, $(b_1+b_0)/d_0=100$)

1. Цегелик Г.Г. Системы распределённых баз данных.-Львов: Свит, 1990.-168с. 2. Цегелик Г.Г. Организация и поиск информации в базах данных.-Львов: Вища шк.,1987.-176с. 3. Цегелик Г.Г. Оптимальные по времени поиска модели индексно-последовательных файлов при неравномерном распределении вероятностей обращения к записям //Программирование. 1988. №2. С.81-86.

І.І.Дияк

АДАПТИВНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ НА ОСНОВІ ГІБРИДНИХ АПРОКСИМАЦІЙ

У 90-х роках широке коло досліджень присвячене адаптивним процедурам у скінченно- та граничноелементних реалізаціях. При використанні граничноелементних та гібридних адаптивних апроксимацій багато проблем ще залишаються відкритими[4]. Ефективність усього адаптивного процесу залежить значною мірою від вибору критерію апостеріорної оцінки похибки. Тут пропонується новий підхід побудови покращеного розв'язку, який базується на гібридних скінченно- та граничноелементних апроксимаціях.

Розглядається плоска задача лінійної теорії пружності, постановку якої можна подати у вигляді [4] рівняння рівноваги:

$$\mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{f} \equiv \mathbf{S}^T \mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{u} - \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset R^2, \quad (1)$$

кінематичні граничні умови:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad (2)$$

статичні граничні умови:

$$\mathbf{t} = \mathbf{H}\mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad (3)$$

тут $\mathbf{S}$ – матричний оператор, що визначає компоненти вектора деформацій $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yy})^T$ через компоненти вектора переміщень у вигляді:

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{S}\mathbf{u}, \quad (4)$$

$\mathbf{D}$ – матриця пружних констант закону Гука:

$$\vec{\sigma} = \mathbf{D}\vec{\varepsilon}, \quad (5)$$

тут $\vec{\sigma} = (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy})^T$, $\mathbf{u} = (u_x, u_y)^T$ – вектор переміщень,

$\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ – границя області, $\mathbf{H}$ – матриця напрямних косинусів нормалі до границі області.

Використовуючи скінченноелементну апроксимацію

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = \mathbf{N}\tilde{\mathbf{u}}, \quad (6)$$

на основі процедури Бубнова-Гальоркіна, крайова задача (1)-(3) приводиться до знаходження переміщень у вузлах СЕ сітки на основі розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь [2]:

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

де

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\mathbf{S}\mathbf{N})^T \mathbf{D}(\mathbf{S}\mathbf{N}) d\Omega, \quad \mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_p} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} d\Gamma.$$

При цьому напруження обчислюються зі співвідношення

$$\sigma_h = (\mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{N})\bar{\mathbf{u}}. \quad (8)$$

Вибравши апроксимацію для переміщень з класу функцій C^0 , одержимо розривні на границях між елементами апроксимації напружень у (8). Нехай похибки наближених розв'язків $\mathbf{u}_h, \sigma_h$:

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \quad \text{та} \quad \mathbf{e}_\sigma = \sigma - \sigma_h. \quad (9)$$

У скінченноелементному аналізі виправдане не поточкове визначення похибки, а використання енергетичної норми похибки, яка для задачі теорії пружності має такий вигляд:

$$\|\mathbf{e}\| = \left(\int_{\Omega} (\mathbf{S}\mathbf{e})^T \mathbf{D}(\mathbf{S}\mathbf{e}) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} (\mathbf{e}_\sigma)^T \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{e}_\sigma) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

У інженерних задачах, оцінюючи величину похибки в будь-якій нормі, порівнюється наближений розв'язок $\mathbf{u}_h$ з покращеним розв'язком $\mathbf{u}^*$. Різниця між апостеріорними оцінками похибки, що пропонуються різними авторами, полягає у різних способах отримання покращеного розв'язку $\mathbf{u}^*$. Найпоширенішою є процедура побудови розв'язку σ^* запропонована у [6]. Теоретична аргументація цього підходу наведена у [3]. У цьому випадку припускається, що напруження σ^* інтерполюються за допомогою тієї ж системи базисних функцій, що і переміщення, тобто

$$\sigma^* = \mathbf{N}\bar{\sigma}^*, \quad (11)$$

і використовується процедура проектування

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\sigma^* - \sigma_h) d\Omega = 0, \quad (12)$$

тут $\bar{\sigma}^*$ - вектор вузлових значень напружень. Підставивши співвідношення (8) і (11) у рівняння (12), отримаємо

$$\bar{\sigma}^* = \mathbf{A}^{-1} \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{N} d\Omega \right) \bar{\mathbf{u}}, \quad (13)$$

де A - матриця "мас", вигляду

$$A = \int_{\Omega} N^T N d\Omega.$$

У роботі [3] показано, що наближений розв'язок σ^* є точнішою апроксимацією узагальненого розв'язку ніж σ_h , і вибір апроксимуючих функцій у формулі (12) таких же як у (6), не тільки ефективний, а й найекономніший у задачах з регулярними розв'язками.

Для обчислення покращеного σ розв'язку пропонується наступна процедура. За знайденими значеннями переміщень з (7) проводиться обчислення граничних напружень на скінченному елементі на основі використання оператора Стеклова-Пуанкаре [4]:

$$t = Su = V^{-1} \left(\frac{1}{2} I + K \right) u, \quad (15)$$

тут оператор V – потенціал простого шару, оператор K – потенціал подвійного шару. Застосовуючи процедуру методу Бубнова-Гальоркіна з вибором функцій апроксимації таких же, як і у (6), одержимо значення граничних напружень t^* . Уточнені значення σ^* знаходяться за відомими формулами для ПМГЕ [1], у такій кількості внутрішніх точок, яка необхідна для точного обчислення енергетичної норми похибки (10) у межах скінченного елемента.

Проведені числові дослідження тестових задач підтверджують ефективність запропонованого підходу.

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. - М.: Мир, 1984. - 494 с. 2. Дияк І.І., Чернуха А.Ю. Чисельне дослідження задачі теорії пружності на основі комбінації методів граничних та скінченних елементів// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип. 39. С. 41-46. 3. Ainsworth M., Zhu J.Z., Craig A.W., Zienkiewicz O.C. Analysis of the Zienkiewicz- Zhu a-posteriori error estimator in the finite element method// Int. J. Num.Meth.Eng. 1989. Vol.28. P. 2161-2174. 4. Rank E. Adaptive h-,p- and hp-versions for boundary integral element methods//Int. J.Num. Meth. Engng., 1989. Vol.28. P. 1335-1349. 5. Steinbach O., Wendland W.L. Efficient Preconditioners for Boundary Element Methods and their Use in Domain Decomposition Methods.-Bericht Nr.95-19, 18p. 6. Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. A simple error estimate and adaptive procedure for practical engineering analysis//Int.J.Num. Meth. Eng. 1987. Vol.24. P. 337-357.

Я.О. Дубров

ТЕОРІЯ ДЕСКРИПЦІЙНИХ МОРФІЗМІВ. МОДЕЛЮВАННЯ МЕНТАЛЬНИХ СТРИБКІВ У КОНТЕКСТІ ТЕОРЕМИ ГЙОДЕЛЯ

Незважаючи на стрімкий світовий цивілізаційний чин, на планеті існує низка нерозгаданих наукових, технологічних, релігійних, біологічних, політичних та інших ноуменів – явищ в ментальній сфері. Досить нагадати проблеми Великого синтезу, Ферма, протистояння релігій, ракових захворювань, політико-партійного протистояння, ядерної енергетики та інших світових глобальних "вузлів". Це означає, що актуалізується питання індукування чи формування ментального стрибка, який різні автори називають "науковою революцією", зміною парадигм (тезаурисів, контекстів, концептуальних моделей або концепцій тощо).

1. Базова категорія Фреге. В основу наших розмірковувань кладеться категорна конструкція (категорія Фреге), яка складається з трьох наступних об'єктів – речей або реальності R , імен (знаків, образів, символів) N та ідей (універсалій, ейдосів) U . За морфізми, зокрема, обираються пари <дескрипція, предикат>, які надалі називаються дескрипційними морфізмами й мають наступний загальний вигляд – $\gamma_x P(x)$, де γ – дескрипційна (описова) функція, $P(x)$ – предикат на індивідних змінних (елементах) з об'єктів R , N та U . Об'єкти R , N та U узгоджуються з об'єктами речей W_1 , образів W_2 та ідей W_3 Базової Категорії Універсуму, яка розглядалася нами при побудові теоретико-категорної моделі панфілософії триалізму.

2. Об'єкти, елементи та індивідні змінні. Постулюючи топосну структуру категорії Фреге F , ми постулюємо також існування кінцевого об'єкта 1 , тобто такого об'єкта, що для кожного об'єкта цієї категорії існує одна і тільки одна стрілка-морфізм в 1 . Тоді елементом об'єкта A цієї категорії називається стрілка-морфізм $a:1 \rightarrow A$ (або $1 \xrightarrow{a} A$). Ця стрілка є мономорфною. Надалі елементи трьох об'єктів і символи, що позначають індивідні змінні, які набувають значення, що дорівнюють елементам цих об'єктів,

ототожнюються. Отже, ми використовуватимемо наступні індивідні змінні – $t:1 \rightarrow R$, $a:1 \rightarrow N$ $b:1 \rightarrow U$.

3. Категорна інтерпретація денотатів, знаків та концептів. Зазначимо, що поняття денотату, знаку та концепту, які запровадив Фреге, в нашому випадку збігаються з поняттями речі, імені та ідеї.

Теорема 1. Для довільного елементу $x:1 \rightarrow a$ об'єкта a категорії $\mathbf{F}$ справджується рівність $ev_0 \langle [f], x \rangle = f_0 x$, яка підтверджується наступною комутативною діаграмою:

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 \uparrow & & \uparrow cv \\
 1 & \xrightarrow{\langle [f], x \rangle} & b^a x a
 \end{array}$$

де f – речовий акт чи взаємодія речей (денотат), $[f]:1 \rightarrow b^a$ – ім'я речі f або знак, $ev:b^a x a \rightarrow b$ – стрілка значення або концепт.

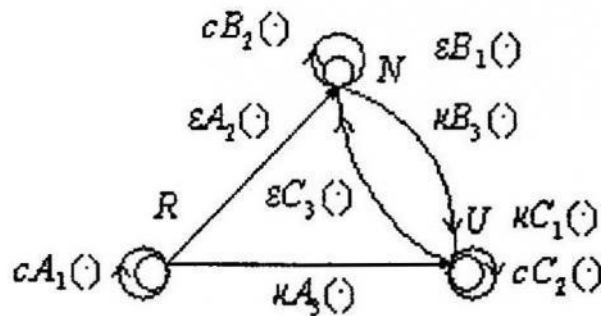
4. Дескрипційна інтерпретація індивідних змінних. Існує три дескрипції – означена c , неозначена ε та універсальна κ . Універсальний дескрипційний морфізм $\kappa_z C(z)$ виділяє (формує, конструює) тільки ейдосні змінні, неозначений $\varepsilon_y B(y)$ – іменні, означений $c_x A(x)$ – і речові, й іменні, й ейдосні (але всі конкретні).

Теорема 2. Кванторам $\exists!$, $\exists$ та $\forall$ однозначно відповідають дескрипції c , ε та κ , тобто справедливі наступні еквівалентності:

$$\begin{aligned}
 \exists! x A(x) &\Leftrightarrow A(c_x, A(x)), \\
 \exists y B(y) &\Leftrightarrow B(\varepsilon_y B(y)), \\
 \forall z C(z) &\Leftrightarrow C(\kappa_z C(z)).
 \end{aligned}$$

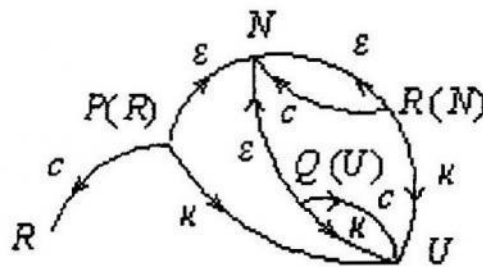
5. Дескрипційна категорія Рассела. Узагальнена теорія дескрипцій Рассела індукує наступне твердження:

Теорема 3. Існує категорія $\mathbf{R}$ з об'єктами R , N , U та дескрипційними морфізмами, які є стрілками денотатів у денотати, знаків – у знаки та концептів – у концепти й концептів – у знаки та концепти. Множини стрілок в $\mathbf{R}$ з N та U є порожніми. Категорії $\mathbf{R}$ відповідає наступний орієнтований зв'язаний граф:



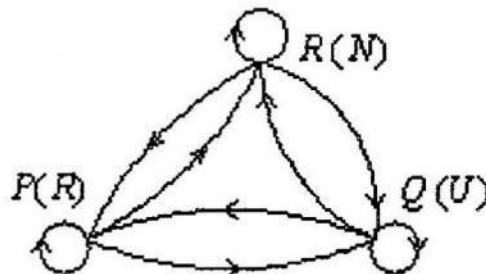
6. Категорійна діаграма Тарського. Семантична теорія Тарського стисло характеризується наступною теоремою.

Теорема 4. Існує категорійна діаграма Тарського T з об'єктами R, N, U та одномісними предикатами на змінних t, a, b з дескрипційними морфізмами, які перетворюють предикати в денотати, знаки та концепти відповідно. Категорна модель семантики Тарського має наступний вигляд:



7. Категорія Гільберта предикатів та правил виведення. Концепція аксіоматизації Гільберта описується наступною теоремою:

Теорема 5. Існує базова категорія G , об'єктами якої є предикати-формули, а морфізмами – правила виведення. Отже,



8. Категорія Фреге як синтез конструкцій Рассела, Гільберта, Тарського. З попереднього випливає наступна теорема.

Теорема 6. Існує синтетична категорія F , об'єктами якої є R, N, U та предикати-формули, а морфізмами – дескрипційні морфізми та правила виведення. F легко будується з R, T, G .

Наслідок. Дескрипційна категорія R як підкатегорія F є моделлю процесу пізнання, коли здійснюється перехід від реальності R через мову N до ейдосу U або безпосередньо від реальності до ейдосу (зокрема, моделі) й навпаки.

9. Теорема Гйоделя як заборона й як стимул до ментального стрибка. Попередні твердження дають можливість подивитися на теорему Гйоделя як на деяку заборону, яка спричинена певною самоізолюваністю від зовнішнього світу формальних аксіоматичних теорій. Така самоізолюваність веде до замкненості, а, отже, й до відсутності розвитку. Саме неможливість доведення чи спростування засобами даної теорії тверджень, які можуть бути сформульовані на мові даної теорії, говорить про необхідність деякого ментального стрибка, зумовленого зовнішнім світом. Прикладами таких ментальних стрибків є перехід від об'єкта реальності до об'єкта імен чи до об'єкта універсалій, а також від об'єкта імен до об'єкта ідей та від об'єкта ідей до об'єкта імен, які описуються відповідними дескрипційними морфізмами.

Вербальна замкненість формальних теорій обумовлює їх неповноту та алгоритмічну нерозв'язність низки проблем. Тому справедлива теза: будь-яка розвивна під впливом внутрішніх причин формальна теорія стає нерозв'язною в тому сенсі, що в ній можна сформулювати нескінченну множину висловлювань, які не можуть бути формально доведені засобами цієї системи. Заборона знімається, коли система відкрита.

УДК 517.9

І.М. Дудзяний, С.І. Дудзяний

ДО ПИТАННЯ СТІЙКОСТІ ІНВАРІАНТНИХ ТОРІВ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

Розглянемо розривну систему диференціальних рівнянь на торі наступного вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \varepsilon a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \\ \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} &= B(\varphi)x. \end{aligned} \tag{1}$$

Тут $\varphi \in \mathfrak{Z}_m, x \in R^n$; функції $a(\varphi), P(\varphi), B(\varphi)$ - неперервні та 2π -періодичні по $\varphi_v, v = 1, \dots, m$; $\varepsilon > 0$ - малий параметр; Γ - підмножина тора $\mathfrak{Z}_m$, така що $\Gamma = \{\varphi \in \mathfrak{Z}_m : \langle b, \varphi \rangle = 0\}$; $b = (b_1, \dots, b_m)$ - вектор з цілочисельними додатними координатами; $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ - такий вектор, що $\langle k, \omega \rangle = 0 \Leftrightarrow k_1 = \dots = k_m = 0$, де $k = (k_1, \dots, k_m)$ - будь-який вектор з цілочисельними додатними координатами (тобто, виконується умова трансверсальності $\langle b, \omega \rangle \neq 0$).

Нехай $\varphi_i(\varphi, \varepsilon), \varphi \in \mathfrak{Z}_m$ - розв'язок першого рівняння (1). Тоді розв'язки (1) будуть еквівалентні розв'язкам системи лінійних диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(\varphi_i(\varphi, \varepsilon))x, t \neq \tau_j(\varphi, \varepsilon), \varphi \in \mathfrak{Z}_m \\ \Delta x|_{t=\tau_j(\varphi, \varepsilon)} &= B(\varphi_{\tau_j(\varphi, \varepsilon)}(\varphi, \varepsilon))x, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\tau_j(\varphi, \varepsilon)$ - розв'язки рівняння $\langle b, \varphi_i(\varphi, \varepsilon) \rangle = 0, \varphi \in \mathfrak{Z}_m$.

За допомогою методу послідовних наближень вивчимо властивості, якими володіє послідовність моментів імпульсних збурень $\{\tau_j(\varphi, \varepsilon)\}$ системи (1), оскільки вони відіграють одну з головних ролей при з'ясуванні питання стійкості інваріантних торів імпульсних систем.

Для цього розглянемо рівняння $\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon a(\varphi)$, розв'язок якого має вигляд $\varphi_t(\varphi, \varepsilon) = \varphi + \omega t + \varepsilon \int_0^t a(\varphi_s(\varphi, \varepsilon)) ds$. Звідси, при $\varepsilon = 0$ маємо розв'язок $\varphi_t(\varphi, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \varphi_t(\varphi, 0) = \varphi_t(\varphi) = \varphi + \omega t$.

Згідно з означенням $\tau_j(\varphi, \varepsilon)$ отримуємо співвідношення

$$\langle b, \varphi + \omega t \rangle + \varepsilon \int_0^t \langle b, a(\varphi_s(\varphi, \varepsilon)) \rangle ds = 0. \quad (3)$$

Відомо також, що рівняння

$$\langle b, \varphi + \omega t \rangle = 0 \quad (4)$$

має послідовність розв'язків $\{\tau_j(\varphi)\}_{j=1}^{\infty}$ таку, що $\tau_j(\varphi) \rightarrow +\infty, j \rightarrow \infty$,

$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i(t, t+T)}{T} = p$. Зрозуміло, що $\tau_j(\varphi, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \tau_j(\varphi)$.

Для того щоб послідовність коренів $\{\tau_j(\varphi, \varepsilon)\}_{j=1}^{\infty}$ рівняння (3) мала ті ж властивості, що й послідовність коренів $\{\tau_j(\varphi)\}_{j=1}^{\infty}$ рівняння (4), необхідно, щоб кожен корінь $\tau_j(\varphi, \varepsilon)$ належав деякому ε_1 -околу кореня $\tau_j(\varphi)$, де $\varepsilon_1 > 0$ - мале число. Фактично маємо випадок:

$$f(t) = \langle b, \varphi + \omega t \rangle = 0,$$

$$F(t, \varepsilon) = \langle b, \varphi + \omega t \rangle + \varepsilon \int_0^t \langle b, a(\varphi_s(\varphi, \varepsilon)) \rangle ds = 0,$$

де $F(t, 0) = f(t)$.

Нехай t^* - корінь рівняння (4). Корінь t , рівняння (3) будемо шукати в δ -околі точки t^* (тобто, $t \in [t^* - \delta, t^* + \delta]$), причому $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ - вибираємо з умови, що $F(t, \varepsilon)$ набуває значення різних знаків на кінцях вказаного проміжку.

Припускаємо, що малий параметр $\varepsilon > 0$, який входить у систему (1) такий, що $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, де ε_0 беремо настільки малим, щоб похідна $F'(t, \varepsilon) = M + \varepsilon a(\varphi_t(\varphi, \varepsilon))$ не змінювала знак на проміжку $[t^* - \delta, t^* + \delta]$, де $M = f'(t) = \langle b, \omega \rangle \neq 0$. Нехай, для визначеності, $0 < K_1 \leq F'(t, \varepsilon) \leq K_2$ на $[t^* - \delta, t^* + \delta]$.

Надалі введемо функцію $g(t) = t - \lambda F(t, \varepsilon)$, $\lambda > 0$, і будемо шукати розв'язок рівняння $t = g(t)$, що рівносильне рівнянню $F(t, \varepsilon) = 0, \lambda \neq 0$.

Оскільки $g'(t) = 1 - \lambda F'(t, \varepsilon)$, то $1 - \lambda K_2 \leq g'(t) \leq 1 - \lambda K_1$, і звідси легко підібрати λ , щоб можна було застосувати метод послідовних наближень, тобто так, що виконуватиметься умова

$$|g'(t)| \leq \alpha < 1. \quad (5)$$

За перше наближення беремо точку t^* і будуємо ітераційну послідовність $\{t_n\}$ за принципом $t_{n+1} = g(t_n)$.

Оскільки виконується (5), то $t_n \rightarrow t_*, n \rightarrow \infty$. Тобто, $|t_n - t_*| \leq \alpha^n |t^* - t_*| < 2\delta$, $|t^* - t_*| < \varepsilon_1$, де $\varepsilon_1 > 0$ - мале число.

Отже, оскільки t^* - довільний корінь рівняння (4) з послідовності $\{\tau_j(\varphi)\}_{j=1}^{\infty}$, то ми показали, що

$$|\tau_j(\varphi, \varepsilon) - \tau_j(\varphi)| < \tilde{\varepsilon}, j = 1, 2, \dots \forall \varphi \in \mathfrak{I}_m,$$

тобто $\{\tau_j(\varphi, \varepsilon)\}_{j=1}^{\infty}$ має ті ж властивості, що й $\{\tau_j(\varphi)\}_{j=1}^{\infty}$.

1. Samoilenko A.M. Elements of the mathematical theory of multifrequency oscillations. Kluwer Academic Publishers, 1991. 2. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. World Scientific, 1995.

УДК 517.3

А.Т. Дудикевич, С.М. Левицька

КОМБІНОВАНИЙ МЕТОД ОБЧИСЛЕННЯ ПОТЕНЦІАЛУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ ДЛЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ

У випадку розрахунку потенціалу електростатичного поля в системах з осьовою симетрією розв'язок рівняння природньо розглядати в циліндричній системі координат, в якій вважати вісь OZ- віссю симетрії.

Шукається функція $U(M)$, яка задовольняє рівнянню Лапласа

$$\Delta U(M) = 0, \quad (1)$$

$$M \in R^3 \setminus S$$

а на поверхні S -умові Діріхле

$$U(P) = f(P), \quad p \in S, \quad f(P) \in C(S) \quad (2)$$

і умові регулярності на безмежності

$$u(\infty) = 0 \quad (3)$$

де S - поверхня, задана параметричними рівняннями

$$\left. \begin{aligned} r &= r(v) \\ z &= z(v) \end{aligned} \right\}, \quad 1 \leq v \leq l \quad (4)$$

Розв'язок задачі (1)-(3) будемо шукати у вигляді потенціалу простого шару

$$U(P) = \iint_S q(P) / r(M, P) ds_p \quad (5)$$

де $q(P)$ - невідома густина поверхневих зарядів на S ;

r - віддаль між точками M і P .

Враховуючи граничну умову (2), із (5) для визначення невідомої функції отримуємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\iint_S \frac{q(P) dS_P}{r(M, P)} = f(P) \quad (6)$$

Заміна змінних (4) і певні перетворення риведуть це рівняння до вигляду

$$\int_{-1}^1 \frac{q(v) F(v) K(k) dv}{\sqrt{(r - \bar{r})^2 + (z - \bar{z})^2}} \Big|_L = f(\bar{r}, \bar{z}), \quad (7)$$

де
$$k^2 = \frac{4r\bar{r}}{(r - \bar{r})^2 + (z - \bar{z})^2},$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \quad - \text{ повний еліптичний інтеграл}$$

першого роду, для визначення якого використовується апроксимація

$$K(k) = W(a) + V(a) \ln \frac{1}{a} \quad (8)$$

$$0 \leq k^2 < 1 \quad a = 1 - k^2 = [(r - \bar{r})^2 + (z - \bar{z})^2] / [(r + \bar{r})^2 + (z - \bar{z})^2]$$

Інтегральне рівняння (7) розв'язується методом механічних квадратур. Невідому густину представимо у вигляді

$$q(v) = g(v) / \sqrt{1 - v^2} \quad (9)$$

При співпаданні точок інтегрування з точками спостереження ядро інтегрального рівняння (7) має особливість. Застосовуємо методику виділення особливостей

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left(\frac{g(v) F(v) K(k)}{\sqrt{1 - v^2} \sqrt{(r + \bar{r})^2 + (z - \bar{z})^2}} - \frac{g(\bar{v}) F(\bar{v}) \ln |v - \bar{v}|}{\sqrt{1 - v^2}} \right) dv + \\ & + g(\bar{v}) F(\bar{v}) \int_{-1}^1 \frac{\ln |v - \bar{v}|}{\sqrt{1 - v^2}} dv = f(\bar{v}) \end{aligned} \quad (10)$$

Останній інтеграл в (10) обчислюється аналітично

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln |v - \bar{v}|}{\sqrt{1 - v^2}} dv = -\pi \ln 2,$$

а підінтегральна функція в першому інтегралі в особливій точці доозначається деякою константою $C(\bar{v})$.

Оскільки підінтегральна функція в (10) неперервна, то застосовуємо квадратурну формулу Гаусса-Чебишева з вагою

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M f(x_m) \quad , \quad x_m = \cos\left(\frac{2m-1}{2M}\pi\right) \quad (11)$$

За точки спостереження вибираємо нулі многочлена Чебишева першого роду $v_l = \cos\left(\frac{2l-1}{2M}\pi\right)$, $l = \overline{1, M}$. Із (10) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{m=1}^M A_{m,l} g_l = f_l \quad , \quad l = \overline{1, M} \quad , \quad (12)$$

де

$$A_{m,l} = \frac{\pi}{M} \frac{g(v_m) F(v_m) K(k)}{\sqrt{(r(v_m) + r(v_l))^2 + (z(v_m) - z(v_l))^2}}$$

$$A_{m,m} = \frac{\pi}{M} \{c(v_m) - F(v_m) \sum_{p=1, p \neq m}^M \ln|v_p - v_m| - \pi F(v_m) \ln 2\} \quad (13)$$

Тому що виділення особливостей приводить до діагонального переважання, то система лінійних алгебраїчних рівнянь буде стійкою. Розв'язуючи систему (12) методом Гаусса, знаходимо невідомі компоненти густини $g(v_1), g(v_2), \dots, g(v_M)$.

Тоді потенціал в довільній точці можна знайти за формулою

$$U(x(v_l), y(v_l), z(v_l)) = \sum_{m=1}^M \frac{g(v_m)}{\sqrt{1-v_m^2}} \frac{F(v_m) K(k)}{\sqrt{(r(v_m) + r(v_l))^2 + (z(v_m) - z(v_l))^2}} \quad (14)$$

Для розрахунку електронно-оптичних систем однією з основних задач є задача обчислення траєкторій руху електронів, що зводиться до знаходження компонент напруженості поля. Ця задача методом інтегральних рівнянь вимагає великих обчислювальних розрахунків, тому доцільно від зовнішньої задачі перейти до внутрішньої. При цьому значення потенціалу на границі області замикавання знаходяться за формулою (14) а у внутрішній області - методом сіток.

Для цього диференціальна задача (1)-(2) для довільної точки замкнутої області в осесиметричній циліндричній системі координат запишеться так:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = f(r, z), \quad (r, z) \in R^3 \setminus S \quad (15)$$

$$U|_{\Gamma} = f(r, z), \quad (r, z) \in S; \quad (16)$$

Коефіцієнти рівняння (15) мають особливість, тому на осі симетрії розв'язується рівняння вигляду

$$2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = f(0, z) \quad (17)$$

і вводиться рівномірна сітка по змінній r зсунута на півкроку, тобто

$$\Omega = w_r * w_z = \{(r_i, z_j) \mid r_i \in w_r, z_j \in w_z\},$$

де

$$w_r = \{r_i = (i + \frac{1}{2})h_r, i = 0, 1, 2, \dots, h_r > 0\}$$

$$w_z = \{z_j = jh_z, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, h_z > 0\}$$

Диференціальна задача (15)-(16) апроксимується на даній сітці різницевою задачею:

$$\frac{i}{r_i h_r} U_{i-1,j} + \frac{1}{h_z^2} U_{i,j-1} + \frac{i+1}{r_i h_r} U_{i+1,j} + \frac{1}{h_z^2} U_{i,j+1} - \left(\frac{2}{h_z^2} + \frac{2i+1}{h_r r_i}\right) U_{i,j} = -f_{i,j} \quad (r \neq \frac{h_r}{2}) \quad (18)$$

$$\frac{1}{h_z^2} (U_{0,j+1} + U_{0,j-1}) + \frac{4}{h_r^2} U_{1,j} - \left(\frac{2}{h_z^2} + \frac{4}{h_r^2}\right) U_{0,j} = -f_{0,j} \quad (\text{для } r = \frac{h_r}{2}) \quad (19)$$

Система різницевих рівнянь розв'язувалася ітераційними методами верхньої релаксації за точками згідно розрахункових формул:

$$\hat{U}_{i,j}^{(n+1)} = \frac{r_i h_r h_z^2}{2(r_i h_r + (i+1)h_z^2)} \left(\frac{i}{r_i h_r} U_{i-1,j}^{(n+1)} + \frac{1}{h_z^2} U_{i,j-1}^{(n+1)} + \frac{i+1}{r_i h_r} U_{i+1,j}^{(n)} + \frac{1}{h_z^2} U_{i,j+1}^{(n)} + f_{i,j} \right) \quad (r \neq \frac{h_r}{2}) \quad (20)$$

$$\hat{U}_{0,j}^{(n+1)} = \frac{h_r^2 h_z^2}{2(h_r^2 + 2h_z^2)} \left(\frac{1}{h_z^2} (U_{0,j+1}^{(n)} + U_{0,j-1}^{(n+1)}) + \frac{4}{h_r^2} U_{1,j}^{(n)} + f_{0,j} \right), \quad (r = \frac{h_r}{2}), \quad (21)$$

$$U_{i,j}^{(n+1)} = w_n \hat{U}_{i,j}^{(n+1)} + (1 - w_n) U_{i,j}^{(n)}, \quad \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, N, \\ j = 1, \dots, M, \end{matrix} \quad (22)$$

і верхньої релаксації з прогонкою за лініями:

$$\frac{i}{h_z^2} \hat{U}_{i,j-1}^{(n+1)} - \left(\frac{2}{h_z^2} + \frac{2i+1}{r_i h_r}\right) \hat{U}_{i,j}^{(n+1)} + \frac{1}{h_z^2} \hat{U}_{i,j+1}^{(n+1)} = -f_{i,j} - \frac{i}{r_i h_r} U_{i-1,j}^{(n+1)} - \frac{i+1}{r_i h_r} U_{i+1,j}^{(n)}, \quad (r \neq \frac{h_r}{2}) \quad (23)$$

$$\frac{1}{h_z^2} \hat{U}_{0,j+1}^{(n+1)} - 2\left(\frac{1}{h_z^2} + \frac{2}{h_r^2}\right) \hat{U}_{0,j}^{(n+1)} + \frac{1}{h_z^2} \hat{U}_{0,j-1}^{(n+1)} = -f_{0,j} - \frac{4}{h_r^2} U_{1,j}^{(n)},$$

$$(r = \frac{h_r}{2}) \quad (24)$$

$$U_{i,j}^{(n+1)} = w_n \hat{U}_{i,j}^{(n+1)} + (1 - w_n) U_{i,j}^{(n)}, \quad (25)$$

У формулах (22) і (25) – оптимальний параметр верхньої релаксації, який значно прискорює збіжність даних ітераційних процесів, і визначається згідно методики [1].

Обчислювальним експериментом на модельній задачі показана перевага ітераційного методу верхньої релаксації з прогонкою за лініями.

І. Самарский А.А. Теория разностных схем.- М.:Наука.1989.-616 с.2. Левицька С.М. Виділення еліптичних інтегралів в осесиметричній задачі нестационарної теплопровідності. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип.41. С.91-94.

УДК 517.949.21

А.Т. Дудикевич, С.М. Левицька

РІЗНИЦЕВА СХЕМА ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА В ПРОСТОРОВОМУ ВИПАДКУ

Розв'язується внутрішня просторова задача Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta U = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 U}{\partial x_\alpha^2} = f(x_1, \dots, x_p), (x_1, \dots, x_p) \in G \quad (1)$$

$$U|_\partial = g(x_1, \dots, x_p), (x_1, \dots, x_p) \in \partial, \quad (2)$$

в паралелепіпеді $\bar{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = \overline{1, p}\}$ де $\bar{G} = G \cup \partial$.

Апроксимуючи диференціальну задачу (1) - (2) різницевими співвідношеннями, одержується різницева задача підвищеного порядку точності

$$\Lambda^i y = \varphi(x), x \in \omega_h \quad (3)$$

$$y|_{\gamma_h} = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \quad (4)$$

де p – розмірність задачі, $\lambda_\alpha y = -y_{\overline{\chi_\alpha \chi_\alpha}} (\alpha = \overline{1, p})$ – різницева

апроксимація на сітці ω_h оператора $L_\alpha, \varphi = f - \sum_{\alpha=1}^p \chi_\alpha \lambda_\alpha f, \chi_\alpha = \frac{h_\alpha^2}{12}$.

Теорема. Нехай розв'язок задачі (1)-(2) задовольняє умовам, при яких різницева схема (3)-(4) має максимальний (шостий) порядок апроксимації. Тоді різницева схема (3)-(4) збігається в нормі сіткових просторів $L_2, W_2^{(1)}, W_2^{(2)}$ зі швидкістю $m(h^6)$ для довільного $p \geq 2$. Для $p = 2, 3$ різницева схема (3)-(4) збігається з цією ж швидкістю в рівномірній метриці.

Різницева схема, яка визначена на 3^p – точковому шаблоні, задовольняє умовам принципу максимуму тоді і тільки тоді, якщо для кроків сітки виконується умова

$$\sum_{\beta \neq \alpha}^{i+K} \frac{h_\alpha^2}{h_\beta^2} \leq 5. \quad (5)$$

В роботі на паралелепіпедальній сітці з кроками $h_\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$ приводиться різницева схема (3)-(4),

$$\text{де } \Lambda^1 y = \Lambda y + \frac{k}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta > \alpha} (h_\alpha^2 + h_\beta^2) \lambda_\alpha \lambda_\beta y + l \prod_{\alpha=1}^3 h_\alpha \lambda_\alpha y,$$

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{k}{2} \sum_{\alpha=1}^3 h_\alpha^2 \lambda_\alpha f, \lambda y = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha y.$$

На 27-точковому шаблоні, який складається із вузлів $(x + ih_1, y + jh_2, z + kh_3, i, j, k = -1, 0, 1)$ в індексному вигляді одержано різницеве рівняння

$$(\Lambda^1 U)_{i,j,k} = \frac{1}{60} \left\{ \begin{aligned} &2(20\alpha - 5\beta - 5\gamma + 4)(U_{i+1,j,k} + U_{i-1,j,k}) + \\ &+ 2(20\beta - 5\alpha - 5\gamma + 4)(U_{i,j+1,k} + U_{i,j-1,k}) + \\ &+ 2(20\gamma - 5\alpha - 5\beta + 4)(U_{i,j,k+1} + U_{i,j,k-1}) + \\ &+ [5(\beta + \alpha) - 4](U_{i+1,j+1,k} + U_{i-1,j+1,k} + U_{i+1,j-1,k} + \\ &+ U_{i-1,j-1,k}) + [5(\alpha + \gamma) - 4](U_{i+1,j,k+1} + U_{i+1,j,k-1} + \\ &+ U_{i-1,j,k+1} + U_{i-1,j,k-1}) + [5(\beta + \gamma) - 4](U_{i,j+1,k+1} + \\ &+ U_{i,j+1,k-1} + U_{i,j-1,k+1} + U_{i,j-1,k-1}) + 2(U_{i+1,j+1,k+1} + \\ &+ U_{i+1,j+1,k-1} + U_{i-1,j+1,k+1} + U_{i-1,j+1,k-1} + \\ &+ U_{i+1,j-1,k+1} + U_{i-1,j-1,k+1} + U_{i+1,j-1,k-1} + U_{i-1,j-1,k-1}) - \\ &- 16[1 + 5(\alpha + \beta + \gamma)]U_{i,j,k} \end{aligned} \right\} = f_{i,j,k}$$

Для $k=l=0$ дана різницева схема на кубічній сітці має другий порядок точності, для $k=\frac{1}{6}, l=0$ – четвертий, а для $k=\frac{1}{6}, l=\frac{1}{30}$ – шостий.

1. Самарский А.А. Теория разностных схем.-М.: Наука, 1989.-616с.

УДК 536.241

Л.М. Дяконюк, Я.Г. Савула

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОПЕРЕНЕСЕННЯ У ШАРІ З ТОНКИМ ПОКРИТТЯМ

Розглянемо ізотропний шар постійної товщини H з тонким покриттям, товщина якого h є малою в порівнянні з H . Теплофізичні характеристики покриття і шару є різними. Вважатимемо, що між покриттям і пластиною існує ідеальний тепловий контакт, бічна поверхня теплоізована, а на верхній і нижній лицевій поверхні заданий теплообмін за Ньютоном.

Потрібно знайти функцію розподілу температури, вважаючи відомим розподіл в початковий момент часу.

Для математичного моделювання даної задачі використаємо неklasичну комбіновану модель, яка враховує малість товщини покриття, що є особливо важливим для застосування чисельних методів. Для її побудови використано припущення, що функція розподілу температури в покритті змінюється за лінійним законом по товщині. Отримана модель складається з системи диференціальних рівнянь, що містять диференціальні оператори різної вимірності за просторовими змінними. Детальний опис даної моделі та її дослідження зроблені в роботах [1,2].

Для чисельного аналізу задачі використовуємо напіваналітичний метод скінченних елементів, з розкладом функції температури в шарі в ряд по товщині за функціями Бабушки [3] та МСЕ з двовимірними ізопараметричними квадратичними апроксимаціями за двома іншими просторовими координатами.

Наближення за часовою змінною здійснюється за схемою Кранка-Ніколсона.

Чисельні результати даної задачі отримані для шару з покриттям при таких даних:

товщина шару – $H=0.08$, товщина покриття – $h=0.008$, довжина і ширина 0.8, $\lambda = 3.85$, $\lambda_{\text{покp}} = 385$, $c\rho = 2100000$, $(c\rho)_{\text{покp}} = 3402000$, на верхній лицевій поверхні $\alpha = 900$, на нижній лицевій поверхні – $\alpha = 0$. (Всі дані подані в одиницях системи СІ).

Температура середовища на верхній лицевій поверхні задана функцією

$$T_c = (T_{\max} - T_p) \exp\left(-(\alpha_1 - 0.4)^2 - (\alpha_2 - 0.4)^2\right) / (1 - \exp(-0.16)) + (T_p - T_{\max} \exp(-0.16)) / (1 - \exp(-0.16))$$

На рис. 1 і рис. 2 зображені графіки розподілу температури для пластини з покриттям і без покриття відповідно в площині

перерізу $\alpha_3 = 0.3 \quad \left(-\frac{H}{2} \leq \alpha_3 \leq \frac{H}{2}\right)$ в момент часу $\tau = 50c$ при

$\Delta\tau = 0.5c$.

Чисельні результати отримані при використанні сітки з 64 скінченних елементів та 7 функціях розкладу Бабушки [3] і показують збільшення плавності нагріву шару при наявності тонкого металічного покриття.

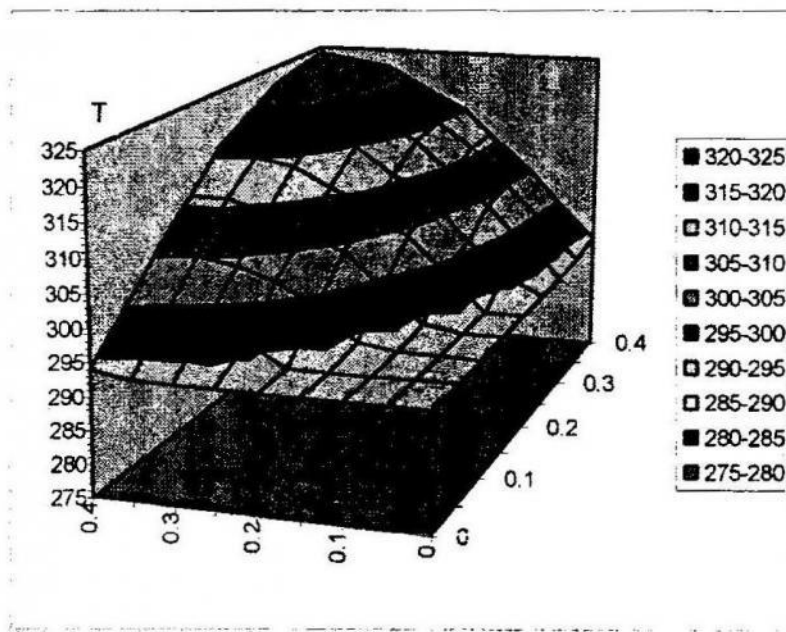


Рис.1. Розподіл температури в пластині без покриття.

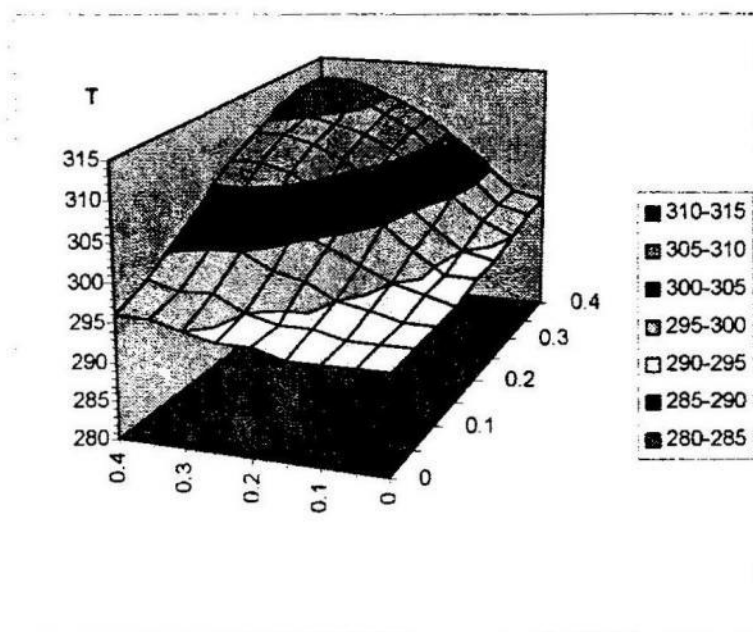


Рис.1. Розподіл температури в пластині з покриттям.

1. Я.Г. Савула. Математична модель теплоперенесення через тривимірне тіло з тонким плоским покриттям //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип.42. С. 4-7. 2. Дяконюк Л.М., Савула Я.Г. Дослідження задачі теплоперенесення через тривимірне тіло з тонким плоским покриттям. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Мех.-мат. Вип.44. 1996.,с.10-18. 3. B. Szabo, I. Babuska. Finite element analysis.-John waley and Sons, Inc,1991. P. 37.

УДК 519.689

П. Жежнич

ПРОБЛЕМИ ПОДАННЯ ЧАСОВИХ ДАНИХ В ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ (НА ПРИКЛАДІ СИСТЕМИ "ЕЛЕКТРОННОГО МУЗЕЮ")

Одними з пріоритетних напрямків наукових досліджень та практичних розробок науковців кафедри "Інформаційні системи та мережі" є проектування та побудова розподілених інформаційних систем, що базуються на використанні сучасних технологій баз даних та інформаційних мереж. Зокрема, до таких напрямків можна віднести проектування часових реляційних баз даних (бази даних, у

яких за допомогою традиційної реляційної моделі факти подаються у їх часовому контексті).

Напрацювання по часових базах даних мають широке застосування. Одному з них автор хотів би присвятити увагу - системі "електронного музею", яка створюється спеціально для Львівського історичного музею. Нині багато музеїв, як історико-культурні осередки, не обмежуються лише організацією "живих" експозицій і виставок експонатів. Ефективні засоби збереження та подання інформації дозволяють проводити виставки в комп'ютерній формі, зокрема, засобами мережі Internet.

Розглянемо архітектуру системи "електронного музею". У ній виділяється декілька головних компонентів.

1. Підсистема обліку фондів музейних експонатів та іншої інформації, що є характерною для музейної справи (база даних "електронного музею"). Ця компонента є базовою для системи в цілому, а якість реалізації визначає працездатність та можливості масштабування її для всього комплексу. Вона побудована згідно спеціальної об'єктно-часової методики проектування реляційних баз даних, оскільки вся музейна інформація містить часові характеристики: кожен експонат має свою історію і з ним можуть бути пов'язані деякі історичні події.

Ця методика полягає в наступному. Уся предметна область на три класи об'єктів залежно від їх відношення до часу. Об'єкти першого класу мають довідковий характер. Вони містять інформацію, яка повинна бути актуальною на теперішній момент часу. Фактично ця інформація не залежить від часу. Об'єкти другого класу мають документальний характер. Документ описує деякий факт, який відбувся в конкретний момент часу. Тобто ця інформація є актуальною з того моменту часу, коли вона з'явилася. Об'єкти третього класу, або бізнес-об'єкти - це найскладніші об'єкти предметної області, дані про яких можуть змінюватися з часом. Для бізнес-об'єкта можна виділити два типи характеристик: сталі, незмінні протягом всього його існування - це так званий заголовок, і змінні з часом - це історія. Схематично ці класи об'єктів можна зобразити наступним чином:



Слід зазначити, що документ відрізняється від запису в історії об'єкта тим, що історія стосується лише одного бізнес-об'єкта, а документ може стосуватися кількох. Прикладом бізнес-об'єкта може бути музейний експонат, довідником може служити тип експонату, а документ – це факт надходження набору експонатів в музей.

Схема бази даних, побудована за об'єктно-часовим підходом, дуже чітко формалізує предметну область. Крім того, така схема спрощує процес аналізу даних.

2. Підсистема аналізу бази даних. Ця компонента орієнтована на підтримку науково-пошукової роботи працівників музейної установи. Вона повинна функціонувати в локальній мережі музею та забезпечувати користувачів можливостями аналітичного пошуку, встановлення різноманітних залежностей поміж історичними фактами та музейними експонатами. Ці можливості частково вирішуються на рівні часової бази даних.

3. Підсистема показу музейних експонатів. Головним її призначенням є організація доступу непривілейованих користувачів системи до презентаційної частини фондів ("електронна виставка"). Для цієї підсистеми потрібна організація доступу великої потенційно необмеженої кількості користувачів. Враховуючи це, доцільно проектувати цю підсистему, ґрунтуючись на інфраструктурі глобальних інформаційних мереж, зокрема Internet. Подання інформації кінцевому користувачу варто організовувати за допомогою служб, орієнтованих на передавання гіпертекстової та мультимедійної інформації, зокрема, це можуть бути служби на основі Web-технології. У такому випадку доступ до електронної виставки в межах приміщення музею здійснюватиметься через intranet-систему, а в глобальних масштабах - через службу World Wide Web. Особливістю виставкової компоненти електронного

музею є її повна інтеграція з компонентою бази даних. Зокрема, уся виставкова інформація повинна бути підмножиною фондів, що зберігаються в БД. Така риса виділятиме проектовану систему з числа різноманітних виставок та музеїв, що вже функціонують в Internet.

1. Э. Каравасв *Основания временной логики*. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 2. *Мультимедиа-галерея*. - HARD'n'SOFTю. 1997. №2.

УДК 519.6

М.В. Жук, А.Ю. Кіндибалюк

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо бігармонічне рівняння

$$Au \equiv \Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y) \quad (1)$$

в області $D = \{0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b\}$ при однорідних крайових умовах

$$u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a; \quad (2)$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = b. \quad (3)$$

Оператор A розглядаємо в дійсному гільбертовому просторі $H = L_2(D)$ з нормою $\|u\|^2 = \iint_D u^2(x, y) dx dy$.

За область визначення оператора A приймаємо множину 4 рази неперервно диференційованих функцій у замкненій області $\bar{D} = D + \Gamma$, які задовольняють крайові умови (2), (3).

Оператор A задачі (1) – (3) є додатно визначеним, тобто для довільного $u \in D(A)$ виконується

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \quad \gamma = \text{const} > 0. \quad (4)$$

Позначимо через H_A його енергетичний простір. При цьому скалярний добуток та енергетична норма в H_A визначаються наступним чином

$$[u, v]_A = \iint_D \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\} dx dy, \quad (5)$$

$$|u|_A^2 = [u, u] = \iint_D \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dx dy. \quad (6)$$

Із нерівності (4) в результаті граничного переходу для довільного $u \in H_A$ маємо

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma} |u|_A. \quad (7)$$

Зауважимо, що умови (2), (3) – головні, тобто функції із енергетичного простору H_A їх задовольняють. Функція $u \in H_A$ називається узагальненим розв'язком задачі (1) – (3), якщо для довільної функції $v \in H_A$ виконується тотожність

$$[u, v]_A = (f, v). \quad (8)$$

До задачі (1) – (3) застосовуємо метод Канторовича, за яким наближений розв'язок шукається у вигляді

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n C_k(x) \varphi_k(y), \quad (9)$$

де координатна система $\{\varphi_k(y)\}$ вибирається таким чином, щоб система функцій $\{\chi_i(x) \varphi_k(y)\}$ була повною в просторі H_A .

Невідомі коефіцієнти $C_k(x)$ визначаємо із системи

$$\int_0^b (A u_n - f) \varphi_i(y) dy = 0, \quad (10)$$

$$C_i(x)|_{x=0} = C_i(x)|_{x=a} = 0, \quad (11)$$

$$C_i''(x)|_{x=0} = C_i''(x)|_{x=b} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

яка зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку відносно $C_k(x)$.

Введемо поняття узагальненого розв'язку системи методу Канторовича (10) – (12). Позначимо через $H_n \subset H$ простір функцій

вигляду $v_n(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k(x) \varphi_k(y)$. Нехай для деякої функції

$u_n(x, y) \in H_n \cap H_A$ справджується тотожність

$$[u_n, v_n] = (f, v_n),$$

в якій $v_n(x, y)$ – довільна функція з $H_n \cap H_A$. Тоді функція $u_n(x, y)$ називається узагальненим розв'язком методу Канторовича (10) – (12).

Аналогічно, як і в праці [1] доводиться наступна теорема.

Теорема. При довільній функції $f(x, y) \in H$ задача (1) – (3) має єдиний узагальнений розв'язок $u(x, y) \in H_A$; при довільному n система методу Канторовича (10) – (12) має єдиний узагальнений розв'язок $u_n(x, y) \in H_n \cap H_A$, який збігається до розв'язку задачі (1) – (3) і швидкість збіжності характеризується оцінкою

$$|u - u_n|_A \leq |u - v_n|_A,$$

де елемент $v_n \in H_n \cap H_A$ такий, що реалізує мінімум функціонала $|u - v_n|_A$.

Зауважимо, що координатну систему функцій $\{\varphi_k(y)\}$ можна, наприклад, вибирати наступним чином

$$\varphi_k(y) = y^2(y-b)^2 y^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

І. Лучка А.Ю., Жук М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа. Сб. "Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений". К., 1975. С. 84 – 98.

УДК 519.6

П.Ф. Завгородній, А.П. Власюк, О.Ю. Тимейчук

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ОРЕБРЕННЯ ПОВЕРХНІ ФОРМИ НА ПРОЦЕС ЛИТТЯ

Оребрення поверхні форми є одним з основних шляхів інтенсифікації теплопередачі. В ідеально виконаній формі формуючі

поверхні мають ізотермічне поле температур. Необхідно зауважити, що ребра різної геометрії і теплопровідності по - різному впливають на процес лиття навіть в однакових умовах при однорідних джерелах теплоти.

Рівномірного розподілу температури у формі можна досягти за рахунок поперечних (радіальних) ребер. Поздовжні ребра дозволяють збільшити тепловіддачу з поверхні конструкції.

З метою оптимізації теплового режиму роботи для лиття нами була запропонована конструкція форми з радіальними та поздовжніми ребрами.

Математична модель оребрення. Математична модель теплових процесів, які відбуваються в радіальному ребрі, можна описати диференціальним рівнянням 2- го порядку

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{R-2r}{r(R-r)} \frac{d\theta}{dr} - \frac{\alpha\theta}{\lambda(R-r)\sin\varphi} = 0 \quad (1)$$

з такими граничними умовами:

$$\theta|_{r=r_1} = \theta_1, \quad \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_2} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \theta, \quad (2)$$

де θ - температурний напір в основі ребра; r - радіальна змінна; r_1 та r_2 - зовнішні радіуси форми відповідно без врахування та з врахуванням радіального ребра; λ - коефіцієнт теплопровідності; α - коефіцієнт тепловіддачі; 2φ - кут, під яким виготовлено радіальне ребро.

Розв'язок крайової задачі (1), (2) має вигляд

$$\theta(r) = C_1 \cdot y_1(r/R) + C_2 \cdot y_2(r/R), \quad (3)$$

де

$$y_1(r/R) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} C_{\kappa}^{(1)} \cdot (r/R)^{\kappa},$$

$$y_2(r/R) = y_1(r/R) \cdot \ln(r/R) + \sum_{\kappa=0}^{\infty} C_{\kappa}^{(2)} \cdot (r/R)^{\kappa},$$

$$C_1 = \frac{\theta_1 \cdot b_2}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}, \quad C_2 = \frac{-\theta_1 \cdot a_2}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1},$$

$$a_1 = y_1(r_1/R), \quad a_2 = y_1^{\circ}(r_2/R) + \alpha/\lambda \cdot y_1(r_2/R)$$

$$b_1 = y_2(r_1/R), \quad b_2 = y_2^{\circ}(r_2/R) + \alpha/\lambda \cdot y_2(r_2/R).$$

Значення температурного напору в ребрі дорівнює

$$\theta = \frac{\theta_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \cdot (b_2 \cdot y_1(r/R) - a_2 \cdot y_2(r/R)). \quad (4)$$

Тоді тепловіддача від радіальних ребер обчислюється за формулою

$$Q_{pp} = -\frac{\lambda}{R} \cdot \theta_1 \cdot E_{pp} \cdot f_{pp} \cdot n_{pp}, \quad (5)$$

де $E_{pp} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \cdot [b_2 \cdot y_1^{\odot}(r/R) - a_2 \cdot y_2^{\odot}(r/R)]$ – безрозмірний

комплекс ефективності впливу радіальних ребер на тепловий потік.

Аналогічно розраховується теплообмін з врахуванням поздовжніх ребер, який описується диференціальним рівнянням 2-го порядку

$$\frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\theta}{dr} - \frac{\alpha_p \cdot n \cdot \theta}{\pi \cdot \lambda \cdot r \cdot \cos \varphi} = 0 \quad (6)$$

з наступними граничними умовами:

$$\theta|_{r=r_1} = \theta_1 = t_1 - t_p, \quad -\lambda \frac{d\theta}{dr} \Big|_{r=r_2} = \alpha_l \cdot \theta_l \Big|_{r=r_2}, \quad (7)$$

де $F_l = 2\pi r l / n$, n - кількість ребер, l - довжина ребра.

Ввівши координату $z = (\alpha_p \cdot n \cdot r) / (\pi \cdot \lambda \cdot \cos \varphi)$, рівняння (6) зведемо до рівняння Бесселя

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\theta}{dz} - \frac{\theta}{z} = 0, \quad (8)$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$\theta = C_1 \cdot I_0(2 \cdot \sqrt{z}) + C_2 \cdot K_0(2 \cdot \sqrt{z}), \quad (9)$$

де I_0 , K_0 - модифіковані функції Бесселя першого та другого роду нульового порядку; C_1 , C_2 - константи.

Використавши граничні умови (7), отримаємо розподіл температур в поздовжніх ребрах

$$\theta = \theta_1 \frac{\lambda \cdot \sqrt{z_2} \cdot K_1(2 \cdot \sqrt{z_2}) \cdot I_0(2 \cdot \sqrt{z}) - \alpha_l \cdot r_2 \cdot K_0(2 \cdot \sqrt{z_2}) \cdot I_0(2 \cdot \sqrt{z})}{P} + \\ + \frac{\lambda \cdot \sqrt{z_2} \cdot I_1(2 \cdot \sqrt{z_2}) \cdot K_0(2 \cdot \sqrt{z}) + \alpha_l \cdot r_2 \cdot I_0(2 \cdot \sqrt{z_2}) \cdot K_0(2 \cdot \sqrt{z})}{P}. \quad (10)$$

Тоді тепловий потік від поздовжніх ребер дорівнює

$$\theta_p = -\lambda \cdot \frac{d\theta}{dr} \Big|_{r=r_1} \quad f = -2\pi r_1 \lambda \frac{d\theta}{dr} \Big|_{r=r_1}, \quad (11)$$

де

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_1} = -\theta_1 \frac{\sqrt{z_1}}{r_1} \left(\frac{\lambda \cdot \sqrt{z_2} \cdot K_1(2 \cdot \sqrt{z_2}) \cdot I_1(2 \cdot \sqrt{z_1})}{P} - \frac{\alpha_l \cdot r_2 \cdot K_0(2 \cdot \sqrt{z_2}) \cdot I_1(2 \cdot \sqrt{z_1})}{P} - \frac{\lambda \cdot \sqrt{z_2} \cdot K_1(2 \cdot \sqrt{z_1}) \cdot I_1(2 \cdot \sqrt{z_2})}{P} - \frac{\alpha_l \cdot r_2 \cdot I_0(2 \cdot \sqrt{z_2}) \cdot K_1(2 \cdot \sqrt{z_1})}{P} \right). \quad (12)$$

Використовуючи результати чисельно-аналітичного моделювання, отримали рівняння сумарного теплового балансу від усієї поверхні форми. На основі проведеного математичного моделювання сконструйовано форму для лиття неметалів з певною кількістю поздовжніх та радіальних ребер, для якої розподіл температур має рівномірний характер, тобто тепловий режим роботи такої форми оптимальний.

УДК 519:6

К.С. Іванків, М.В. Щербатий

ДО ПИТАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСАМИ ПРОТІКАННЯ ІНФЕКЦІЙНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ

Успішне застосування методів математичного моделювання у клінічній практиці тісно пов'язане із створенням ефективних алгоритмів і програм, які дозволяють здійснювати числове дослідження створених моделей, проводити статистичну оцінку їх параметрів, знаходити оптимальні керування процесами, що досліджуються.

Аналіз математичних моделей інфекційних захворювань [1,5] дають основу для постановок змістовних задач оптимального керування імунофізіологічними процесами у живому організмі з метою обґрунтування рекомендацій до вибору найбільш адекватного лікування хворого.

Складність процесів, що проходять у живому організмі [4] не дозволяють однозначно вибрати критерій оптимального керування лікуванням, виходячи із практичних міркувань. Результати, отримані у [2, 3] показують, що можна запропонувати такий критерій, який добре узгоджується з досвідом застосування індексів важкості [2] у клінічній практиці і пов'язаний із забезпеченням стійкого стану здорового організму.

1. Опис моделі інфекційного захворювання з врахуванням температури.

В даній роботі для моделювання інфекційних захворювань використовуються моделі, запропоновані групою математиків і клініцистів під керівництвом Г.І.Марчука [1]. Ці моделі при різних значеннях параметрів відображають чотири основні форми захворювань: субклінічну, гостру, хронічну і летальний наслідок. В математичному плані розглядувані моделі є задачами Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь із запізненням.

Розглянемо, наприклад, модель інфекційного захворювання, яка враховує температурну реакцію організму [1]:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= (\beta(T) - \nu F)V, \\ \frac{dF}{dt} &= \rho C - \eta \nu FV - \mu_f F, \\ \frac{dC}{dt} &= \xi(m)\alpha(T)F(t-\tau)V(t-\tau) - \mu_c(C - C^*), \\ \frac{dm}{dt} &= \sigma V - \mu_m m, \quad t \in [t_0, t_e] \\ \frac{dT}{dt} &= K_T(FV - (FV)^*)\theta(FV - (FV)^*) - \mu_T(T - T^*)\end{aligned}\tag{1}$$

з початковими умовами в точці $t = t_0$ і на інтервалі запізнення $t \in [t_0 - \tau, t_0]$

$$V(t) = V_0, F(t) = F_0, C(t_0) = C_0, m(t_0) = m_0, T(t_0) = T_0\tag{2}$$

Основними характеристиками інфекційного захворювання є: $V(t)$ - концентрація (кількість) вірусів; $F(t)$ - концентрація антитіл; $C(t)$ - концентрація плазмоклітин (виробників антитіл); $m(t)$ - відносна характеристика пораненого органу; ($m = 1 - M'/M$, де M, M' - характеристика здорового органу і здорової частини пораненого органу відповідно (маса або площа)); $T(t)$ - температура

організму. Величини $\beta, \nu, \rho, \eta, \mu_f, \alpha, \mu_c, \tau, \mu_m, k_T, \mu_T$ є вхідними параметрами моделі і характеризують як здатність вірусів розмножуватись в організмі, так і здатність організму протистояти розмноженню.

Функції $\beta(T), \alpha(T)$, які характеризують темпи розмноження вірусів і коефіцієнт стимуляції імунної системи відповідно вибираються у вигляді

$$\begin{aligned}\beta(T) &= \beta_0 / (1 + a(T - T^*)), \\ \alpha(T) &= \alpha_0 / (1 + b(T - T^*)),\end{aligned}\quad (3)$$

α_0, β_0 - значення відповідних коефіцієнтів при нормальній температурі $T = T^* = 36,6^\circ \text{C}$, $a > 0, b > 0$ - деякі параметри.

2. Критерій оптимізації.

Вхідні параметри моделі утворюють вектор керувань, який позначимо

$$u = u(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)\}, \quad u \in U, \quad (4)$$

де U область допустимих керувань, що враховує додаткові обмеження, які накладаються, наприклад, на фізіологічно допустимі дози застосування деяких препаратів, невід'ємність ряду керувань та ін.

Наведемо декілька функціоналів, які можна використовувати як критерій оптимізації процесом протікання інфекційних захворювань.

Функціонал

$$I(u) = \int_0^\infty m(u(t), t) dt \rightarrow \min_{u \in U} \quad (5)$$

дає керування гладким проходженням захворювання, що є найбільш бажаний результат лікування [2].

Введемо величину

$$J(u, t_1, t_2) = \frac{\ln(m(u(t_1), t_1) / m(u(t_2), t_2))}{t_2 - t_1}, \quad (6)$$

$$u = u(t) \in U,$$

яка називається середнім темпом функціонального відновлення на інтервалі часу $0 \leq t_1 < t_2 < +\infty$. Можна розглядати вибір оптимального керування процесом (1)-(2), як задачу максимізації середнього темпу функціонального відновлення (6) на інтервалі часу (t_1, t_2) .

Степінь збалансованості різних ланок імунної системи і її резервні можливості пропонуються [3] характеризувати функціоналом

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} V(t) dt / (t_{\max} - t_0) \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt + S_0 \quad (7)$$

де $t_{\max}$ - час досягнення максимуму концентрації антитіл, S_0 - деякий параметр.

Функціонал (7) носить назву індексу імунного статусу організму і може вибиратись в ролі критерію оптимальності при керуванні імунного відповіддю організму.

Проведені нами числові експерименти при різних значеннях вхідних параметрів моделі (1)-(2) дозволяють відображати різні форми протікання інфекційних захворювань і вказують на можливість добитися відповідного ефекту при лікуванні цих захворювань.

1. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. - М.: Наука, 1980. - 264 с. 2. Погочев И.Б. Применение математических моделей заболеваний в клинической практике. - М.: Наука, 1988. - 192 с. 3. Сергиенко И.В., Яненко В.М., Ажаев К.Л. Оптимальное управление иммунным ответом, синхронизирующее отдельные звенья иммунной системы. II. Идентификация параметров модели и восстановление пропущенных данных. //Кибернетика и системн. анализ. - 1997. - № 1. - С. 161-186. 4. Петров Р.В. Иммунология. - М.: Медицина, 1987. - 415 с. 5. Prikrlyova D., Jilek M., Waniewski J. Mathematical modelling of the immuno response/- Boea Kation, Usa: CRC press Inc., 1992-210 p.

УДК 539.3

Н.В. Иванова

ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ДЕФОРМУВАННЯ ЗСУВНИХ ОБОЛОНОК

Використання певних гіпотез дає змогу замість тривимірної задачі теорії пружності наближено розглядати двовимірні задачі теорії оболонок. Один з можливих шляхів оцінювання придатності наближених теорій оболонок полягає у порівнянні отриманих на їх основі результатів з розв'язками тривимірних задач. У даній праці

зіставляються розв'язки, отримані на основі запропонованої в [1] теорії оболонок з деформівною нормаллю, а також теорії оболонок типу Тимошенка та класичної теорії Кіргофа-Лява з розв'язками тривимірної задачі теорії пружності для циліндричної оболонки.

Нехай оболонка постійної товщини h займає в евклідовому просторі R^3 обмежену область D з неперервною за Ліпшицем межею S . Серединну поверхню оболонки Ω віднесемо до системи криволінійних ортогональних координат $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)$ і введемо ортогональну до неї змінну z так, що $|z| \leq h/2$. Позначимо через Γ межу серединної поверхні Ω . Крайова задача про рівновагу оболонок з деформівною нормаллю має наступний вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Знайти вектор компонент зміщень } u \text{ такий, що відповідні компоненти} \\ \text{вектора деформацій } \varepsilon, \text{ та вектора зусиль моментів } \sigma \text{ задовольняють} \\ \varepsilon = C_L u; & (1.1) \\ C_\Omega \sigma + P = 0; & (1.2) \\ \sigma = B \varepsilon; & (1.3) \\ G_\sigma \sigma = \sigma_g \quad \text{на} \quad \Gamma_\sigma; & (1.4) \\ u_g = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_u. & (1.5) \end{array} \right.$$

Повний вигляд матриць C_L , C_Ω , B , G_σ та вектора P можна знайти в [1].

Проведемо зіпівставлення результатів розв'язання задачі для одношарової вільно опертої циліндричної оболонки, отриманих на основі запропонованої теорії, теорії оболонок типу Тимошенка з недеформівною нормаллю та класичної теорії Кіргофа-Лява, з розв'язком рівнянь просторової теорії пружності [2]. Чисельно задача теорії оболонок з деформівною нормаллю розв'язувалась методом скінченних елементів з використанням біквадратичних ізопараметричних апроксимацій. Порівняємо радіальні зміщення u_r та напруження σ_s , σ_θ в оболонці радіуса R , товщини h та довжини l ,

яка піддається дії внутрішнього тиску $q_r = q_0 \sin \frac{n\pi}{l} \cos k\theta$.

Розрахунки виконувались для $R=60$, $l=120$ та різних значень h , n та k . В табл. 1 в останніх трьох стовпцях наведені значення радіальних зміщень $u_r/q_0 E^{-1}$ для деяких значень вказаних параметрів, отримані на основі теорії пружності, теорії оболонок з деформівною нормаллю (значення в дужках), теорії типу Тимошенка (II) та класичної теорії (III). В табл. 2 перший рядок відповідає розв'язку по

просторовій теорії пружності; в другому, третьому та четвертому рядках для кожного варіанта h/R , n та k наведені значення напружень σ_s/q_0 та σ_θ/q_0 по запропонованій методиці, теорії типу Тимошенка та класичної теорії відповідно.

Таблиця 1

h/R	n	K	I			II	III
			$z=-h/2$	$Z=0$	$z=h/2$		
0.05	15	0	22.1 (19.7)	22.0 (18.87)	20.5 (18.08)	22.5	16.7
	20	0	8.89 (8.07)	8.38 (7.38)	7.43 (6.69)	8.84	2.42
0.10	10	0	17.3 (15.69)	15.8 (14.25)	14.2 (12.79)	17.3	10.6
	15	0	6.28 (5.54)	4.40 (4.36)	3.56 (3.17)	5.33	2.12
	20	0	3.79 (3.08)	1.79 (2.05)	1.28 (1.01)	2.52	0.672
0.20	10	0	7.44 (5.93)	3.76 (3.90)	2.39 (1.88)	4.98	1.34
	15	0	4.58 (3.02)	1.12 (1.49)	0.429 (0.37)	1.92	0.265
	10	5	6.93 (5.64)	3.27 (3.61)	2.00 (1.59)	4.24	1.11
	10	10	5.85 (4.53)	2.27 (2.67)	1.24 (0.80)	3.21	0.686
	1	15	7.54 (6.34)	4.13 (4.32)	2.84 (2.31)	3.73	1.60

З аналізу наведених даних випливає, що для будь-яких значень вказаних параметрів похибка наближення радіальних зміщень на серединній поверхні по теорії оболонок з деформівною нормаллю не перевищує 12%, тоді як теорія типу Тимошенка для навантажень з довжиною півхвилі порядку товщини дає суттєво завищені значення, а класична теорія оболонок взагалі не описує реальні значення радіальних зміщень для даної задачі. По всіх розглядуваних теоріях отримані величини напружень, які незначно відрізняються між собою, але суттєво відрізняються від точного розв'язку у випадку дії навантаження, довжина напівхвилі якого є величиною порядку товщини оболонки. По всіх наведених теоріях краще наближення спостерігається на ненавантаженій поверхні оболонки.

Таблиця 2.

h/R	n	K	σ_s/q		σ_θ/q	
			$z=-h/2$	$z=h/2$	$z=-h/2$	$z=h/2$
0.05	15	0	-4.47	4.27	-1.260	1.62
			-4.23	4.23	-1.631	1.97
			-4.21	4.21	-0.879	1.62
			-4.26	4.26	-0.999	1.56

h/R	n	K	σ_s/q		σ_θ/q	
			$z=-h/2$	$z=h/2$	$z=-h/2$	$z=h/2$
	20	0	-2.71 -2.42 -2.39 -2.42	2.47 2.42 2.39 2.42	-0.960 -1.039 -0.568 -0.636	0.861 1.013 0.823 0.815
0.10	10	0	-2.36 -2.29 -2.34 -2.38	2.35 2.29 2.34 2.38	-0.787 -0.856 -0.400 -0.540	0.930 1.060 0.977 0.892
	20	0	-1.140 -0.591 -0.601 -0.607	0.554 0.599 0.601 0.607	-0.576 -0.311 -0.136 -0.171	0.186 0.161 0.220 0.193
0.20	10	0	-1.120 -0.554 -0.594 -0.605	0.517 0.556 0.594 0.605	-0.498 -0.240 -0.087 -0.159	0.191 0.161 0.252 0.204
	10	5	-1.040 -0.513 -0.509 -0.513	0.435 0.525 0.504 0.520	-0.570 -0.283 -0.103 -0.180	0.187 0.209 0.273 0.209
	1	5	-0.661 -0.407 -0.360 -0.210	0.164 0.181 0.186 0.197	-1.180 -0.686 -0.130 -0.680	0.527 0.662 0.216 0.635

1. Вагін П.П., Іванова Н.В. Нелінійне деформування багатопшарових оболонок. Постановка задачі. / Львів. ун-т. - Львів, 1996. - 27 с. - Деп. в УкрІНТЕІ 20.12.96 N 285 Ук96. 2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Методи расчета оболочек. Т.4: Теория оболочек переменной жесткости. - Киев: Наук. думка, 1981. - 544 с.

А.І. Кардаш

РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ МЕТОДУ ПРОСТОЇ ІТЕРАЦІЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР

Розглянемо реалізацію методу простої ітерації на спеціальній обчислювальній системі, яка складається з n процесорів, де n — розмірність системи алгебраїчних рівнянь.

Побудуємо процес обчислень так, що кожен процесор обчислює $x_i^{(k)}$ ($i = 1, \dots, n$). Тоді на першому кроці з першого процесора p буде передаватись число $x_1^{(k-1)}$ у всі інші. На другому кроці обчислюються добутки

$$e_{i1}^{(k)} = \alpha_{i1} x_1^{(k-1)}, \quad (i = 1, \dots, n),$$

а на третьому — суми:

$$s_{i1}^{(k)} = \beta_i + e_{i1}^{(k)}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Потім у всі процесори передається число $x_2^{(k-1)}$ і знову обчислюються добутки

$$e_{i2}^{(k)} = \alpha_{i2} x_2^{(k-1)}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

та суми

$$s_{i2}^{(k)} = s_{i1}^{(k)} + e_{i2}^{(k)}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

і так далі.

Після $3n$ кроків одержимо

$$x_i^{(k)} = s_{in}^{(k)}, \quad (i = 1, \dots, n);$$

далі обчислюємо

$$\Delta x_i^{(k)} = |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|, \quad (i = 1, \dots, n)$$

і після порівняння з ε здійснюємо умовний перехід.

Загальне число кроків для кожного наближення при такому розпаралелюванні буде наступне:

$$T_n = 3n + 2.$$

Число операцій, які необхідно виконати при послідовній реалізації алгоритму буде рівне

$$T_1 = 2n^2 + 2n.$$

Тоді прискорення виконання алгоритму при переході від

послідовного розв'язування до паралельного на n процесорах буде:

$$S_n = T_1 / T_n = (2n^2 + 2n) / (3n + 2) = 2n / 3 + o(1),$$

а ефективність:

$$E_n = S_n / n = 2 / 3.$$

Якщо передбачити можливість суміщення пересилки числа з обчислювальними операціями, то

$$T_n = 2n + 2,$$

$$S_n = (2n^2 + 2n) / (2n + 2) = n.$$

Тоді $E_n = 1$.

На кожному кроці працюють всі процесори і досягається досить висока ефективність.

Ціна алгоритму:

$$C_n = nT_n = (2n + 2)n = 2n(n + 1).$$

Цінність алгоритму:

$$F_n = S_n / C_n = n / 2n(n + 1) = 1 / 2(n + 1).$$

Розглянемо реалізацію методу простої ітерації на систолічних структурах для системи рівнянь 3-го порядку (для простоти викладу). В цьому випадку формули ітераційного процесу матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \alpha_{11}x_1^{(k)} + \alpha_{12}x_2^{(k)} + \alpha_{13}x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(k)} + \alpha_{22}x_2^{(k)} + \alpha_{23}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{(k)} + \alpha_{32}x_2^{(k)} + \alpha_{33}x_3^{(k)} \end{cases}$$

На рис. 1 приведено систолічний масив для даної системи. В ньому використовуються два типи систолічних комірок:

- базова, яка виконує операцію множення з додаванням, а також передає інформацію;
- логічна, яка перевіряє умову, виробляє ознаку результату і передає інформацію.

На цій систолічній структурі для системи 3-го порядку одна ітерація здійснюється за чотири такти. Тут використовується 12 систолічних комірок, з яких 9 — базових і 3 логічні. Для системи рівнянь n -го порядку буде задіяно $n(1+n)$ комірок. Із яких $n \times n$ базових і n логічних. Число тактів однієї ітерації буде рівне $n+1$.

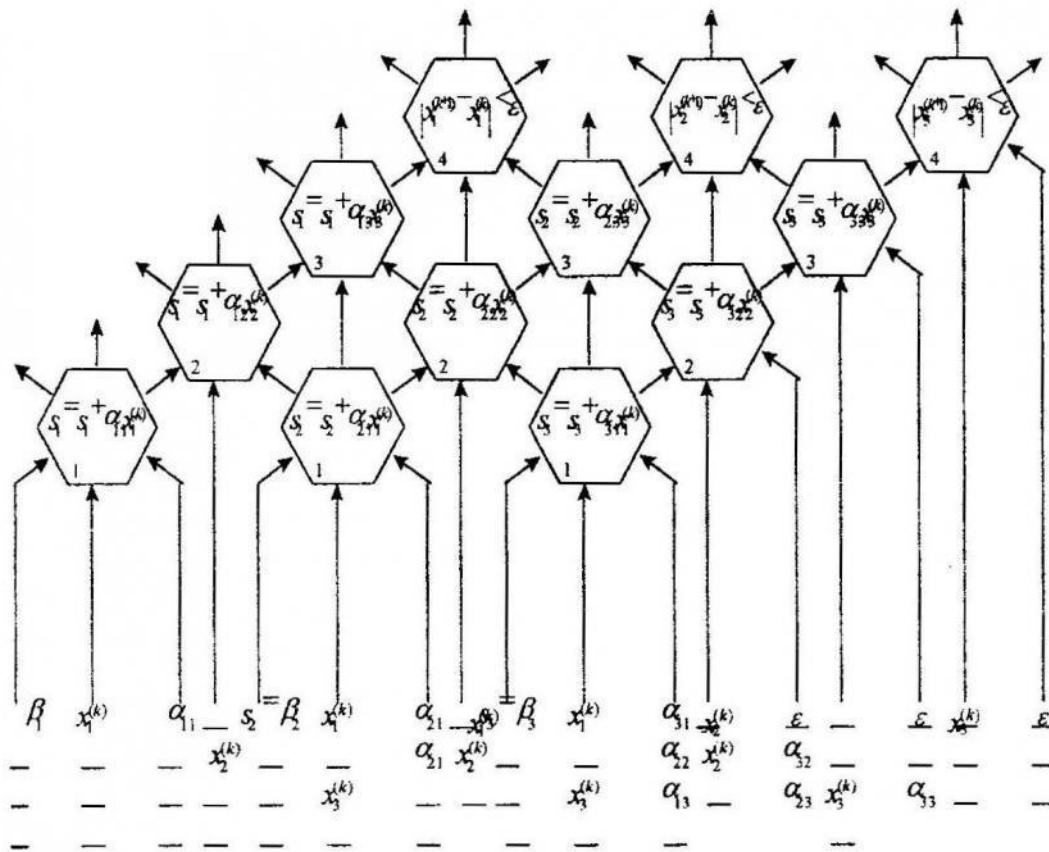


Рис. 1.

1. Воеводин В.В. Математические модели и методы в параллельных процессах. - М.: Наука, 1986. - 296 с. 2. Program simulation of parallel algorithms of the numerical analysis. A.I. Kardash, V.V. Chernyakhovskiy, I.I. Chulyk. //Mathematical Modelling and Applied Mathematics. A.A.Samarskii and M.P.Sapogovas (Editors). Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland). 1992. IMACS. P. 253-259.

УДК 519.6

А.І. Кардаш, І.І. Чулик

РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ МЕТОДУ ЗЕЙДЕЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо процес розпаралелювання алгоритму методу Зейделя на спеціальній обчислювальній системі, яка складається з n процесорів.

© Кардаш А.І., Чулик І.І., 1998

Побудуємо процес обчислень так, що кожен процесор p обчислює один із $x_i^{(k+1)}$. Тоді на кожному кроці, не враховуючи пересилки будемо мати:

1-й крок: обчислення $e_{in}^{(k)} = \alpha_{in} x_n^{(k)}, i = \overline{1, n-1}$;

2-й крок: обчислення $s_{in}^{(k)} = \beta_i + e_{in}^{(k)}, i = \overline{1, n-1}$;

3-й крок: обчислення $e_{in-1}^{(k)} = \alpha_{in-1} x_{n-1}^{(k)}, i = \overline{1, n-2}$;

4-й крок: обчислення $s_{in-1}^{(k)} = s_{in}^{(k)} + e_{in-1}^{(k)}, i = \overline{1, n-2}$;

2n-й крок: отримаємо $x_1^{(k+1)} = s_{12}^{(k)}$;

2n+1-й крок: обчислення $e_{i1}^{(k+1)} = \alpha_{i1} x_1^{(k+1)}, i = \overline{2, n}$;

2n+2-й крок: обчислення $s_{i1}^{(k+1)} = e_{i1}^{(k+1)} + s_{i1-1}^{(k)}, i = \overline{2, n}$;

4n-й крок: отримаємо $x_n^{(k+1)} = s_{n, n-1}^{(k)}$.

Потім обчислюємо $\Delta x_i^{(k+1)} = |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|, i = \overline{1, n}$ і робимо умовний перехід.

Загальне число кроків на одній ітерації з використанням n процесорів буде наступним:

$$T_n = 4n + 2.$$

Число ітерацій, які необхідно зробити при послідовній реалізації алгоритму обчислюємо за формулою:

$$T_1 = 2n(n-1),$$

тоді знаходимо прискорення:

$$S_n = T_1 / T_n = 2n(n+1) / 2(2n+1) = n/2 + o(1);$$

ефективність:

$$E_n = S_n / n = 1/2;$$

цінність алгоритму:

$$F_n = S_n / C_n = (n/2 + o(1)) / 2n(2n+1) = 1/8n + o(1/n).$$

Розглянемо реалізацію методу Зейделя на систолічних структурах для системи рівнянь третього порядку (для простоти викладу).

В цьому випадку формули ітераційного процесу запишемо у такому вигляді:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \alpha_{11} x_1^{(k)} + \alpha_{12} x_2^{(k)} + \alpha_{13} x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \alpha_{22} x_2^{(k)} + \alpha_{23} x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \beta_3 + \alpha_{31} x_1^{(k+1)} + \alpha_{32} x_2^{(k)} + \alpha_{33} x_3^{(k)} \end{cases}$$

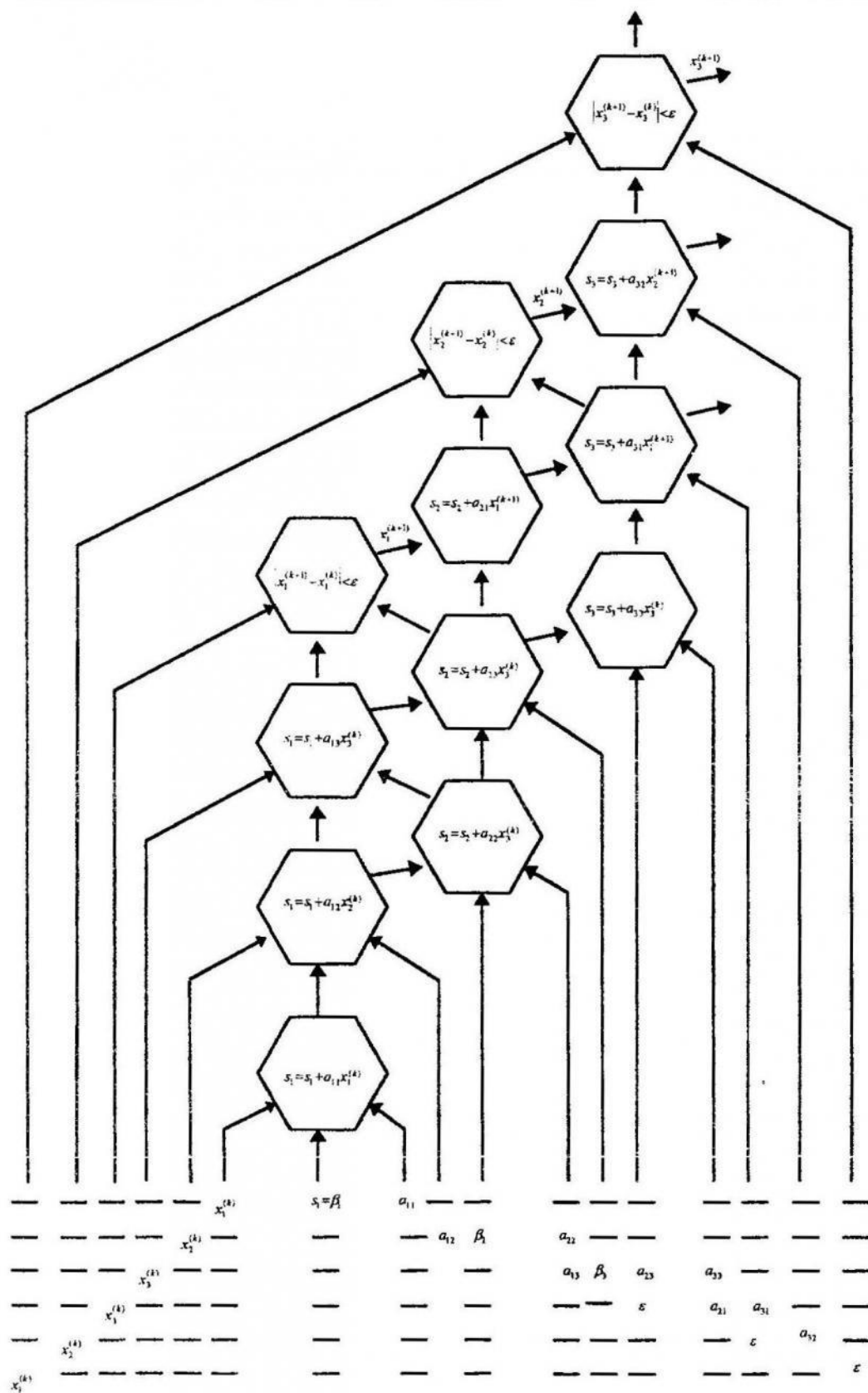
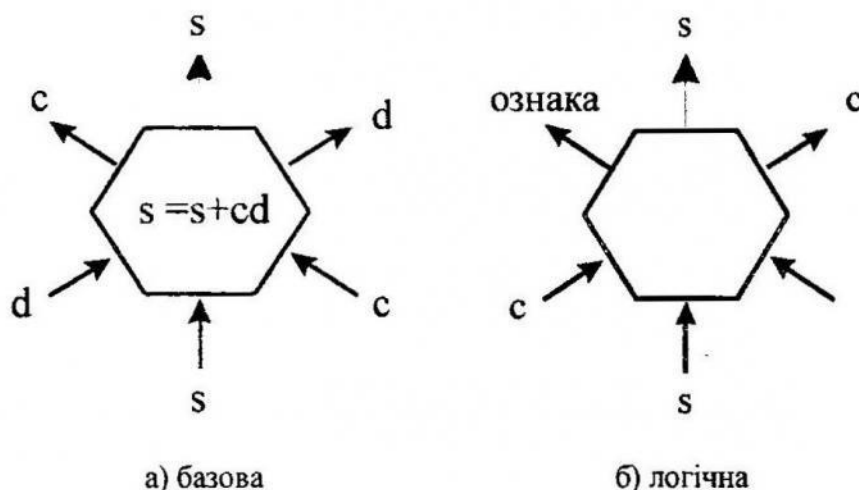


Рис. 1.

ціну алгоритму:

$$C_n = nT_n = 2(2n + 1)n;$$

На рис. 1 зображена схема систолічного масиву для розглянутої системи. В цьому систолічному масиві використані базова та логічна систолічні комірки:



На одній ітерації цього методу задіяно 12 систолічних комірок, з яких 9 - базових та 3 - логічних, число тактів — 6.

В загальному випадку для системи рівнянь n -го порядку буде задіяно $n(n+1)$ систолічних комірок, а число тактів на одній ітерації рівне $2n$.

1. Воеводин В.В. Математические модели и методы в параллельных процессах. - М.: Наука, 1986. - 296 с. 2. Program simulation of parallel algorithms of the numerical analysis. A.I. Kardash, V.V. Chernyakhovskyi, I.I. Chulyk. //Mathematical Modelling and Applied Mathematics. A.A.Samarskii and M.P.Sapogovas (Editors). Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland). 1992 IMACS. - pp. 253-259. 3. Алеева В.Н. Распараллеливание некоторых итерационных алгоритмов для решения системы линейных уравнений. - Новосибирск, 1982. -192 с.

Я.А. Кардаш, Г.Г. Цегелик

ДО ПОБУДОВИ ОПТИМАЛЬНИХ ІМОВІРНІСНИХ ДВІЙКОВИХ ДЕРЕВ ПОШУКУ

Постановка задачі. Дано n значень ключа $K_1, K_2, \dots, K_n$ ($K_1 < K_2 < \dots < K_n$) і $2n+1$ чисел $p_1, p_2, \dots, p_n, q_0, q_1, \dots, q_n$, які задовольняють умову $p_1 + p_2 + \dots + p_n + q_0 + q_1 + \dots + q_n = 1$, де p_i – імовірність того, що аргументом пошуку є K_i ; q_j – імовірність того, що аргумент пошуку лежить між K_j і K_{j+1} (q_0 – імовірність того, що аргумент пошуку менший K_1 , а q_n – імовірність того, що аргумент пошуку більший K_n). Потрібно побудувати двійкове дерево із значеннями вершин $K_1, K_2, \dots, K_n$, для якого досягається мінімум математичного сподівання числа порівнянь, необхідних для пошуку вершини,

$$E = \sum_{i=1}^n l_i p_i + \sum_{j=0}^n s_j q_j,$$

де l_i – номер рівня, на якому розташована вершина із значенням K_i , s_j – більший з номерів рівня, на якому міститься вершини з номерами K_j та K_{j+1} .

Математичне сподівання числа порівнянь, необхідних для пошуку, прийнято називати ціною дерева, а дерево з мінімальною ціною – оптимальним деревом. При такому визначенні не обов'язково вимагати, щоб $p_1 + p_2 + \dots + p_n + q_0 + q_1 + \dots + q_n = 1$, можна шукати дерево з мінімальною ціною для заданої послідовності „ваг” ($p_1, p_2, \dots, p_n, q_0, q_1, \dots, q_n$).

В [1] наведений алгоритм побудови оптимального дерева, трудомісткість якого $O(n^3)$. Така трудомісткість зумовлена тим, що в основі цього алгоритму лежить фактично перебір варіантів. В даній роботі для розв'язання задачі пропонується використати співвідношення оптимізації як це було зроблено в [2, 3] у випадку $q_0 = q_1 = \dots = q_n = 0$.

Позначимо через $S_r(i, j)$ ціну піддерева з вагами $(p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_j, q_i, q_{i+1}, \dots, q_j)$ і коренем K_r , де $0 \leq i \leq r \leq j \leq n$, а через $\omega(i, j)$ – суму цих ваг. Введемо величини:

$$S_r^+(i, j) = \sum_{k=i+1}^j (l_k + 1) p_k + \sum_{k=i}^j (s_k + 1) q_k,$$

$$S_r^-(i, j) = \sum_{k=i+1}^j (l_k - 1) p_k + \sum_{k=i}^j (s_k - 1) q_k.$$

Тоді

$$S_r^-(i, j) = S_r(i, j) + \omega(i, j),$$

$$S_r^+(i, j) = S_r(i, j) - \omega(i, j).$$

Звідси

$$\omega(i, j) = S_r^+(i, j) - S_r(i, j) = S_r(i, j) - S_r^-(i, j).$$

Одержана формула використовується для виведення так званих співвідношень оптимізації, тобто умов, накладених на ваги, при яких перехід від піддерева з коренем A (рис. 1) до піддерев з коренями B, C, E або F не веде до зменшення ціни піддерева.

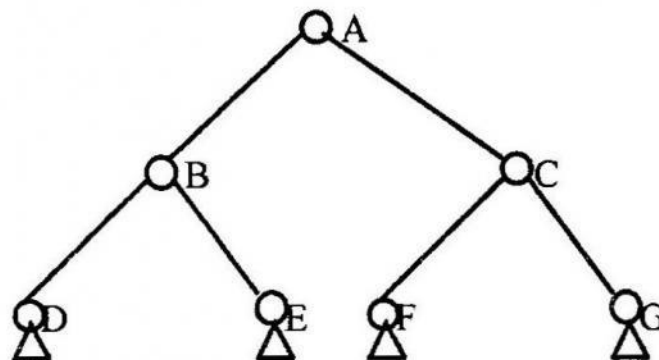


Рис. 1

Маючи ці умови, будується алгоритм оптимізації дерева.

1. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ: В 3 т. Т.3: Сортировка и поиск - М.: Мир, 1978. - 844с. 2. Цегелик Г.Г. Методы автоматической обработки информации. - Львов: Вища школа, 1981. - 132с. 3. Цегелик Г.Г. Алгоритм оптимизации двоичных вероятностных поисковых деревьев. - В сб.: Исследование операций и АСУ. 1980. № 16. С.78-82.

А.В. Катренко

ПРОБЛЕМИ ПРЕДСТАВЛЕННЯ СИСТЕМИ ПЕРЕВАГ ОСОБИ, ЩО ПРИЙМАЄ РІШЕННЯ

В основі цілеспрямованої діяльності людини лежать процеси прийняття рішень (ППР), дослідження яких дає змогу виділити їх основні структурні елементи, дати теоретичне обґрунтування, виявити існуючі парадокси та вказати шляхи отримання прийнятних рішень. Альтернативними підходами до дослідження ППР є дескриптивний та нормативний, хоча на практиці широко застосовується прескриптивний підхід, що орієнтує на знаходження рішення не “найкращого” в тому чи іншому сенсі, а “непоганого”, вільного від непослідовностей та суперечностей.

Залежно від широти охоплення окремих етапів ППР використовуються різні формальні моделі задачі ПР. Розглянемо розгорнуту модель задачі ПР як $Z = \langle T, A, Q, K, F, P \rangle$, де T -- тип задачі (визначити найкращу альтернативу, знайти альтернативи, що відповідають сформульованим вимогам, впорядкувати варіанти рішень за якістю і т. ін.), A – множина альтернатив, Q – множина критеріїв, що відображає суттєві аспекти мети і є одним з результатів системного аналізу задачі, F – відображення множини альтернатив у множину значень критеріїв, P – система переваг особи, що приймає рішення (ОПР). Значення критеріїв можуть вимірюватися в одній зі шкал – найменувань, порядковій, інтервалів або відношень. Гомоморфне відображення $F: A \rightarrow Q$ ставить у відповідність кожній альтернативі множини A , яка описується кортежем різнорідних значень змінних та параметрів, точку в просторі критеріїв. Система переваг P є одним з неформальних елементів, що значною мірою зумовлює слабку структурованість задачі ПР. Апроксимація системи переваг ОПР в більшості випадків за умови введення суттєвих спрощуючих припущень дозволяє сформулювати вирішуюче правило або формально описати механізм вибору. Застосування отриманих таким чином результатів, як свідчить практика, в багатьох випадках ускладнене внаслідок суттєвої деформації первісної постановки задачі, а також динамічності ситуації.

Система переваг ОНР – це сукупність формальних та неформальних (інтуїтивних, підсвідомих), статичних та динамічних правил та умов, які дозволяють ОНР зупинити свій вибір на одній чи декількох альтернативах в конкретній ситуації прийняття рішень. Таким чином існує два основні виміри системи переваг – осі “статика – динаміка” та “формальне – підсвідоме”.

Поширеними способами представлення системи переваг є різноманітні функції корисності та бінарні відношення на множині варіантів рішень. Якщо у випадку одноразових, унікальних рішень ці підходи є виправданими, то у динамічних ситуаціях, що повторюються, зі зміною пріоритетів, ці методи або мало придатні, або ж повинні кожного разу застосовуватися у повній послідовності (наприклад, з процедурами ідентифікації функції корисності в кожній ситуації ПР). В таких випадках доцільно виділити стаціонарну складову системи переваг ОНР, яка не змінюватиметься від однієї до іншої ситуації ПР, що дасть змогу шляхом попереднього автоматичного аналізу відкинути неперспективні варіанти. Оскільки множина альтернатив є змінною в реальних ситуаціях ПР, то пропонується синтез бінарного відношення, що відображає стаціонарну складову системи переваг, на множині критеріїв оцінки якості варіантів рішень.

Розглянемо бінарне відношення домінування D з носієм -- множиною критеріїв якості $Q = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}$ як структурну характеристику взаємозв'язків між критеріями. Відношення домінування $D \subseteq Q \times Q$ індукує відповідне відношення на довільній множині альтернатив A ,

$$(x_m, x_k \in A) \wedge (Q_i^{(m)} > Q_i^{(k)}) \wedge (\forall (n \in I \setminus J): Q_n^{(m)} = Q_n^{(k)}) \Rightarrow x_m \succ x_k,$$

де $J = \{n \in I | Q_i D Q_n\} \cup \{i\}$, $Q_i^{(m)}$ -- значення i -го критерію для альтернативи x_m , A -- множина варіантів вибору, I -- множина індексів критеріїв з Q . Отримана множина альтернатив буде підмножиною множини Парето-оптимальних рішень, яку можна отримати за умови $D = \emptyset$ (відсутність півпорядку на множині критеріїв). Відношення D асиметричне, $D \cap D^{-1} = \emptyset$ (критерій не може домінувати самого себе, та якщо один з критеріїв домінує інший, то обернене твердження не дійсне. Відношення D є транзитивним, $(Q_i D Q_k) \wedge (Q_k D Q_j) \Rightarrow Q_i D Q_j$. Обернене до

D відношення $L = D^{-1}$ являє собою відношення підпорядкування (домінованості), і також є асиметричним та транзитивним. Відношення G , $\bar{G} = D \cup D^{-1}$ є відношенням непорівняльності,

причому критерій непорівняльний сам з собою (це є відображенням факту унікальності конкретного критерію). Відношення непорівняльності є симетричним, рефлексивним, але нетранзитивним. Відношення D, L , та G утворюють розбиття множини $Q \times Q$.

Таким чином відображення системи переваг ОНР за допомогою відношення домінування на множині критеріїв, яке є напівпорядком, дозволяє відобразити стаціонарну складову переваг ОНР незалежно від множини альтернатив, тобто є більш універсальним, аніж бінарне відношення переваг, функції вибору чи функції корисності, побудовані на конкретній множині варіантів рішень, що дозволяє здійснити попередній відсів неперспективних варіантів рішень для динамічних задач прийняття рішень, які не є унікальними.

УДК 519.68:159.955

А.В. Катренко

СЛАБКА СТРУКТУРОВАНІСТЬ ЯК ВЛАСТИВІСТЬ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Управління складними організаційними системами реалізується у переважній більшості випадків в умовах слабкої структурованості та цілого ряду невизначеностей.

По-перше, рішення приймається на ґрунті наявної моделі системи чи ситуації, що є наближенням до реальної ситуації і з тим чи іншим ступенем відповідності її апроксимує.

По-друге, в процесі прийняття рішень на етапах формування цілей, формулювання задачі прийняття рішень, здійснення вибору та його реалізації природним чином виникають невизначеності, розв'язання яких довільним чином означає не що інше, як переведення невизначеності в іншу, як правило, більш приховану форму. В цьому випадку реальною є небезпека сприйняття отриманого сурогату як заміника реальності без критичного осмислення та обліку спрощуючих припущень.

По-третє, об'єктивно існує такий фактор, як слабка структурованість оточення, що найчастіше виявляється у вигляді

невизначеності його реакції на дії, спрямовані на реалізацію прийнятого рішення. З одного боку це існування певного рівня залишкової ентропії оточуючого середовища, що приводить до відомих ситуацій “гри з природою” як з байдужою інстанцією. Окрім того, як свідчить практика побудови та експлуатації систем прийняття рішень, для ситуацій з достатньо високим рівнем залишкової ентропії недоцільною є побудова детальних моделей, що й дозволило концепції систем прийняття рішень трансформуватися в концепцію систем підтримки та прийняття рішень, виявом якої є побудова “сховищ даних”. З іншого боку, слабка структурованість середовища виявляється в активній компоненті реакції, яку зазвичай можна передбачити лише наближено.

Процес структуризації зображається в наступному вигляді:



Таким чином від виникнення реальної ситуації до представлення її в абстрактній формі з наступним розв’язанням та впровадженням структуризації збільшується, як правило, за рахунок введення спрощуючих припущень, що так чи інакше деформують реальну ситуацію.

Однією з основних складових є мета, яка має багатоаспектний характер: з одного боку, це мета функціонування системи, з іншого – мета побудови моделі системи чи ситуації, в якій необхідно прийняти рішення. Телеологічний аспект функціонування системи як єдиного цілого описується єдиною багатоаспектною метою (висловленою за допомогою мови), яка в більшості випадків є внутрішньо суперечливою. Залежно від зовнішніх умов деякі з аспектів мети можуть змінювати своє значення для оцінки якості її функціонування.

Процес структуризації мети складається з наступних етапів:

- деталізація та виділення множини критеріїв, які відображають різні аспекти мети;

- ☐ побудова мінімальної множини критеріїв, що відображають мету з необхідною точністю;
- ☐ синтез системи критеріїв.

Виділення множини критеріїв реалізується методологією системного аналізу шляхом побудови дерева цілей, тобто деталізацією мети до рівнів основних аспектів, підцілей різних рівнів та критеріїв, які в результаті такої процедури утворюють надлишкову множину внаслідок перетину певних аспектів та підцілей.

На наступному етапі несуттєві та дублюючі критерії виключаються з розгляду. Отримана множина повинна задовольняти такі умови:

- ☐ повноти – відображення суттєвих аспектів мети з достатньою точністю;
- ☐ ненадлишковості – критерії не повинні дублюватися;
- ☐ мінімальності – кількість критеріїв повинна бути мінімальною;
- ☐ представництва – кожен з критеріїв повинен відображати певний аспект або аспекти мети;
- ☐ критичності – кожен критерій повинен бути чутливим до змін значень діючих факторів;
- ☐ змістовності – критерії повинні інтерпретуватись особою, що приймає рішення, у зрозумілих їй термінах.

Ці етапи є неформальними та реалізуються з широким використанням експертної інформації. Однак і після них виникає необхідність введення спрощуючих припущень, необхідних для отримання реальних рішень з врахуванням обмежень на час прийняття та реалізації рішення та старіння інформації.

Таким чином, слабка структурованість є властивістю організаційних складних систем. Рішення в таких системах внаслідок існування достатньо великого рівня залишкової ентропії, нечітко виявленої активної протидії середовища, недостатньої структурованості мети, обмежень по часу повинні прийматися на ґрунті концепції підтримки – тобто автоматизованого формування певної кількості варіантів, які пред'являються ОПР.

БЕЗУМОВНО СТІЙКА СХЕМА МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТОНКОСТІННИХ ТВЕРДИХ ТІЛ

Розглядається задача пружнопластичного деформування трансверсально-ізотропного, однорідного, тонкостінного тіла, яке розташоване в об'ємі V і обмежене поверхнею S . Будемо припускати, що процес навантаження тіла зовнішніми силами перебігає досить повільно і його можна розглядати як низку послідовних рівноважних станів. Це означає, що модель деформування може бути записана у квазістатичній постановці. Варіаційну постановку крайової задачі побудуємо на основі принципу віртуальних робіт. Для цього необхідно задати зв'язок між безмежно малими приростами напружень і безмежно малими приростами деформацій. Такий зв'язок отримаємо з математичної моделі пружнопластичного деформування Прандтля - Рейса. Необхідна для побудови ітераційного процесу залежність між скінченними приростами напружень та пластичних деформацій записана з використанням алгоритму середньої точки. Це забезпечує безумовну стійкість чисельної схеми. У випадку ідеального пружнопластичного тіла одержимо

$$\Delta \varepsilon_m^p = \Delta \lambda_m \frac{\partial F(\Sigma_m + \theta \Delta \Sigma_m)}{\partial \Sigma}, F(\Sigma_m + \Delta \Sigma_m) = 0, \quad \theta \in [0; 1].$$

Лінеаризуючи ці співвідношення, отримаємо

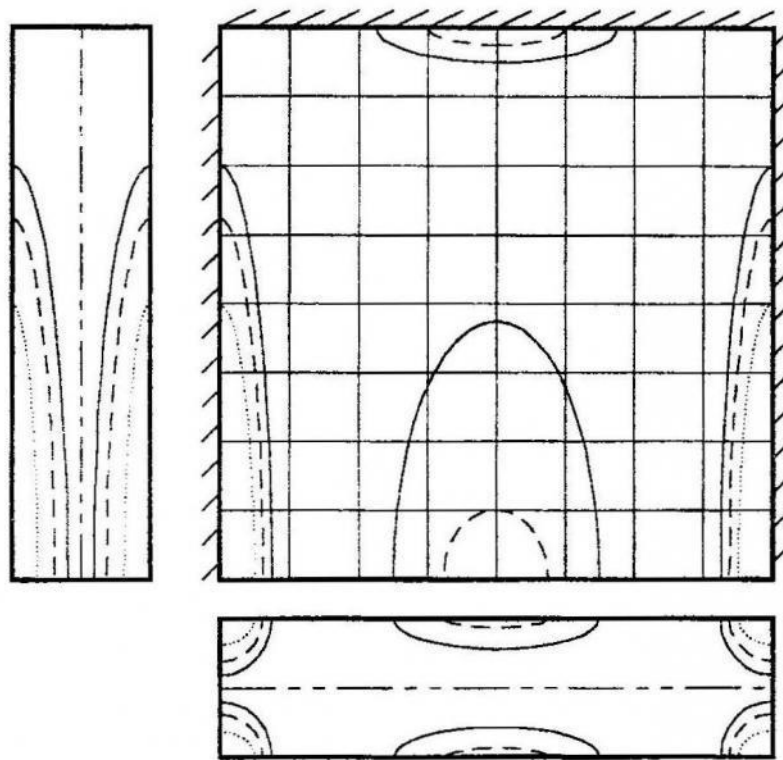
$$d\Sigma_m = \left[A_{m+\theta}^* - \frac{A_{m+\theta}^* : \frac{\partial F_{m+\theta}}{\partial \Sigma} \otimes \frac{\partial F_{m+\theta}}{\partial \Sigma} : A_{m+\theta}^*}{\frac{\partial F_{m+\theta}}{\partial \Sigma} : A_{m+\theta}^* : \frac{\partial F_{m+\theta}}{\partial \Sigma}} \right] d\varepsilon_m + \frac{F_{m+\theta} A_{m+\theta}^* : \frac{\partial F_{m+\theta}}{\partial \Sigma}}{\frac{\partial F_{m+\theta}}{\partial \Sigma} : A_{m+\theta}^* : \frac{\partial F_{m+\theta}}{\partial \Sigma}}$$

$$+ \frac{A_{m+\theta}^* : \frac{\partial F_{m+\theta}}{\partial \Sigma} \otimes \frac{\partial F_{m+\theta}}{\partial \Sigma} : A_{m+\theta}^*}{\frac{\partial F_{m+\theta}}{\partial \Sigma} : A_{m+\theta}^* : \frac{\partial F_{m+\theta}}{\partial \Sigma}} : (A^{-1} \Delta \Sigma_m - \Delta \varepsilon_m).$$

Оскільки розглядається тонкостінне тіло, то доцільно здійснювати редукцію тривимірної лінеаризованої задачі до двовимірної з використанням гіпотез теорії оболонок, а також гіпотези стосовно розподілу напружень по товщині тіла. Редукована задача розв'язується методом скінченних елементів з використанням біквадратичних ізопараметричних апроксимацій. По розв'язках, отриманих у рамках двовимірної постановки, відновлюються просторові поля переміщень та напружень і по них будується наступне наближення варіаційного рівняння. Такий підхід дає змогу визначати зону поширення пластичних деформацій по товщині тіла.

Запропонований у даній роботі чисельний алгоритм застосовувався для дослідження напружено-деформованого стану квадратної пластинки з ідеально пружнопластичного матеріалу під дією рівно-мірно розподіленого навантаження P_n . Довжина сторони пластини 0.4м., товщина 0.02м. Числові результати отримані для модуля Юнга $E = 200000 \text{ МПа}$ та коефіцієнта Пуассона $\nu = 0.3$. Межа текучості $\Sigma_T = 245 \text{ МПа}$. Досліджувались критичні значення навантаження, при якому в тілі починали виникати пластичні деформації, а також розвиток зони їх поширення по товщині та поверхні. Обчислення проводились на квадратній сітці 8×8 скінченних елементів з точністю $\varepsilon = 0.001$. Процес навантаження складався з чотирьох кроків, на кожному з яких конструкція довантажувалась на $0.25 P_n$. На рисунку зображено зону поширення пластичних деформацій на поверхнях жорстко защемленої на трьох краях і вільної на четвертому краю пластинки та у двох перерізах по товщині.

Пластичні деформації в такому тілі починають виникати в місцях з'єднання жорстко защемлених країв з вільним, коли навантаження досягає 1.42 МПа . Подальше їх поширення відбувається вздовж защемлених сторін. Зону пластичності при $P_n = 0.9 \text{ МПа}$ зображено точковою лінією. Якщо навантаження досягне 2.3 МПа , утворюються ще дві зони пластичності посередині вільного та защемленого навпроти нього країв. Штрихова лінія відповідає тиску $P_n = 2.5 \text{ МПа}$, а суцільна - тиску $P_n = 3.1 \text{ МПа}$.



Відмічено добре якісне узгодження картин поширення зон пластичності з результатами, наведеними в [1].

1. Стрельбицкая А.И., Колганин В.А., Матошко С.И. Изгиб прямоугольных пластин за пределом упругости. К.: Наук. думка, 1971.

УДК 519.72

В.Я. Козак, В.А. Ліщинський

ПОБУДОВА ПЕРЕДАВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ЛІНІЙНИХ НЕЧІТКИХ СИСТЕМ

Досліджуються звичайні лінійні системи, задані структурними схемами і передавальними функціями елементів. Поняття нечіткої системи введено на основі аналізу властивостей структур розглядуваних систем, поняття нечіткого графа, можливих варіантів з урахуванням ідей побудови систем нечіткої і імовірнісної структури. Воно є результатом внесення нечіткості у зв'язки між елементами заданої (чіткої) системи.

Звичайна лінійна нечітка система задається структурною схемою і передавальними функціями $W_i = k_i W_i^*$, де W_i^* - передавальна функція i -го елемента заданої системи, $i = \overline{1, n}$, n - кількість елементів системи, а k_i - ступінь чіткості елемента. Основною вимогою до введеного поняття є рівність $W_s = W_s^*$ за умови $k_i = 1$ для всіх i , де W_s - передавальна функція нечіткої системи, а W_s^* - відповідної чіткої. Таке поняття не змінює суті часових характеристик та опису в просторі станів. Можна було ввести поняття нечіткої системи, виходячи з найсильнішого та найслабшого зв'язків, максимуму чи мінімуму функції від ступенів нечіткості зв'язків, але тоді виникли б труднощі з тлумаченням вказаних характеристик і опису.

Усі методи побудови передавальних функцій ґрунтуються на визначенні передавальних функцій типових структурних конфігурацій. Введене поняття нечіткої системи дає змогу будувати передавальні функції типових з'єднань за тими ж правилами, що й для чітких систем, з урахуванням заміни функцій W_i^* функціями W_i . З цього випливає, що для побудови W_s можна використовувати однойменні методи теорії чітких систем. Аналіз існуючих і можливих методів показав доцільність використання регулярних виразів як проміжного зображення системи.

Пропонується метод побудови передавальних функцій нечітких систем, який використовує регулярні вирази. Для його застосування систему слід задавати матрицею з'єднань з урахуванням входів і виходів. Метод полягає в побудові послідовності матриць спадного розміру. Першою є матриця з'єднань, а останньою - матриця, яка має один елемент, який і є шуканою передавальною функцією. Елементи кожної наступної матриці (з верхнім індексом $(k+1)$) будуються за елементами розглядуваної (з верхнім індексом (k)) після викреслювання першого рядка і першого стовпця за правилом

$$W_{ij}^{(k+1)} = W_{i+1, j+1}^{(k)} + W_{1, j+1}^{(k)} W_{i+1, 1}^{(k)} / (1 \pm W_{11}^{(k)}).$$

Знак у знаменнику визначається відомим способом у залежності від типу зворотного зв'язку.

Остаточно передавальну функцію слід мати у дробово-раціональному вигляді. Складність його одержання зумовлена необхідністю виконання аналітичних перетворень з урахуванням наявності множників типу $1/(1 \pm W)$. Аналіз існуючих програмних

засобів показав недоцільність їх використання для поставленої задачі через велику громіздкість, зумовлену універсальністю; недостатність інтерфейсу і зручності використання; неефективність розв'язування спеціалізованих задач; неспроможність обробляти великі арифметичні вирази. У зв'язку з цим розроблено спеціалізовані засоби для аналітичних перетворень.

Для побудови передавальних функцій нечітких систем розроблено програмну систему, написану мовою Pascal компілятора Delphi. Структура нечіткої системи задається К-списком разом зі степенями чіткості зв'язків. Розроблена система використовує всі можливості багатовіконного середовища Windows, забезпечує перегляд структури і використання допомог. Її можна використовувати для систем, у яких розмір аналітичного виразу чисельника і знаменника передавальної функції не перевищує 65 тис. символів.

УДК 519.6:517.925

*Ю.С. Козаревська, Я.В. Кондратюк, О.Й. Піскозуб,
Г.А. Шинкаренко*

АДАПТИВНА СТАБІЛІЗАЦІЯ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ МІГРАЦІЇ ДОМІШОК

В останні роки побудовано ряд ефективних схем методу скінченних елементів для розв'язування крайових задач міграції домішок вигляду

$$\begin{cases} L\psi := w \cdot \nabla \psi - \nabla \cdot (\mu \nabla \psi) + \sigma \psi = f & \text{в } \Omega \\ \psi = 0 & \text{на } \Gamma := \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

За допомогою стабілізуючих властивостей протипотокових схем або функцій-бульбашок апроксимації MSE уникають нефізичної поведінки при домінуванні перенесення в процесі міграції. Добре відомо, що у цьому випадку штучні осциляції породжуються примежовими та/або внутрішніми шарами і завдяки вектору w поширюються над усією областю Ω .

Мета даної праці – покращити властивості апроксимацій МСЕ за допомогою адаптивного триангулювання області Ω , здатного виявити та локалізувати згадані шари в задачах мігрування домішок.

1. Для відшукування наближеного розв'язку задачі (1) скористаємось класичною процедурою Гальоркіна:

$$\begin{cases} \text{знайти } \psi_h \in V_h \subset V = H_0^1(\Omega), \dim V_h < +\infty \text{ таку, що} \\ b(w; \psi_h, \varphi) + a(\psi_h, \varphi) = \langle l, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in V_h, \end{cases} \quad (2)$$

де

$$\begin{cases} b(w; \psi_h, \varphi) := \int_{\Omega} \psi_h w \cdot \nabla \varphi dx \\ a(\psi_h, \varphi) := \int_{\Omega} \{\mu \nabla \varphi \cdot \nabla \psi_h + \sigma \psi_h \varphi\} dx, \quad \forall \psi_h, \varphi \in V \\ \langle f, \varphi \rangle := (f, \varphi)_{\Omega} := \int_{\Omega} f \varphi dx. \end{cases} \quad (3)$$

Надалі будемо вважати, що простори апроксимацій V_h будуються наступним чином. Нехай $T_h := \{K\}$ - триангуляція області Ω зі скінченними елементами K , $h_K := \text{diam } K$, $h := \max h_K$. Тоді простір V_h формується із неперервних обмежених функцій, які є поліномами заданого порядку p на кожному скінченному елементі, тобто,

$$V_h := \{\psi \in V \mid \psi|_K - \text{поліном } p\text{-го порядку } \forall K \in T_h\}. \quad (4)$$

2. Рекурентна процедура побудови просторів V_h з наступним розв'язуванням задачі (2) побудована на аналізі норм розв'язків ψ_h

$$|\psi_h|_K := \left\{ \int_K (\psi_h^2 + |\nabla \psi_h|^2) dx \right\}^{1/2}. \quad (5)$$

Наведений нижче алгоритм адаптивного триангулювання області передбачає покрокове виконання наступної процедури. Нехай вихідна триангуляція T_h^j містить N^j скінченних елементів K , $j = 0$.

(I) Знайдемо розв'язок $\psi_h^j \in V_h^j$ задачі (2) і обчислимо $\rho(\psi_h^j) := |\psi_h^j|_{\Omega} / N^j$.

(II) Кожен скінченний елемент K , який задовольняє умову

$$|\psi_h^j|_K > \rho(\psi_h^j) \quad (7)$$

поділяється (додаванням нових розрахункових вузлів) на M елементів нової триангуляції. Такий перегляд усіх скінченних елементів із T_h^j і відповідна їх модифікація згідно з критерієм (7) породжує нову триангуляцію T_h^{j+1} . Якщо $T_h^{j+1} = T_h^j$, то процес рекурентного адаптування триангуляції вважається завершеним і за остаточно уточнений розв'язок приймається ψ_h^j .

(III) Якщо ж $T_h^{j+1} \neq T_h^j$, то нова триангуляція тестується згідно з критерієм

$$\min_{K \in T_h^{j+1}} h_K \leq h_* = \text{const} > 0. \quad (8)$$

Виконання цієї умови хоча б одним скінченним елементом із новоствореної T_h^{j+1} сигналізує про надмірне згущення сітки скінченних елементів і прийняття додаткових рішень стосовно доцільності продовження процесу адаптування.

(IV) Якщо елементи T_h^{j+1} не задовольняють умову (8), то обчислюється наступне наближення $\psi_h^{j+1} \in V_h^{j+1}$ до розв'язку задачі (2).

Виконання умови $(|\psi_h^{j+1}|_\Omega - |\psi_h^j|_\Omega) / |\psi_h^j|_\Omega \leq \varepsilon_* = \text{const}$ свідчить про незначне уточнення розв'язку та його градієнту на останньому кроці адаптування сітки і вимагає переривання даного алгоритму.

3. Запропонований алгоритм було застосовано до наступної одновимірної стаціонарної задачі мігрування домішки

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 10^4 \frac{\partial \psi}{\partial x} = 3 \cdot 10^4 x^2 \quad \forall x \in (0,1), \quad \psi(0) = \psi(1) = 0.$$

Нижче наведено таблицю поведінки середніх значень відносної похибки $\delta^j = \sum_i |\psi(x^j) - \psi_h(x_i^j)| / N^j$ розв'язків, отриманих на кожній ітерації адаптивного згущення вихідної рівномірної скінченноелементної сітки з використанням різних типів просторів апроксимацій V_h^j при $M=2$ та $h_* = 0.00001$.

Апрокс им. на скінч. елем.	лінійна		квадратична		кубічна ермітова неперервна		кубічна ермітова неперервно диференційова на	
Номер ітерації	N^j	$\delta^j \%$	N^j	$\delta^j \%$	N^j	$\delta^j \%$	N^j	$\delta^j \%$
0	20	485563.6	20	2542.0692	20	53893.5981	20	19940.2
1	30	114432.9	29	562.9214	28	8582.0931	22	123004.4
2	47	8240.461	41	74.5692	37	437.2901	25	710787.7
3	63	1624.905	51	12.6308	44	11.5732	30	2485122
4	79	66.172	59	3.9809	48	1.9068	37	285431.3
5	90	10.931	64	1.5709	51	0.5508	42	12337.26
6	97	7.3304	67	0.6135	53	0.1042	45	336.233
7	101	6.0979	69	0.2811	54	0.0095	47	6.7618
8	103	5.6625	70	0.2048	55	0.0007	48	0.92
9			72	0.1873	56	0.0003		

УДК 519.6

М.Ф. Копитко

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ШАРУВАТИХ ТІЛ

Широке використання композиційних матеріалів для виготовлення конструктивних елементів різноманітних приладів і механізмів привело до появи багатьох нових і розвитку відомих підходів до розв'язування задач визначення їх напружено-деформованого стану. Згадані елементи, являють собою переважно багатошарові тонкостінні пластини або оболонки, матеріал кожного шару яких є композитом, армованим односпрямованими волокнами. У зв'язку з невеликою відносною товщиною конструктивного елемента і наявністю в пакеті декількох ще тонших шарів застосування чисельних методів до розв'язування задачі в рамках теорії пружності стає в цьому випадку дуже проблематичним. Тому

розробляються різноманітні підходи, які ґрунтуються на побудові математичних моделей пружного деформування шаруватих конструкцій з використанням гіпотез теорій оболонок. Огляд робіт в цьому напрямку наведено в [1,2]. Серед них можна виділити два основні напрями побудови теорій шаруватих оболонок. Перший охоплює дослідження, в яких гіпотези приймаються для кожного шару. В цьому випадку отримують системи рівнянь, порядок яких залежить від кількості шарів, що в свою чергу стає накладним при великій кількості шарів і невиправданим при малій відносній товщині. Другий напрям полягає в прийнятті певних гіпотез для цього пакету. Тоді порядок системи рівнянь не залежить від кількості шарів, але не завжди адекватно описується напружено-деформований стан, особливо для середніх товщин.

Ми здійснили спробу поширити запропонований у [3] підхід до розв'язування задач пружного деформування шаруватих елементів конструкцій. Суть його полягає в тому, що для опису процесу деформування використовуються тривимірні рівняння теорії пружності, записані в криволінійній системі координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Шукані переміщення в кожному шарі представляються у вигляді скінченного ряду

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{m=0}^{M_i} u_i^m(\alpha_1, \alpha_2) P_m(\alpha_3), i=1,2,3, \quad (1)$$

де $P_m(\alpha_3)$ - поліноми Лежандра, $u_i^m(\alpha_1, \alpha_2)$ - невідомі функції, апроксимація яких здійснюється на скінченних елементах в області зміни координат α_1, α_2 . Використовуючи різні степені поліномів M_i в розкладі (1), можна тим самим отримати відповідний закон зміни переміщень вздовж товщини тонкостінного тіла. Тобто, не виписуючи відповідних систем рівнянь, розглядаємо певні наближення для задач деформування шаруватих конструкцій.

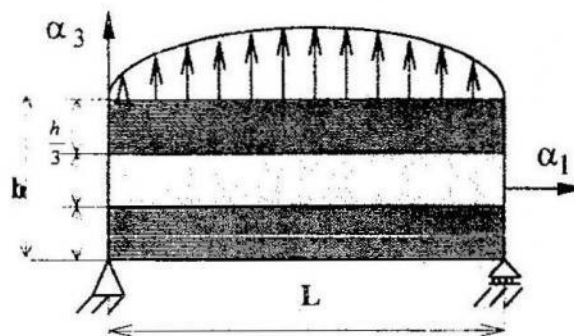


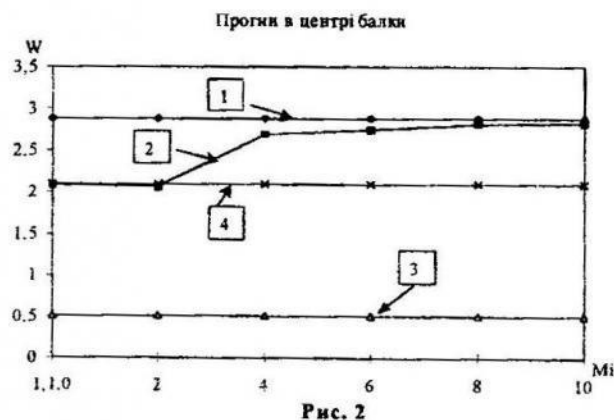
Рис. 1

Як приклад використання запропонованого підходу розглядається задача про згин тришарової вуглепластикової балки (рис.1) під дією навантаження $q = q_0 \sin(\pi \alpha_1 / L)$, аналітичний розв'язок якої в рамках теорії пружності наведений у [4]. Дана задача використовувалась багатьма авторами як модельна для апробації запропонованих ними підходів. Матеріал кожного шару балки є композитом, який армований односпрямованими волокнами, і має такі механічні властивості:

$$E_K = 1,724 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, E_T = 6,895 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, G_{KT} = 3,448 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \\ G_{TT} = 1,379 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad \nu_{KT} = \nu_{TT} = 0.25$$

Тут K відповідає напрямку вздовж волокон, T - поперек волокон. У коефіцієнті Пуассона ν_{KT} , T - означає напрям дії сили, K - напрям стиску. Волокна в зовнішніх шарах балки розташовані під кутом 0° до осі α_1 , у внутрішньому - під кутом 90° . Геометрія і навантаження вибирались такими: $L=24$, $L/h=4$ і 10 , $q_0 = 6,895 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$.

Для даної задачі порівнювали отримані результати з відомими [4]. На рис. 2 показаний графік (лінія 2) залежності прогину в центрі балки від степенів поліномів M_i в розкладі (1) для $L/h=4$. Для кращої оцінки чисельно-аналітичного розв'язку на цьому ж рисунку наведені значення прогину, визначені з використанням інших підходів.



Пряма 1 відповідає аналітичному розв'язку в рамках теорії пружності [4] (найбільш точний розв'язок), пряма 4 - теорія типу Тимошенка, пряма 3 - класична теорія пластин. Як бачимо з наведених даних, запропонований чисельно-аналітичний підхід дає змогу отримувати результати, аналогічні до розв'язків в рамках теорії типу Тимошенка (ступень поліномів 1,2) або теорії пружності

(починаючи з 4), користуючись одними й тими ж рівняннями і програмним комплексом.



Рис. 3

На рис. 3 зображені графіки залежності похибки обчислення прогину від степенів поліномів для різних відносних товщин балки. Як бачимо, точність розв'язування задачі для балки зі шаруватого композиту підвищується із зменшенням відносної товщини.

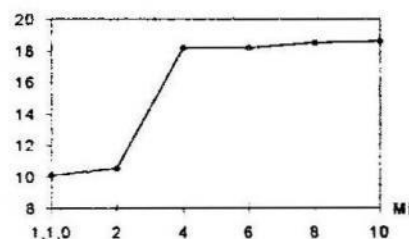


Рис. 4

На рис.4 наведено залежність нормального напруження σ_{11} на навантаженій поверхні балки (в центрі) від степенів поліномів в розкладі (1). Як бачимо, для отримання достовірних результатів необхідно підвищувати ступінь поліномів у законі розподілу переміщень вздовж товщини.

1. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Методы расчета оболочек. Т. 4. Теория оболочек переменной жесткости. - Киев: Наук. думка, 1981. -544 с. 2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. - Киев: Наук. думка, 1991.- 216с. 3. Копитко М.Ф., Савула Я.Г. Алгоритмічний підхід до дослідження задач пружного деформування оболонок // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.-1997.-Вип. 46.- С. 10-16. 4. Pagano H.J. Exact solutions for composite laminites in cylindrical bending // J. Composite Materials. -1969.- Vol.3.- P.398-341.

М.Д. Коркуна, М.В. Делявський, Н.І. Берегова

ПРО УЗАГАЛЬНЕННЯ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ

Механіка руйнування, як розділ механіки деформівного твердого тіла, вивчає пружну та граничну рівновагу матеріалів з тріщиноподібними дефектами, тобто криволінійними отворами, що містять тріщини або точки звороту на контурі. Для такого дефекту характерним є рівність нулю в його вершині першої похідної від відображувальної функції.

Математично тріщину моделюють розрізом нульової ширини. Напруження на кінцях таких розрізів мають кореневу особливість, тобто стають необмеженими при наближенні до їх вершин, що фізично нереально, оскільки навіть при найменшому навантаженні повинно відбутися руйнування матеріалу.

Тут пропонується модель тріщини, для якої радіус кривини у вершині є скінченний, тобто перша похідна від відображувальної функції відмінна від нуля, але настільки малий, що квадратом цієї похідної можна знехтувати. Такі дефекти назовемо щілиноподібними.

Розглянемо безмежну анізотропну пластину із щілиноподібним дефектом, вільним від навантажень. На безмежності пластина піддана дії двовісного розтягу-зсуву. Напружений стан такої пластини описується комплексними потенціалами $\varphi_r(\xi_r)$, визначеними в комплексних площинах ξ_r , утворених з реальних фізичних площин z_r шляхом афінних перетворень

$$z_r = \omega_r(\xi_r), \quad r = \overline{1,2} \quad (1)$$

Поле переміщень в такій площині визначається за формулою

$$u_j = 2 \operatorname{Re} \sum_{r=1}^2 t_j^{(r)} \varphi_r(\xi_r), \quad (2)$$

Тут $t_j^{(r)} - j, r = \overline{1,2}$ - параметри, що залежать від пружних сталих матеріалу; ξ_r - комплексні змінні в афінних площинах, що відповідають фізичним площинам z_1 і z_2 ; Щоб отримати асимптотичні формули розподілу напружень і переміщень в околі вершини тріщинопо-

дібного дефекту перейдемо у формулах (2) до локальної системи координат $\tilde{z}_r$ в його k -ій вершині, згідно перетворення

$$z_r = z_{0r}^{(k)} + \tilde{z}_r e^{i\tau_k} = \omega_r \left[\xi_{0r}^{(k)} + \tilde{\xi}_r e^{i\gamma_k} \right] \quad (3)$$

де $\xi_{0r}^{(k)}$ - точки одиничного кола, що відповідають вершинам дефекту $z_{0r}^{(k)}$ в площинах z_r ; τ_k - кут між k -ою вершиною дефекту і віссю Ox_1 .

Приведемо розклади функцій напружень і відображувальних функцій в ряди Тейлора в околі вершини дефекту (точка $\xi_{0r}^{(k)}$), де k - номер вершини.

$$\varphi_r(\xi_r) = \varphi_r(\xi_{0r}^{(k)}) + \varphi_r'(\xi_{0r}^{(k)}) \tilde{\xi}_r e^{i\gamma_k} + \frac{1}{2} \varphi_r''(\xi_{0r}^{(k)}) \tilde{\xi}_r^2 e^{2i\gamma_k} + \dots \quad (4)$$

$$\omega_r(\xi_r) = \omega_r(\xi_{0r}^{(k)}) + \omega_r'(\xi_{0r}^{(k)}) \tilde{\xi}_r e^{i\gamma_k} + \frac{1}{2} \omega_r''(\xi_{0r}^{(k)}) \tilde{\xi}_r^2 e^{2i\gamma_k} + \dots \quad (5)$$

Враховуючи, що згідно (3,5)

$$\tilde{z}_r e^{i\tau_k} = z_r - z_{0r}^{(k)} = \omega_r(\xi_r) - \omega_r(\xi_{0r}^{(k)}) \quad (6)$$

отримуємо квадратне рівняння з розв'язку якого встановлюємо зв'язок між змінними, $\tilde{z}_r$ і $\tilde{\xi}_r$.

$$\tilde{\xi}_r e^{i\gamma_k} = -\frac{\omega_r'(\xi_{0r}^{(k)})}{\omega_r''(\xi_{0r}^{(k)})} + \frac{\sqrt{\omega_r'^2(\xi_{0r}^{(k)})/\omega_r''(\xi_{0r}^{(k)}) + 2\tilde{z}_r e^{i\tau_k}}}{\sqrt{\omega_r''(\xi_{0r}^{(k)})}} e^{i\tau_k/2} + \dots \quad (7)$$

де

$$\tilde{z}_r = \tilde{r} [\cos \theta + \mu_r^{(k)} \sin \theta] \quad (8)$$

Тут $(\tilde{r}, \theta)$ - полярні координати; параметри $\mu_r^{(k)}$, визначені у локальній полярній системі координат з центром у k -ій вершині дефекту, повернутій відносно основної системи на кут τ_k

Для досить широкого класу дефектів, що мають одну або дві осі пружної симетрії співвідношення () можна представити у вигляді

$$\tilde{\xi}_r e^{i\gamma_k} = \frac{-\sqrt{\rho} + \sqrt{Z_r} e^{i\tau_k}}{\sqrt{\omega_r''(\xi_{0r}^{(k)})}}; \quad (9)$$

де Z_r - узагальнена комплексна змінна

$$Z_r = 2\tilde{z}_r + \rho_{0r}^{(k)} e^{-i\tau_k}. \quad (10)$$

Підставляючи розклади (4),(5) у співвідношення (2), отримуємо асимптотичні формули розподілу переміщень в околі k -ї вершини тріщиноподібного дефекту.

$$u_j^{(k)} = 2 \operatorname{Re} \sum_{r=1}^2 \sum_{\nu=1}^3 t_j^{(r)} \left(A_r^{[\nu](k)} + i B_r^{[\nu](k)} \right) Z_r^{\nu/2}, j = \overline{1,2}; \quad (11)$$

Розподіл напружень отримуємо використовуючи закон Гука

$$\sigma_{ij}^{(k)} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{r=1}^2 \sum_{\nu=1}^3 s_{ij}^{(r)} \left(A_r^{[\nu](k)} + i B_r^{[\nu](k)} \right) Z_r^{\nu/2-1} + C_{ij}^{(k)} \right\}, j = \overline{1,2}; \quad (12)$$

де

$$C_{ij}^{(k)} = - \sum_{r=1}^2 s_{ij}^{(r)} \varphi_r''(\xi_{0r}^{(k)}) \frac{\omega_r'(\xi_{0r}^{(k)})}{\omega_r''(\xi_{0r}^{(k)})^2}; \quad (13)$$

тут $A_r^{[\nu](k)} + i B_r^{[\nu](k)}$ - комплексні параметри. Для перших членів розкладу їхні вирази мають вигляд

$$A_r^{[1](k)} + i B_r^{[1](k)} = \frac{\varphi_r'(\xi_{0r}^{(k)})}{\omega_r''(\xi_{0r}^{(k)})^{1/2}} - \frac{\varphi_r''(\xi_{0r}^{(k)}) \omega_r'(\xi_{0r}^{(k)})}{\omega_r''(\xi_{0r}^{(k)})^{3/2}}, \quad (14)$$

тут $\varphi_r(\xi_{0r}^{(k)})$, $\omega_r(\xi_{0r}^{(k)})$ значення комплексних потенціалів і відображувальної функції в k -ій вершині дефекту.

Для тонкого еліптичного вирізу, що міститься в безмежній ортотропній пластині проведені розрахунки залежності величини $A_r^{[1]}$ від співвідношення півосей еліпса (параметр $\varepsilon = b/a$). Встановлено, що максимальне відхилення цієї величини від відповідного значення для прямолінійної тріщини - розрізу в діапазоні зміни $\varepsilon \in [0,0.1]$ не перевищує 1,5%. Отже в даному діапазоні зміни ε ці параметри можуть бути замінені коефіцієнтами інтенсивності напружень.

І. Бережницький Л.Т., Делявський М.В., Панасюк В.В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. - Киев: Наук. думка, 1979. 400 с.

D-АДАПТИВНА МОДЕЛЬ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ НЕОДНОРІДНИХ СТРУКТУР

Розглядається підхід до дослідження вільних коливань тіл з тонким пружним покриттям. Згідно з цим підходом передбачається побудова D-адаптивної комбінованої математичної моделі, яка в області тіла описується рівняннями теорії пружності, а в області покриття – рівняннями теорії оболонок типу Тимошенка. Системи цих диференціальних рівнянь пов'язані умовами спряження на поверхні контакту [1].

Нехай тіло займає тривимірну область Ω_1 з Ліпшицевою границею $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$; покриття – тривимірну область Ω_2^* , обмежену двома поверхнями Ω_2^- , Ω_2^+ , відстань між якими h_2 та бічною поверхнею. Посередині між Ω_2^- і Ω_2^+ розміщена серединна поверхня Ω_2 з Ліпшицевою границею $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Вважається, товщина покриття h_2 є значно меншою від характерного розміру пружного тіла h_1 . Важаємо також, що G_3 є поверхнею контакту пружного тіла з тонким покриттям і збігається з Ω_2^- . Нормаль до серединної поверхні збігається з зовнішньою нормаллю $\bar{\nu}_3$ до границі тіла G_3 і утворює вісь α_3 . На границях G_1, Γ_1 задані однорідні кінематичні а на границях G_2, Γ_2 – однорідні статичні граничні умови.

Запишемо варіаційну задачу у слабкій формі, яка еквівалентна задачі на власні значення. Введемо простори

$$\begin{aligned} H_1 &= \left\{ V^{(1)} : V^{(1)} \in [W_2^{(1)}(\Omega_1)]^3, V_i^{(1)} = 0, i = \overline{1,3} \text{ на } G_1 \right\} \\ H_2 &= \left\{ V^{(2)} : V^{(2)} \in [W_2^{(1)}(\Omega_2)]^3, V_i^{(2)} = 0, i = \overline{1,5} \text{ на } \Gamma_1 \right\} \\ H &= \left\{ (V^{(1)}, V^{(2)}) : V^{(1)} \in H_1, V^{(2)} \in H_2, V_{\nu_i}^{(1)} = V_i^{(2)} - \frac{h_2}{2} V_{i+3}^{(2)}, V_3^{(1)} = V_3^{(2)}, \right. \\ &\quad \left. i = 1, 2; G_3 = \Omega_2 \right\}. \end{aligned}$$

Ця задача полягає у тому, щоб знайти пару $(\omega, \bar{U})$: де ω - скаляр; а $\bar{U} = (U^{(1)}, U^{(2)}) \in H$, і задовольняються співвідношення

$$\int_{\Omega_1} (D^{(1)} V^{(1)})^T C^{(1)} D^{(1)} U^{(1)} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} (D^{(2)} V^{(2)})^T E_0 C^{(2)} D^{(2)} U^{(2)} d\Omega_2 - \\ - \omega^2 \left(\int_{\Omega_1} V^{(1)} M^{(1)} U^{(1)} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} V^{(2)} M^{(2)} U^{(2)} d\Omega_2 \right) = 0, \forall \bar{V} = (V^{(1)}, V^{(2)}) \in H$$

Тут $D^{(1)}, M^{(1)}; D^{(2)}, M^{(2)}$ - відповідно матриці диференціальних операторів матриці мас теорії пружності та теорії оболонок типу Тимошенка, $U^{(1)} = (U_1, U_2, U_3)$, $U^{(2)} = (u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2)$ - вектори переміщень [2].

Розглянемо задачу на власні значення для тіл обертання з покриттям, у циліндричній системі координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$: α_3 - вісь симетрії, α_2 - кругова координата. Для розв'язування цієї задачі застосуємо напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ), згідно з яким тригонометричні функції $\sin m\alpha_2$, $\cos m\alpha_2$, визначені на проміжку $[0, 2\pi]$, вибираються як базові по α_2 . Ці функції утворюють ортогональну систему в енергетичних метриках операторів теорій пружності та оболонок типу Тимошенка. Для інших змінних використовуються квадратичні апроксимації МСЕ. [2,3] Завдяки ортогональності базових функцій на $[0, 2\pi]$, узагальнена проблема на власні значення розпадається на L проблем $(m = \overline{0, L})$, m - номер гармоніки. Для розв'язування узагальнених проблем на власні значення використовується метод ітерацій у підпросторі [2].

Чисельний приклад. Розглянемо запропонований підхід на круглій пластині з покриттям (рис. 1). Модулі Юнга, коефіцієнти Пуассона та густини матеріалів пластини і покриття задані відповідно:

$$E_1 = 6.0 \times 10^{10} \left(\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right), \nu_1 = 0,31, \rho_1 = 7300 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \text{ (кераміка),}$$

$$E_2 = 8.27 \times 10^{10} \left(\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right), \nu_2 = 0,31, \rho_2 = 9000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \text{ (срібло).}$$

R - радіус пластини, h_1 - товщина пластини, $h_1/R = 1/10$. Проводилися розрахунки при $h_2/R = (0.01, 0.005, 0.002, 0.001, 0)$. Випадок $h_2/R = 0$

означає відсутність покриття. Частотні характеристики $\lambda = \omega/2\pi$ досліджувалися для значень гармоніки $m = (0, 1, 2)$.

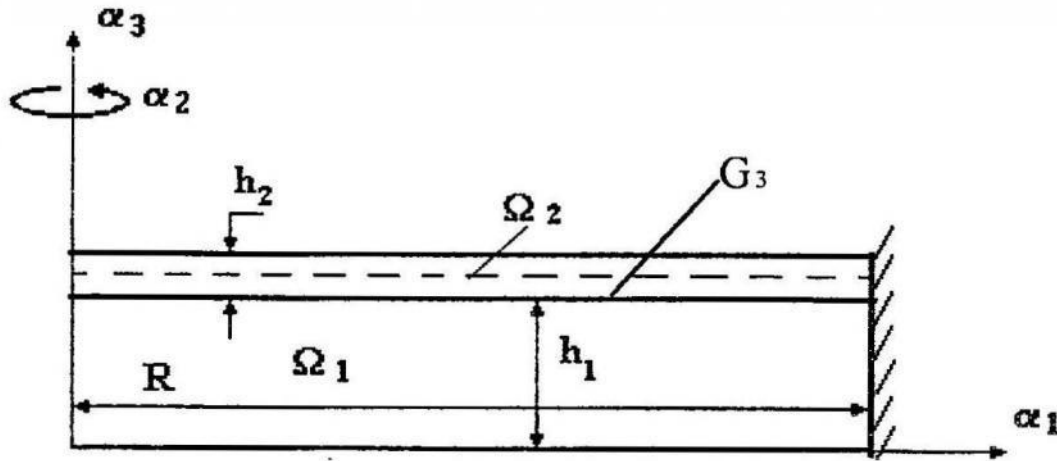


Рис. 1

В таблиці наведено значення перших трьох частот, отриманих на сітці з 16 двовимірних квадратичних СЕ і 8 одновимірних квадратичних СЕ.

	$h_2=0.01$	$h_2=0.005$	$h_2=0.002$	$h_2=0.001$	$h_2=0.0$
$m=0$	15.64449 107.4445 196.7667	14.88194 107.7109 197.2555	14.38302 107.8882 197.5804	14.20808 107.9506 197.6947	14.03219 51.92335 108.0147
$m=1$	31.60774 83.45018 93.89300	30.17663 80.36404 93.97005	29.23158 78.27991 94.02541	28.89845 77.53569 94.04536	28.57559 76.97558 94.09591
$m=2$	50.21791 111.3952 145.8470	48.11876 107.6830 146.0019	46.71968 105.1517 146.1116	46.22379 104.2429 146.1524	45.74784 103.6084 146.4019

Обчислення показали, що найнижча частота досягається при значенні гармоніки $m=1$ зі зменшенням товщини покриття (h_2) знижуються частоти власних коливань.

1. Савула Я. Г. Краевые и вариационные задачи для одной комбинированной модели теории упругости // Математ. методы и физ.-мех. поля.- 1990.-Вып. 32.-С. 92-95. 2. Савула Я. Г., Коссака О. С. Аналіз вільних коливань пружних конструкцій на основі комбінованої математичної моделі // Доп. Академії Наук України.-1994, № 8.-с. 69-741. 3. Ойха Коссака. A study of free vibrations of elastic rotation bodies based on the combined model. XXI YUCTM NIS, 1995. P.364-369.

О.В. Костів

БАЗОВІ ОПЕРАТОРИ ОБРОБКИ ДЕРЕВОВИДНИХ СТРУКТУР

Деревовидні структури належать до найуживаніших абстрактних структур даних, оскільки рекурсивний характер цих структур дозволяє легко описувати багато елементів реального світу. Деревя розглядаються як основні структури декларативних мов. Тому алгоритми опрацювання деревовидних структур мають теоретичну і практичну цінність.

Проектування програм за принципом "зверху вниз" передбачає використання різних рівнів деталізації опису алгоритмів. Кожному рівневі відповідає певний набір базових операцій, композиції яких використовуються для зображення алгоритмів на цьому рівні. Найчастіше розрізняють три рівні опису алгоритмів, які ґрунтуються на різних формах зображення даних: 1) рівень абстрактних структур даних; 2) рівень даних мови опису алгоритму; 3) рівень реалізації у комп'ютері.

Аналіз різних класів алгоритмів обробки дерев дозволив виділити набір B_D базових операторів над кореневими впорядкованими навантаженими деревами, які визначаються як четвірки $\langle A, G, R, f \rangle$, де A - множина вузлів, G - відношення підпорядкованості на A , яке визначає топологію дерева, R - відношення порядку на множині вузлів, f - функція, яка встановлює відповідність між вузлами дерева та їх навантаженнями. Ці дерева утворюють клас K_D .

При обробці деревовидних структур доводиться використовувати ряд понять, за допомогою яких описуються базові оператори над деревами. Зокрема, це об'єкти типів ДЕРЕВО, КУЩ, ВУЗОЛ, ВКАЗІВНИК, НАВАНТАЖЕННЯ, МІТКА, ЦІЛИЙ, ЛОГІЧНИЙ, ЛІТЕРНИЙ. Набір об'єктів одного типу складає МАСИВ. Об'єкти типів ДЕРЕВО, КУЩ, ВУЗОЛ утворюють клас ДЕРЕВОВИДНИХ структур. До цього класу належать піддерева, які є об'єктами типу ДЕРЕВО. Кожний вузол дерева визначає піддерево. Піддеревом, визначеним вузлом N , називається дерево, утворене коренем N і всіма вузлами, яких можна досягти з N , і таких, що

розташовані нище цього вузла. Кушем, визначеним вузлом N , називається піддерево, утворене вузлом N та всіми його синами.

При роботі з деревами використовуються вказівники. Вказівник дерева встановлено на початок дерева, його значенням є дерево і переміщення такого вказівника всередині дерева неможливе. Зняття цього вказівника передбачає знищення доступу до дерева. Крім вказівника дерева використовуються вказівники вузлів, які переміщуються по дереву згідно з алгоритмом. Значенням такого вказівника є вузол. На дереві може бути встановлено масив таких вказівників. Вказівник може бути встановленим або невстановленим. Невстановлений вказівник значення немає. З вузлом пов'язані об'єкти типів НАВАНТАЖЕННЯ та МІТКА, які можуть бути елементами типів ЦІЛИЙ, ЛОГІЧНИЙ, ЛІТЕРНИЙ.

Набір базових операторів є доволі великим, тому вводиться його розбиття на три підмножини, які визначають відповідно три рівні операторів:

- 1) примітивні оператори мінімального базису B_{DM} ;
- 2) оператори локальних перетворень базису B_{DL} ;
- 3) типові оператори обробки дерев базису B_{DT} ;

Мінімальний базис включає в себе оператори, які дозволяють будувати довільне дерево з класу K_D , виходячи з підмножини дерев, що включають всі вузли, необхідні для побудови цього дерева. Цей базис складають оператори встановлення і зняття вказівника вузла, зсуву його до вузла наступного у заданому обході, суміщення двох вказівників, приєднання вузла до дерева, присвоєння вузлу нового значення навантаження і мітки, копіювання елемента (включаючи елементи деревовидної структури) та перевірки двох елементів на еквівалентність. Ці оператори складають функціонально незалежну і структурно повну систему.

Оператори локальних перетворень B_{DL} , призначені для зміни значення об'єкта (оператори розмітки вузла, зсуву вказівника вгору чи вниз по дереву, приформування чи видалення піддерева), а також перетворення типів (обчислення кількості синів вузла і числа термінальних серед них, встановлення термінальності, наявності навантаження і мітки вузла, виродженості дерева).

Оператори базису B_{DT} реалізують найчастіше вживані перетворення дерев. Вони є основними складовими алгоритмів обробки дерев. В цей базис входять оператори визначення кількості елементів у складних об'єктах (наприклад, кількості вузлів у піддереві чи на заданому рівні), глибини вузла, зсувів вказівника

ліворуч або праворуч, формування дерева з піддерев, приформування нового рівня до дерева, зміни дерева шляхом перестановки піддерев, наклеювання піддерев, виділення в дереві шляхів між двома вузлами, до вершини, до листків, виділення заданого рівня, визначення висоти та ширини дерева.

Реалізація кожного з операторів суттєво залежить від структури зберігання дерева.

Використання засобів об'єктно-орієнтованого програмування до реалізації задач роботи з деревами дозволило виділити лише чотири базові операції через які реалізуються більшість операторів обробки дерев [1]. Такими операціями є перехід до заданого вузла, пошук піддерева, зсув вказівника вниз та вгору по дереву.

І. Дзіковська М.О., Костів О.В. Застосування об'єктно-орієнтованого підходу до обробки деревовидних структур даних // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. задачі і методи прикладної математики. 1995. Вип. 42. С. 59-63.

УДК 519.689

Р.Б. Кравець

БАГАТОВИМІРНА МОДЕЛЬ ДАНИХ У СИСТЕМАХ АНАЛІТИЧНОЇ ОБРОБКИ ІНФОРМАЦІЇ

В основі розв'язання задач планування та прийняття рішень лежить багатопараметричний аналіз факторів, що описують ділянку конкретної предметної області, яка досліджується. Проектування систем аналітичної обробки інформації (OLAP - on-line analytical processing), спрямованих на розв'язання такого роду задач, полягає у виявленні та описі величин, що аналізуються, та параметрів, від яких ці величини залежать. Іншими словами, процес проектування зводиться до побудови функцій багатьох змінних, що набуває скінченної кількості значень на скінченній області визначення.

Такий підхід до проектування структур даних у системах аналітичної обробки інформації будемо називати багатовимірним. Тут розглядаються основні поняття та операції багатовимірної моделі даних, яка реалізує цей підхід. У багатовимірній моделі даних

для змінних будемо використовувати термін вимір (dimension), а для функції - термін міра (measure).

Означення 1. Виміром D називається поименована сукупність даних, що набуває значень на певному домені. Домен виміру D будемо позначати як $\text{dom}(D)$. Значення d виміру D , $d \in \text{dom}(D)$, називається членом виміру D . Отже, $d_1, \dots, d_k$, $d_i \in \text{dom}(D)$, - сукупність всіх членів виміру D . Кількість k всіх членів виміру D називається обсягом виміру D і позначається як $\text{vol}(D)$.

Означення 2. Нехай маємо сукупність вимірів $D_1, D_2, \dots, D_n$ з доменами $\text{dom}(D_1), \text{dom}(D_2), \dots, \text{dom}(D_n)$ відповідно. Кожному набору $(d_{j1}^{(1)}, d_{j2}^{(2)}, \dots, d_{jn}^{(n)})$, де $d_{ji}^{(i)} \in \text{dom}(D_i)$, $1 \leq j \leq k_i$, $k_i = \text{vol}(D_i)$, $1 \leq i \leq n$, - довільний член виміру D_i , поставимо у відповідність значення $m_{j1, j2, \dots, jn} \in \mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ - множина дійсних чисел. Сукупність таких значень та вимірів називається мірою m над вимірами $D_1, D_2, \dots, D_n$. Кількість вимірів, від яких залежить міра m , визначає вимірність міри.

Сукупність всіх вимірів та доменів, на яких вони набувають значень, міри m утворює схему міри m - $M(D_1, D_2, \dots, D_n), \text{dom}(D_1), \text{dom}(D_2), \dots, \text{dom}(D_n)$.

Означення 3. Відношенням r між вимірами D_1 та D_2 називається підмножина декартового добутку $D_1 \times D_2$ така, що:

$$\begin{aligned} & \forall d_1 \in \text{dom}(D_1) \exists d_2 \in \text{dom}(D_2) \wedge \exists (d_1, d_2) \in r, \\ & \forall d_1^{(1)} \in \text{dom}(D_1) \wedge \forall d_1^{(2)} \in \text{dom}(D_2) \wedge \forall d_2^{(1)} \in \text{dom}(D_1) \wedge \forall d_2^{(2)} \in \text{dom}(D_2) \wedge \exists (d_1^{(1)}, d_1^{(2)}) \in r \wedge \exists (d_2^{(1)}, d_2^{(2)}) \in r (d_1^{(1)} = d_2^{(1)}) \Rightarrow (d_1^{(2)} = d_2^{(2)}). \end{aligned}$$

Нехай r є відношенням між вимірами D_1 та D_2 з доменами $\text{dom}(D_1)$ та $\text{dom}(D_2)$, $K=D_1$ - ключ відношення. Така сукупність вимірів D_1, D_2 , доменів $\text{dom}(D_1), \text{dom}(D_2)$ та ключа $K=D_1$ утворює схему відношення r - $R(D_1, D_2)$.

Розглянемо основні операції над мірами.

Арифметичні операції.

Нехай маємо міри m_1 та m_2 зі схемами $M_1(D_1, D_2, \dots, D_n)$ та $M_2(D_1, D_2, \dots, D_n), \text{dom}(D_1), \dots, \text{dom}(D_n)$. Тоді $m_1 \oplus m_2$, де $\oplus$ - арифметична операція, визначається так. Нехай $m_1 = \{m_{i1, i2, \dots, in}^{(1)} \mid \forall i_j, 1 \leq i_j \leq k_j, k_j = \text{vol}(D_j), 1 \leq j \leq n, m_{i1, i2, \dots, in}^{(1)} = m_1(d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in})\}$, $m_2 = \{m_{i1, i2, \dots, in}^{(2)} \mid \forall i_j, 1 \leq i_j \leq k_j, k_j = \text{vol}(D_j), 1 \leq j \leq n, m_{i1, i2, \dots, in}^{(2)} = m_2(d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in})\}$. Тоді $m = m_1 \oplus m_2 = \{m_{i1, i2, \dots, in} \mid \forall i_j, 1 \leq i_j \leq k_j, k_j = \text{vol}(D_j), 1 \leq j \leq n, m_{i1, i2, \dots, in} = m(d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in}) = m_{i1, i2, \dots, in}^{(1)} \oplus m_{i1, i2, \dots, in}^{(2)}\}$.

Слід зазначити, що, оскільки арифметичні операції над мірами визначені на основі арифметичних операцій над дійсними числами, то для них зберігаються і всі відповідні властивості (асоціативність

додавання та множення, дистрибутивність множення та ділення по відношенню до додавання і віднімання, комутативність додавання та множення).

Операція зрізу (slice).

Нехай маємо міру m зі схемою $M(D, D_1, D_2, \dots, D_n), \text{dom}(D), \text{dom}(D_1), \text{dom}(D_2), \dots, \text{dom}(D_n)$; $m = \{m_{i_1, i_2, \dots, i_n} \mid \forall i_j, 1 \leq i_j \leq k_j, k_j = \text{vol}(D_j), 1 \leq j \leq n, k = \text{vol}(D), 1 \leq i \leq k, m_{i, i_1, i_2, \dots, i_n} = m(d, d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_n})\}$.

Тоді $m' = \text{SLICE}_{D=d^*}(m) = \{m_{i_1, i_2, \dots, i_n} \mid \forall i_j, 1 \leq i_j \leq k_j, k_j = \text{vol}(D_j), 1 \leq j \leq n, m_{i_1, i_2, \dots, i_n} = m(d^*, d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_n})\}$. Отримаємо міру m' зі схемою $M'(D_1, D_2, \dots, D_n), \text{dom}(D_1), \text{dom}(D_2), \dots, \text{dom}(D_n)$.

Перерахуємо деякі властивості операції зрізу. Нехай маємо міри m, m_1 та m_2 над вимірами $D_1, D_2, \dots, D_n$. Виконуються такі властивості:

1. комутативність:

$$\text{SLICE}_{D_1=d_1}(\text{SLICE}_{D_2=d_2}(m)) = \text{SLICE}_{D_2=d_2}(\text{SLICE}_{D_1=d_1}(m));$$

2. дистрибутивність операції зрізу стосовно арифметичних операцій: $\text{SLICE}_{D=d}(m_1 \oplus m_2) = \text{SLICE}_{D=d}(m_1) \oplus \text{SLICE}_{D=d}(m_2)$.

Операція агрегації по відношенню (drill up).

Нехай маємо міру m зі схемою $M(D_1, D_2, \dots, D_n), \text{dom}(D_1), \text{dom}(D_2), \dots, \text{dom}(D_n)$; $m = \{m_{i_1, i_2, \dots, i_n} \mid \forall i_j, 1 \leq i_j \leq k_j, k_j = \text{vol}(D_j), 1 \leq j \leq n, m_{i_1, i_2, \dots, i_n} = m(d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_n})\}$. І нехай маємо відношення r зі схемою $R(D_1, D), \text{dom}(D_1), \text{dom}(D)$.

Тоді $m' = \text{DRILLUP}_{r(D_1, D)}(m) = \{m_{i_1, i_2, \dots, i_n} \mid \forall i_j, 2 \leq i_j \leq k_j, k_j = \text{vol}(D_j), 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq k, k = \text{vol}(D), m_{i, i_2, \dots, i_n} = \sum_{(d_1, d_2) \in r} m_{i_1, i_2, \dots, i_n}\}$. Отримаємо міру m'

зі схемою $M(D, D_2, \dots, D_n), \text{dom}(D), \text{dom}(D_1), \dots, \text{dom}(D_n)$.

Розглянемо властивості операції агрегації по відношенню. Нехай маємо міри m, m_1 та m_2 над вимірами $D, D_1, D_2, \dots, D_n$, відношення r_1, r_2 зі схемами $R(D_1, D_1'), R(D_2, D_2')$ відповідно. Виконуються такі властивості:

комутативність:

$$\text{DRILLUP}_{r_1}(\text{DRILLUP}_{r_2}(m)) = \text{DRILLUP}_{r_2}(\text{DRILLUP}_{r_1}(m));$$

дистрибутивність операції агрегації по відношенню стосовно арифметичних операцій:

$$\text{DRILLUP}_r(m_1 \oplus m_2) = \text{DRILLUP}_r(m_1) \oplus \text{DRILLUP}_r(m_2);$$

комутативність операцій агрегації по відношенню та операції зрізу: $\text{DRILLUP}_r(\text{SLICE}_{D=d}(m)) = \text{SLICE}_{D=d}(\text{DRILLUP}_r(m))$.

Описані операції над мірами з перерахованими властивостями є потужним та ефективним засобом маніпулювання даними в багатовимірній моделі.

М.М. Кундрат

МОДЕЛЬ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ТІЛА З ЛІНІЙНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Основні положення. Розглянемо в умовах плоскої задачі однорідне ізотропне тіло (пластинку), віднесене до декартової системи координат xOy , яке містить жорстке, але скінченної міцності на розрив включення довжини $2a$ розміщене на осі Ox . Тіло розтягується на нескінченності паралельно площині (лінії) включення зусиллями інтенсивності N_1 . Приймаємо, що з точок найбільшої концентрації напружень (кінців включення) пластичної течії та розпушування матеріалу, які охоплюють вершини включення. Зони розпушування й пластичної течії моделюються тріщинами ковзання вздовж межі матриця-включення, що дозволяє привести розв'язання проблеми до змішаної задачі теорії пружності.

Проміжок $b(N_1) \leq |x| < a$ відповідає зоні розпушування матеріалу контактної прошарку і в ньому прикладені дотичні зусилля зчеплення

$$\tau_{xy} = \tau_s^* \left(1 - \frac{|x| - b_*}{a - b_*} \right) \text{sign}(x), \text{ якщо } b \leq |x| < a \quad (x \in L_1). \quad (1)$$

Тут a – півдовжина включення; $a - b = d$ – довжина зони розпушування, коли проміжні навантаження $0 < N_1 < N_1^*$; $a - b_* = d_*$ – довжина зони розпушування в умовах граничної рівноваги ($N_1 = N_1^*$), яка може характеризувати тріщиностійкість матеріалу контактної прошарку, $b(N_1^*) = b_*$; τ_s^* – інтегральне напруження зчеплення по механізму поперечного зсуву.

Проміжок $c \leq |x| < b$ відповідає зоні пластичної течії матеріалу контактної прошарку, до берегів якого в розрізі прикладені дотичні зусилля

$$\tau_{xy} = \tau_s^* \left(1 - \frac{b - |x|}{a - b_*} \right) \text{sign}(x), \text{ якщо } c \leq |x| < b \quad (x \in L_2). \quad (2)$$

В стані граничної рівноваги ($b = b_*$) $\tau_{xy} = \tau_s^*$.

На проміжку $|x| < c$ включення бездефектно скріплене з матрицею

$$u^\pm = v^\pm = 0, \text{ якщо } |x| < c, (x \in L'). \quad (3)$$

На нескінченності спостерігається одноосний напружений стан

$$\sigma_{xx}^{(\infty)} = N_1, \quad \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0; \quad (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Тут і далі σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} – компоненти тензора напружень; u , v – компоненти вектора переміщень відповідно по осях Ox та Oy ; знаки "+" та "-" відповідають граничним значенням на дійсній осі відповідно із верхньої ($y > 0$) та нижньої ($y < 0$) півплощин; $\text{sign}(x) = +1$ для $x > 0$, 0 для $x = 0$ та -1 для $x < 0$.

Розв'язок зовнішньої задачі теорії пружності (1) – (4) шукаємо через комплексні потенціали Колосова–Мусхелішвілі, знання яких дає змогу визначити напружено деформований стан у тілі [1]:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad \sigma_{yy} - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (5)$$

$$2G(u' + iv') = \chi\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (6)$$

де $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ – аналітичні функції комплексної змінної $z = x + iy$; $\chi = 3 - 4\mu$ для плоскої деформації та $\chi = (3 - \mu)/(1 + \mu)$ для плоского напруженого стану; μ , G – коефіцієнт Пуассона та модуль зсуву матеріалу матриці.

Після підстановки формул (5), (6) у краєві умови (1) – (4) приходимо до наступної задачі лінійного спряження для функції $\Phi(z)$ з кусково-неперервними коефіцієнтами

$$\Phi^+(x) - g\Phi^-(x) = f(x), \quad (7)$$

де

$$g = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x \in L', \\ 1, & \text{якщо } x \in L_1 \cup L_2, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} f_1, & \text{якщо } x \in L', \\ f_2, & \text{якщо } x \in L_1, \\ f_3, & \text{якщо } x \in L_2, \end{cases} \quad f_1 = \frac{N_1(\chi - 1)}{4\chi}$$

$$f_2 = -\frac{2i\tau_s^*}{\chi + 1} \cdot \frac{a - |x|}{a - b_*} \operatorname{sign}(x), \quad f_3 = -\frac{2i\tau_s^*}{\chi + 1} \cdot \frac{a - b}{a - b_*} \operatorname{sign}(x).$$

Розв'язок задачі (7) має вигляд

$$\Phi(z) = \frac{N_1(\chi-1)}{8\chi} + \frac{B_2 z}{\sqrt{z^2 - c^2}} + \frac{\tau_s^*}{\pi(k+1)(a-b_*)} [b\Gamma_1(z, b, c) - a\Gamma_1(z, a, c) + z(\Gamma_2(z, b, c) - \Gamma_2(z, a, c))], \quad (8)$$

$$\Omega(z) = \frac{N_1(\chi-1)}{4} - \chi\Phi(z), \quad X(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - c^2}},$$

де

$$B_2 = N_1 \frac{\chi+1}{8\chi} - \frac{2\tau_s^*}{\pi(\chi+1)(a-b_*)} \times$$

$$\times \left[\sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{b^2 - c^2} + b \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - c^2}}{c} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{c} \right],$$

$$\Gamma_1(z, a, c) = \ln \frac{a\sqrt{z^2 - c^2} - z\sqrt{a^2 - c^2}}{a\sqrt{z^2 - c^2} + z\sqrt{a^2 - c^2}},$$

$$\Gamma_2(z, a, c) = \ln \frac{\sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{z^2 - c^2}}{a\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{z^2 - c^2}}.$$

Формули (5), (6), (8) дають розв'язок сформульованої задачі і дозволяють провести її повний аналіз.

Деформаційний критерій руйнування. З умови, що напруження при $x = \pm c$ скінченні в граничному випадку, коли $N_1 = N_1^*$, одержуємо:

$$\frac{\pi N_1(\chi+1)^2}{16\tau_s^* \chi} = \frac{1}{(a-b_*)} \left(\sqrt{b^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - c^2} + \right.$$

$$\left. + a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c} - b \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - c^2}}{c} \right). \quad (9)$$

Співвідношення (9) зв'язує силові N_1 , τ_s^* та геометричні a , b , b_* , c параметри.

Із формул (6), (8) з урахуванням (9) знайдемо зміщення матриці відносно включення в смугах пластичності чи розпушування та їх найбільше значення в точках $x = \pm a$

$$u(a) = \frac{\chi\tau_s^*}{\pi G(\chi-1)(a-b_*)} \left[2a^2 \ln \frac{a}{c} + \sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} + \right.$$

$$\left. ab\Gamma_1(a, b, c) - 0.5(a^2 - b^2)\Gamma_2(a, b, c) + c^2 - a^2 \right]. \quad (10)$$

В граничному випадку, коли $N_1 = N_1^*$, при досягненні зміщеннями певної межі δ_{2C} , аналогічно відомій δ_k -моделі, відбувається втрата зв'язку між включенням та матрицею. Приймаючи умову $u(a) = \delta_{2C}$ за таку, що відповідає зародженню тріщини ковзання по межі матриця-включення, маємо деформаційний критерій локального руйнування. Якщо зміщення матриці відносно включення біля його вершини $u(a)$ досягає критичного значення δ_{2C} , настає гранична рівновага і включення відшаровується від матриці.

З іншого боку, дотичні напруження на поверхні включення створюють в його поперечному перерізі розриваючі осьові зусилля. При досягненні зусиллями міцності включення відбувається його розрив. Отримані співвідношення дозволяють знайти ефективну довжину включення, яка разом із пружними та міцнісними параметрами композиції визначає механізм локального руйнування: розрив включення або його відшарування. Для кожного із механізмів руйнування встановлено значення граничного навантаження.

Як частковий випадок з отриманих рівнянь дістаємо модель композиції з крихкою матрицею ($c = b$), а також композиції з пластичною матрицею.

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 707 с.
2. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. — Киев: Наук. Думка, 1968. — 246 с.

УДК 517.958:519.6

В.М. Кухарський, Я.Г. Савула

ВИКОРИСТАННЯ ПРОЕКЦІЙНО-СІТКОВИХ МЕТОДІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ- ДИFUЗІЇ У ТОНКИХ КРИВОЛІНІЙНИХ КАНАЛАХ

Задачі адвекції-дифузії у тонких криволінійних каналах мають низку особливостей, породжених малим поперечним перерізом каналів та різкими градієнтами, які зумовлені

конвективними членами, що робить неможливим застосування стандартних чисельних методів, які добре зарекомендували себе для розв'язання класичних задач. У зв'язку з цим у статтях [1]-[3] було запропоновано підходи, які дають змогу на стадії побудови математичної моделі врахувати малий поперечний переріз каналу. Отримані в такий спосіб математичні моделі дозволяють ефективно чисельно досліджувати класичними методами лише явища, в яких перевага адвекції над дифузією є незначною. У сучасній літературі спостерігається широкий спектр підходів подолання осциляцій, що звичайно виникають в околі великих градієнтів, породжених конвективними членами. Більшість досліджень у цьому напрямку пов'язана з вибором модифікованих базисних функцій методу Петрова-Гальоркіна[4,5,6], зокрема з побудовою протипотокових різницевих схем [7,8]. Результати наведених досліджень дають змогу уникати нестійкості алгоритмів побудови числових розв'язків.

У статтях [1-3] процес адвекції-дифузії у тонкому каналі в криволінійній системі координат α_1, α_2 моделюється спеціальною, одновимірною за просторовою змінною, системою диференціальних рівнянь, яку у векторному вигляді можна подати у такому вигляді

$$\kappa^{(0)} \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \kappa^{(0)} \mathbf{w} \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{\lambda^{(0)}}{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} + \mathbf{P} \lambda^{(0)} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (1.1)$$

Початкові умови можна записати у вигляді

$$\mathbf{u}|_{\tau=0} = \mathbf{u}_0, \quad (1.2)$$

Граничні умови пропонуються одного з наступних типів

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_b \text{ на } \alpha_1 = \alpha_1^b, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_e \text{ на } \alpha_1 = \alpha_1^e, \quad (1.3)$$

$$\frac{\lambda^{(0)}}{A} \mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} = Q_b \text{ на } \alpha_1 = \alpha_1^b, \quad \frac{\lambda^{(0)}}{A} \mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} = Q_e \text{ на } \alpha_1 = \alpha_1^e, \quad (1.4)$$

$$\frac{\lambda^{(0)}}{A} \mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} = \beta_b (\mathbf{u} - \mathbf{u}_c^b) \text{ на } \alpha_1 = \alpha_1^b, \quad (1.5)$$

$$\frac{\lambda^{(0)}}{A} \mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} = \beta_e (\mathbf{u} - \mathbf{u}_e) \text{ на } \alpha_1 = \alpha_1^e. \quad (1.6)$$

Тут

$$\mathbf{u} = (t_1, t_2)^T, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & Kh/3 \\ Kh^2/3 & h/3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h/3 \end{pmatrix}, \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & -Kh/3 \\ -Kh^2/3 & h/3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/h \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} q^{(0)} - (1+hK)q^+ - (1-hK)q^- \\ q^{(1)} - (1+hK)hq^+ + (1-hK)hq^- \end{pmatrix},$$

$$\kappa^{(0)} = 2hc\rho, \lambda^{(0)} = 2h\lambda,$$

$$q^{(0)} = \int_{-h}^h q(1 + \alpha_2 K) d\alpha_1, q^{(1)} = \int_{-h}^h q(1 + \alpha_2 K) \alpha_2 d\alpha_1,$$

h - півтовщина, K - кривина каналу, A - коефіцієнт Ляме, c, ρ, λ - основні фізичні характеристики каналу, w - швидкість конвективного переносу, q - інтенсивність внутрішніх джерел, q^-, q^+ - потоки на границях $\alpha_2 = -h, \alpha_2 = h$ відповідно, t_1, t_2 - члени лінійного розкладу густини субстанції за товщиною [3].

Ця система рівнянь містить характерний параметр – число

Пекле $Pe = \frac{wc\rho}{\lambda}$ Величина цього числа, як і у класичному випадку

суттєво впливає на збіжність та стійкість числових розв'язків.

Зокрема, в [4] показано для випадку класичної одновимірної задачі адвекції-дифузії, що при використанні кусково-лінійних наближень із центрально-різницевою апроксимацією конвективного члена критерієм стійкості схеми є умова $Pe\Delta x \ll 2$, де Δx - крок поділу проміжку за просторовою координатою. Умови такого типу повністю виключають використання відповідних схем для розв'язування задач адвекції-дифузії, які виникають при

дослідженні процесів переносу забруднень, для яких числа Пекле $Pe \approx 10^3 - 10^4$.

Для чисельного розв'язання поставленої задачі будується варіаційна постановка задачі, застосовується напівдискретизаційний метод Бубнова-Гальоркіна. Базисні функції вибирають використовуючи інтегровані поліноми Лежандра [5] (внутрішні (bubble) функції).

При знаходженні інтегралів використовують квадратурні формули Гауса відповідних порядків. Розв'язування задачі Коші проводиться з використанням різницевої схеми Кранка-Ніколсона. Обчислювальні експерименти проводилися з метою апробації використання внутрішніх базисних функцій від поліномів Лежандра та дослідження впливу кривини на розподіл субстанції в часі.

У контексті дослідження ефекту покращення чисельного розв'язку з додаванням внутрішніх (bubble) вузлів до базисних функцій, розглядалася стаціонарна задача адвекції-дифузії у прямолінійному каналі, наповненому водою. Товщина каналу $h = 0.01\text{ м}$, фізичні характеристики $\lambda = 0.54 \frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$, $\kappa = 4.189 \frac{\text{сВт}}{\text{м}^3\text{К}}$. У каналі відбувається конвективне перенесення речовини у напрямку $-\alpha_1$, із швидкістю, що відповідають наступним числам Пекле $Pe = 1000$. На границях задається масообмін за законом Ньютона

при $\alpha_1 = \alpha_1^b : T_c = 0^\circ\text{C}$, $\beta_b = 1000 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$, при

$\alpha_1 = \alpha_1^e : T_c = 0^\circ\text{C}$, $\beta_e = 1000 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$. На рис. 1 приведено розподіл

температурного поля для описаної задачі при поділі на 10 елементів проміжку $\alpha_1^b = 0$, $\alpha_1^e = 1$.

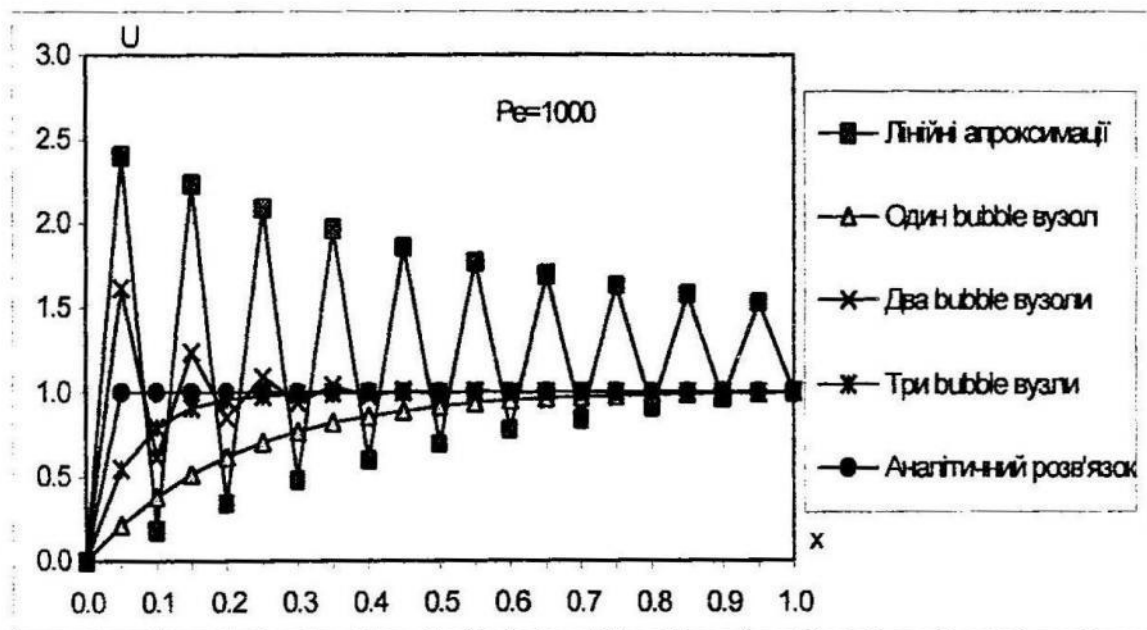


рис.1

1. Савула Я.Г., Сипа І.М., Струтинський І.В. Математичні моделі теплопровідності для тіл з тонкими покриттями і включеннями // Вісн.Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992. Вип.37. С.39-45.
 2. Савула Я.Г., Чапля Є.Я., Кухарський В.М. Чисельне моделювання конвективного теплопереносу в середовищі з тонким капіляром. // Вісн.Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип.41. С.101-105.
 3. Савула Я.Г., Чапля Є.Я., Кухарський В.М. Чисельне моделювання тепломасопереносу через тонкий криволінійний шар. // Доп. НАН. 1995. № 11. С.30-34.
 4. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена. М.: Мир, 1988. 544с.
 5. J. T. Oden Optimal h-p finite element methods // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1994. P. 309-331.
 6. L.P. Franca, C. Farhat Bubble function prompt unusual stabilized finite element methods Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1995. P. 299-308.
 7. K.S. Surana, J.S. Sandhu Investigation of diffusion in p-version 'STLSFE' formulations Computational Mechanics, 16. 1995. P. 151-169
 8. S.R. Idelsohn, J.C. Heinrich, E. Onate Petrov-Galerkin methods for the transient advective-diffusive equation with sharp gradients International journal for numerical methods in engineering. 1996. Vol. 39. P. 1455-1473.

О.І. Лаушник, Б.О. Попов

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ СПЛАЙНАМИ ІЗ ЗАДАНОЮ КІЛЬКІСТЮ ЛАНОК

Розбиваючи проміжок $[a, b]$ множиною точок $Z = \{z_i\}_{i=0}^r$ та наближаючи функцію $f(x)$ з вагою $w(x)$ ($w(x) \in C^1[a, b]$, $w(x) \neq 0$) на кожному підінтервалі $[z_{i-1}, z_i]$, $i = \overline{1, r}$ виразом найкращого чебишовського наближення $F(A_i, x) = F(a_0, \dots, a_m; x) \in C^{m+2}[a, b]$ із різними чисельними значеннями параметрів, отримаємо наближення функції $f(x)$ на всьому проміжку $[a, b]$ чебишевським сплайном

$$S(F, x) = \sum_{i=1}^r F(A_i, x) \Theta((x - z_{i-1})(z_i - x)), \quad (1)$$

де $\Theta(x)$ – функція Хевісайда, Z – множина вузлів сплайну.

Відомо [1], що максимальна похибка μ рівномірного наближення функції $f(x) \in C^{m+2}[a, b]$ чебишевським сплайном (1) із r ланками при $r \rightarrow \infty$ є

$$\mu = \frac{r^{-m-1}}{2^{2m+1}(m+1)!} \left(\int_a^b |\eta(f, F)| / w(x)^{\frac{1}{m+1}} dx \right)^{m+1} \left[1 + O\left(\frac{b-a}{r}\right) \right], \quad (2)$$

за умови, що ядро наближення

$$\eta(f, F) = \eta(f(x), F) \neq 0 \text{ при } x \in [a, b]. \quad (3)$$

Тоді похибки на підінтервалах $[z_{i-1}, z_i]$ запишуться:

$$\mu_i = A \left(\int_{z_{i-1}}^{z_i} \varphi(x) dx \right)^{m+1}, \quad i = \overline{1, r}, \quad (4)$$

де $A = \frac{1}{2^{2m+1}(m+1)!}$, $\varphi(x) = |\eta(f, F)| / w(x)^{\frac{1}{m+1}}$.

Твердження. Якщо μ_i можна представити у вигляді

$$\mu_i = A \varphi \left(\frac{z_{i-1} + z_i}{2} \right)^{m+1} (z_i - z_{i-1})^{m+1}, \quad i = \overline{1, r}, \quad (5)$$

тоді максимальна похибка наближення $\mu = \max_{i \leq i \leq r} \mu_i$ буде найменшою, якщо границі ланок сплайну знаходяться за ітераційною формулою

$$z_i^{(t)} = \frac{z_{i-1}^{(t)} \varphi \left(\frac{z_{i-1}^{(t)} + z_i^{(t-1)}}{2} \right) + z_{i+1}^{(t-1)} \varphi \left(\frac{z_i^{(t-1)} + z_{i+1}^{(t-1)}}{2} \right)}{\varphi \left(\frac{z_{i-1}^{(t)} + z_i^{(t-1)}}{2} \right) + \varphi \left(\frac{z_i^{(t-1)} + z_{i+1}^{(t-1)}}{2} \right)}, \quad i = \overline{1, r-1}, t = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

де $z_0 = a, z_r = b, z_i^{(0)} = a + (b-a)i/r, i = \overline{1, r-1}$.

Доведення базується на міркуванні, що максимальна похибка наближення є найменшою, якщо $\mu_i = \mu = \text{const}$. Вперше частковий випадок формули (6) для многочленних наближень трапляється у роботі [2].

Умова (5) виконується достатньо рідко. Проте в загальному випадку має місце

$$\mu_i = A \varphi(\xi_i)^{m+1} (z_i - z_{i-1})^{m+1}, \quad i = \overline{1, r}, \quad (7)$$

При $r \rightarrow \infty$ точки ξ_i та $z_i^* = \frac{z_{i-1} + z_i}{2}$ є близькими. Тому на практиці можна використовувати формулу (6) для наближеного знаходження границь ланок сплайну. Коли ж формула (6) не дає оптимального результату, тоді можна скористатись нею як початковим наближенням до границь ланок з подальшим уточненням, замість використання рівновіддалених вузлів.

Для прикладу розглянемо функцію Ламберта $y = W(x)$, що визначається із рівності $x \rightarrow y \exp(y)$ [3]. Вираз для ядра наближення функції Ламберта $W(x)$ раціональним многочленом $R_{l,1}(x)$ є

$$\eta(W(x), R_{l,1}) = \frac{1}{2} \frac{W(x)^3 (6 + 4W(x) + W(x)^2)}{(W(x) + 1)^5 x^3}.$$

а) використовуючи формулу (6), знайти абсолютне наближення функції Ламберта $W(x)$ на проміжку $x \in [0, 1000]$ сплайном з ланками – раціональними многочленами $R_{k,l}(x)$ при $k = 1, l = 1$, кількість ланок $r = 4$:

$$z_1 = 3.76115, \quad \mu_1 = .013731,$$

$$R_{1,1}^{(1)}(x) = \frac{.0322668 + 1.86812x}{2.34994 + x},$$

$$z_2 = 29.0606, \quad \mu_2 = .011254, \quad R_{1,1}^{(2)}(x) = \frac{8.54495 + 3.3602x}{14.1903 + x},$$

$$z_3 = 177.879, \quad \mu_3 = .010534,$$

$$R_{1,1}^{(3)}(x) = \frac{134.779 + 4.83312x}{82.0504 + x},$$

$$z_4 = 1000, \quad \mu_4 = .010205,$$

$$R_{1,1}^{(4)}(x) = \frac{1305.96 + 6.30865x}{453.341 + x}.$$

б) знайти балансне абсолютне наближення функції $W(x)$ на $x \in [0, 1000]$, $k = 1, l = 1, r = 4$:

$$z_1 = 3.18418, \quad \mu_1 = .011154,$$

$$R_{1,1}^{(1)}(x) = \frac{.024573 + 1.80172x}{2.20302 + x},$$

$$z_2 = 25.5761, \quad \mu_2 = .011444,$$

$$R_{1,1}^{(2)}(x) = \frac{6.79586 + 3.25832x}{12.5389 + x},$$

$$z_3 = 164.557, \quad \mu_3 = .011284,$$

$$R_{1,1}^{(3)}(x) = \frac{117.291 + 4.75436x}{74.4841 + x},$$

$$z_4 = 1000, \quad \mu_4 = .011564, \quad R_{1,1}^{(4)}(x) = \frac{1242.77 + 6.2827x}{436.702 + x}.$$

Наближення функції $W(x)$ на рівних підінтервалах проміжку $[0, 1000]$ раціональним виразом $R_{1,1}(x)$ при $r = 4$ дає максимальну похибку $\mu = .24343$.

Максимальна похибка наближення з рівновіддаленими границями ланок є у 21 раз більшою за максимальну похибку балансного наближення, тоді як максимальна похибка наближення, знайденого за формулою (6), лише у 1.2 раза більша за похибку балансного наближення. Очевидно, що використання формули (6) є виправданим, навіть якщо не виконується умова (5).

1. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. Киев: Наук.думка, 1989. 272с. 2. Meinardus G. Segmentapproximation mit Polynomen //ZAMM. 1966. 46. №3/4. P.239-246. 3. Corless R.M.,

Gonnet G.H., Hare D.E.G. On the Lambert W Function //Advances in Comput. Math. 1996. Vol 5. P.329-359.

УДК 519.72

В.А. Ліщинський, О.П. Хома

ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ СИНТЕЗУ СКІНЧЕННИХ АВТОМАТІВ

Основою синтезу скінченних автоматів будь-якого типу - детермінованих, імовірнісних, нечітких, розпізнавачів і перетворювачів, структурних автоматних моделей - є частковий синтез функції переходів з відповідним зважуванням її елементів. Тому найдоцільніше покращувати побудову скінченних автоматів, створюючи ефективні методи і алгоритми синтезу функцій переходу.

Пропонується ефективний за часовим та ємнісним критеріями метод побудови функції переходів, заданої безпосередньо. Вхідним для нього є регулярний вираз R у вхідному алфавіті X автомата, результатом - послідовність F трійок $u_i x u_j$ таких, що $u_j = \delta(u_i, x)$, $u_i, u_j \in U$, $x \in \{\varepsilon\} \cup X$, де δ - функція переходів, E - множина станів автомата, ε - порожнє слово. Метод використовує вхідний магазин M_R , вихідний M_F , внутрішній M , лічильники J та I . У магазинах M_R і M_F зберігаються відповідно регулярний вираз і функція переходів або їхні частини. Лічильник I призначено для підрахунку кількості пар дужок, а J - кількості певних станів. Магазин M забезпечує правильне створення індексів станів автомата. Лічильники і магазин M ідентифіковані своїми алфавітами.

Функція переходів будується за один перегляд регулярного виразу R як результат переходу $\pi : [R; O; O; \emptyset; \rho_0] \rightarrow [\emptyset; j; i; \emptyset; F]$, де ρ_0 - початковий стан автомата, $i \in I$, $j \in J$. На кожному кроці у залежності від символу у вершині вхідного магазину застосовується лише одне з наступних правил.

$$[S\omega_R; j; i; \omega_M; \omega_F c] \rightarrow [\omega_R; j; i; \omega_M; \omega_F \subset S],$$

$$[S\omega_R; j; i; \omega_M; \omega_F S'] \rightarrow [\omega_R; n; i; \omega_M; \omega_F S' u_n, u_n S],$$

$$[(\omega_R; j; i; \omega_M; \omega_F] \rightarrow [\omega_R; j; m; m\omega_M; \omega_F p_m p_m],$$

$$\begin{aligned}
[]\omega_R; j; i; l\omega_M; \omega_F] &\rightarrow [\omega_R; j; i; \omega_M; \omega_F k_l, k_l], \\
[<\omega_R; j; i; \omega_M; \omega_F] &\rightarrow [\omega_R; j; m; -m\omega_M; \omega_F p_m, (p_m, k_m)], \\
[>\omega_R; j; i; -l\omega_M; \omega_F] &\rightarrow [\omega_R; j; i; \omega_M; \omega_F k_l, (p_l, k_l)], \\
[\cup\omega_R; j; i; -l\omega_M; \omega_F] &\rightarrow [\omega_R; j; i; -l\omega_M; \omega_F k_l, (p_l, k_l)], \\
[\cup\omega_R; j; i; l\omega_M; \omega_F] &\rightarrow [\omega_R; j; i; l\omega_M; \omega_F k_l, p_l], \\
[\emptyset; j; i; \omega_M; \omega_F] &\rightarrow [\emptyset; j; i; \omega_M; \omega_F k_0],
\end{aligned}$$

де ω_R - кінцеве підслово виразу R ;
 ω_F - початкова частина послідовності F ;
 ω_M - слово алфавіту M ;
 c - допоміжний символ, $c \notin X$;
 l, m, n - цілі додатні числа, $m = i + 1$, $n = j + 1$;
 S, S' - літери вхідного алфавіту;
 $"<", ">"$ - ітераційні дужки;
 $u_n, k_l, k_m, p_l, p_m, k_0$ - стани автомата.

Після правила 9 ніяке інше правило не застосовується.

Для усунення трійок типу $a\epsilon b, a, b \in U$ слід послідовно виконати наступні дії.

1. Множину ваг M_a стану a замінити множиною $M_a \cup M_b$, де M_b - множина ваг стану b .

2. Для кожної трійки типу bSb :

а) якщо існує хоча б одна трійка $aS'd, d \in U$ така, що $d \neq a$ і $S' = S$, то доповнити послідовність F трійкою aSb ;

б) якщо не існує трійки $aS'd$, то доповнити F трійкою aSa .

Вилучити трійку $a\epsilon b$ з F .

3. Вилучити з послідовності F усі трійки типу aSb , якщо немає трійок $dS''a, S'' \in X$.

4. Множиною заключних станів автомата є множина усіх станів, позначених k_0 .

Побудовано програму, яка реалізує запропонований метод разом з усуненням зайвих трійок.

Василь Литвин

ОБ'ЄКТНО-ОРІЄНТОВАНИЙ ПІДХІД ДО ПРОЕКТУВАННЯ БАЗ ДАНИХ

Запропонований більш ніж 20 років тому об'єктний підхід до розробки прикладних програм ніс у собі революційні зміни: зокрема, можливість повторного використання даних, підвищення продуктивності, значну гнучкість процесів проектування систем. Не прийняття об'єктів в їх першому поданні обумовилось бажанням розробників піти шляхом узагальнення раніш напрацьованих підходів та методів.

Нині об'єктний підхід використовується для побудови різнотипних інформаційних систем: зокрема, систем автоматизованого проектування, навчання, баз даних, контролю систем програмного забезпечення, аналіз, операційних систем, інтерфейсних модулів. Ця методологія дозволяє успішно поборювати фактор складності, який присутній при побудові великих проектів та реальних інформаційно-комп'ютерних систем.

Перед створенням об'єктних типів в БД, слід проаналізувати поставлену мету їх використання. Нашим завданням є створення об'єктних типів для побудови складних БД, що опрацьовують дані з максимальним ступенем подібності до предметів реального світу. Потім ми та інші проектувальники можуть використовувати ці об'єкти в таблицях іншої БД.

Основним принципом ОО підходу є умова "об'єктом може бути все, що завгодно". Деякі об'єкти є примітивні і не змінюються, наприклад, числа і символічні рядки. Згідно з традиційною термінологією такі об'єкти відповідають значенням. Інші об'єкти, які задаються користувачем і змінюються, побудовані складнішим чином, наприклад, СЛУЖБОВЦІ, ВІДДІЛ і т.д. Ці більш складні об'єкти відповідають змінним з довільною внутрішньою складністю, тобто такі об'єкти можуть містити будь-яку кількість типів даних, які присутні в звичайних мовах програмування, і конструкторів типів - чисел, рядків, списків, масивів, стеків і т.д.

Наступні приклади ілюструють роботу з об'єктами і те як ми можемо використати їх в проектуванні БД. Багато розробників використовують об'єктні типи для побудови простих БД, які потім

можна використати для побудови реляційної БД, що робиться досить просто. Наприклад, наступний запис створює тип адреса ADDRESS_TYPE:

```
CREATE OR REPLACE TYPE address_type AS OBJECT (  
    street1 VARCHAR2(50),  
    street2 VARCHAR2(50),  
    city VARCHAR2(50),  
    state VARCHAR2(25),  
    zipcode VARCHAR2(10),  
    country VARCHAR2(50));
```

Тому що специфікація ADDRESS_TYPE не містить методів специфікації, то тіло в такого об'єкта відсутнє. Коли специфікація об'єктного типу не містить ні методів специфікації, ні атрибутів, то це є незакінчений об'єктний тип (дефектний). Інколи треба оголошувати дефектні об'єкти перед тим як ми ще точно не знаємо, що ми хочемо зробити. Так як потім ми можемо побудувати залежні об'єкти навколо дефектного.

Коли нам треба визначити адресу в реляційній БД, ми можемо використати об'єкт ADDRESS_TYPE, який автоматично погоджується із загальною директивою:

```
CREATE TABLE sales.customers (  
    id INTEGER PRIMARY KEY,  
    last_name VARCHAR2(50),  
    first_name VARCHAR2(50),  
    address pub.address_type,  
    ...
```

Об'єктно-орієнтована розробка програм є набагато вигідніша, тому що потребує менше затрат на побудову інформаційних систем. Об'єкти можна використовувати повторно, не задумуючись над тим як вони працюють. Це є перспективний етап на шляху розвитку технологій керування БД.

1. Г. Буч Объектно-ориентированное проектирование с примерами применения. - Киев: Диалектика, 1992. 2. Objects in high gear. Oracle magazine, january/february. 1997. P. 84-96. 3. Extending Oracle 8 with objects. Oracle magazine, september/october. 1997. P. 123-128. 4. Date C.J. An Introduction to Database Systems. - Addison-Wesley Longman, Inc., 1995.

В.М. Макар

ЧИСЕЛЬНІ СХЕМИ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ РОЗРАХУНКІВ НА ОСНОВІ h -АДАПТИВНОЇ ВЕРСІЇ МСЕ

Останнім часом, у чисельному аналізі на основі методу скінченних елементів (МСЕ), значно зріс інтерес до питання побудови адаптивних схем підвищення точності розрахунків. Потреба у процедурах оцінки точності скінченноелементних апроксимацій виникла з перших спроб практичного застосування МСЕ. Першопочаткові кроки у розв'язанні цієї проблеми полягали у порівнянні чисельних розв'язків з точними для добре вивчених, "стандартних" задач. Однак налагоджене таким чином програмне забезпечення, яке реалізує МСЕ, ще не гарантує прийнятність та точність отриманих числових розв'язків при розв'язуванні складних задач інженерної практики [1]. Така ситуація зумовлена тим, що в реальних задачах неможливо а priori побудувати сітку, на якій локальна похибка дискретизації рівномірно розподілена по елементах, а глобальна похибка задовольняє наперед визначений критерій точності. Це приводить до виникнення підобластей, в яких локальна похибка є дуже великою. Для того щоб визначити такі підобласті, з метою їх уникнення, було запропоновано апостеріорні оцінки похибки, які дозволяють оцінити локальну похибку дискретизації. Оцінений розподіл похибки можна тоді використати для зміни (адаптації) параметрів дискретизації по МСЕ, а саме, діаметра скінченноелементної сітки (h -адаптивність), поліноміального порядку базисних функцій (p -адаптивність), або одночасно і перше, і друге (hp -адаптивність). Дана робота присвячена побудові та дослідженню h -адаптивного обчислювального процесу для розв'язання осесиметричної задачі лінійної статичної теорії пружності анізотропного тіла.

Повний h -адаптивний обчислювальний процес, спрямований на отримання розв'язку наперед заданої точності, включає три етапи, які повинні бути застосовані циклічно:

- 1) отримання розв'язку на початковій сітці та оцінка його точності за допомогою апостеріорної оцінки похибки;
- 2) найбільш ефективно прогнозування локального згущення сітки потрібного для досягнення заданої точності;

3) згущення сітки, отримання нового розв'язку і оцінка нової похибки з наступним поверненням на другий крок, якщо нова похибка перевищує бажану.

У даній роботі, на першому етапі побудованої h -адаптивної схеми МСЕ, використовується апостеріорна Z^2 -оцінка [1]. Суть довільної апостеріорної оцінки похибки полягає в тому, що поряд із "стандартним" вектором компонент тензора напружень σ_h , отриманим безпосередньо із скінченноелементної апроксимації вектора переміщень u_h за допомогою закону Гука та співвідношень Коші, шукаються "згладжені" (smoothed) напруження σ^* , які в певному сенсі є більш точними. Дійсно, різниця між різними апостеріорними оцінками полягає у способі отримання "згладженого" розв'язку σ^* , який потім використовується для обчислення енергетичної норми похибки. У Z^2 -оцінці, "згладжені" напруження σ^* , на кожному скінченному елементі, інтерполюються за допомогою тієї ж системи базисних функцій, що і компоненти вектора переміщень, тобто

$$\sigma^* = N \tilde{\sigma}^*, \quad (1)$$

де: N - фінітні базисні функції МСЕ, $\tilde{\sigma}^*$ - вектор вузлових значень компонент тензора напружень. Для обчислення вузлових значень напружень $\tilde{\sigma}^*$ використовується рівняння проектування:

$$\int_{\Omega} N^T (\sigma^* - \sigma_h) d\Omega = 0. \quad (2)$$

З рівняння (2), після нескладних перетворень, маємо:

$$\tilde{\sigma}^* = A^{-1} \left(\int_{\Omega} N^T D S N d\Omega \right) \tilde{u}, \quad (3)$$

де: $\tilde{u}$ - вектор значень переміщень у вузлах сітки, D - матриця пружних констант, яка фігурує в узагальненому законі Гука, S - матриця диференціальних операторів із геометричних співвідношень Коші, $A^{-1} = \int_{\Omega} N^T N d\Omega$.

В основі процедури прогнозування локального згущення сітки лежить критерій отримання числового розв'язку наперед заданої, бажаної точності, яка визначається максимально допустимою відносною похибкою $\eta_{\max}$. З цього критерію, шляхом прогнозування розмірів скінченних елементів, безпосередньо можна побудувати "оптимальну" скінченноелементну сітку. У даній роботі під

"оптимальною" сіткою розуміється сітка, на якій локальна похибка дискретизації в енергетичній нормі рівномірно розподілена по елементах. Саме для такої сітки, як показано у [2], асимптотична швидкість збіжності апроксимації по МСЕ залежить лише від поліноміального порядку базисних функцій, і не залежить від порядку сингулярності. Умова визначення елементів біжучої сітки, які потрібно згустити, має вигляд

$$\|\tilde{e}\|_m > \eta_{\max} \sqrt{(\|\mathbf{u}_h\|^2 + \|\tilde{e}\|^2)/M}, \quad (4)$$

де $\|\tilde{e}\|_m$ - локальна похибка дискретизацій на m -му елементі, $\|\mathbf{u}_h\|^2$ - енергія деформації, $\|\tilde{e}\|$ - глобальна оцінена похибка, тобто похибка для обчислення якої використовується "згладжений" розв'язок σ^* , M - число скінченних елементів.

На прикладі задачі Ляме про визначення напружено деформівного стану порожнинного циліндра, який перебуває під дією рівномірного тиску на внутрішню поверхню, апробовано та налагоджено відповідне програмне забезпечення, яке реалізує описану вище h -адаптивну схему МСЕ. Наведено отримані чисельні результати, які підтверджують ефективність запропонованого обчислювального процесу.

1. O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedures for practical engineering analysis. Int.J.Numer.Methods Eng. 1987. Vol. 24, P. 337-357. 2. O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu. Adaptivity and mesh generation. Int.J.Numer.Methods Eng. 1991. Vol. 32, P. 783-810.

Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), грант №PSU061060.

УДК 517.948

М.Й. Михайлюк

ПРО ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ В ОДНОМУ КЛАСІ ПОТЕНЦІАЛІВ

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає у відшукуванні плоскої однозв'язної області D , при заповненні якої

речовиною зі сталою густиною породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x, y)$.

Введемо допоміжну функцію $z = z(t)$, яка відображає конформно круг $|t| < 1$ комплексної площини t на область D площини $z = x + iy$, що містить початок координат, причому $z(0) = 0$, $z'(0) > 0$. Функцію $z = z(t)$ назвемо розв'язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_e(x, y)$ і густини σ .

Обернена задача логарифмічного потенціалу зводиться до розв'язування нелінійного інтегрального рівняння

$$\sigma z_* = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{U_e(z(\tau)) d\tau}{\tau - t}, \quad |t| > 1 \quad (1)$$

де

$$z_*(t) = \overline{z(1/\bar{t})}, \quad z(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k t^k, \quad \alpha_1 > 0 \quad (2)$$

$U_e(z) = \frac{2}{\pi} \frac{\partial V_e}{\partial z}$ – аналітична функція зовні початку координат, що зникає на безмежності.

Розглянемо випадок, коли

$$U_e(z) = \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{b}{z^3}, \quad \sigma = 1,$$

де a, b – дійсні числа. Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{\alpha_1 t} + \varphi_1(t), \\ \frac{1}{z^2} &= \frac{1}{\alpha_1^2 t^2} - \frac{2\alpha_2}{\alpha_1^3} \frac{1}{t} + \varphi_2(t), \\ \frac{1}{z^3} &= \frac{1}{\alpha_1^3 t^3} - \frac{3\alpha_2}{\alpha_1^4} \frac{1}{t^2} - \left(\frac{3\alpha_3}{\alpha_1^4} - \frac{6\alpha_2^2}{\alpha_1^5} \right) \frac{1}{t} + \varphi_3(t), \end{aligned} \quad (3)$$

де $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ – аналітичні функції в одиничному крузі, то підставляючи (2), (3), (4) в (1), отримуємо нелінійну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_1} - \frac{2a\alpha_2}{\alpha_1^3} - \frac{3b\alpha_3}{\alpha_1^4} + \frac{6b\alpha_2^2}{\alpha_1^5}, \\ \overline{\alpha_2} = \frac{a}{\alpha_1^2} - \frac{3b\alpha_2}{\alpha_1^4}, \\ \overline{\alpha_3} = \frac{b}{\alpha_1^3}, \\ \alpha_4 = \alpha_5 = \dots = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) є еквівалентною наступній системі рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + 2|\alpha_2|^2 + 3|\alpha_3|^2 = 1, \\ a = \alpha_1^2 \overline{\alpha_2} + 3\alpha_1 \alpha_2 \overline{\alpha_3}, \\ b = \alpha_1^3 \overline{\alpha_3}, \\ \alpha_4 = \alpha_5 = \dots = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Елементарними методами теорії функцій дійсної змінної встановлюємо існування принаймні одного розв'язку $(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \alpha_3^{(0)})$, $\alpha_1^{(0)} > 0$ нелінійної системи (6) в множині дійсних чисел при умові

$$\frac{a^2}{27} + \frac{b^2}{256} \leq 1. \quad (7)$$

Таким чином, має місце така

Теорема. Для потенціалу (3), який задовольняє умову (7), нелінійна система рівнянь (6) має принаймні один розв'язок $(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \alpha_3^{(0)})$, $\alpha_1^{(0)} > 0$. Якщо функція $z(t) = \alpha_1^{(0)}t + \alpha_2^{(0)}t^2 + \alpha_3^{(0)}t^3$ здійснює конформне відображення круга $|t| < 1$ на деяку плоску однозв'язну область D площини $z = x + iy$, то дана область D і є розв'язком оберненої задачі для даного потенціалу.

Приклад. Нехай

$$U_e(z) = \frac{1}{z} + \frac{b}{z^3}, \quad b = \sqrt{\frac{9}{256}}. \quad (8)$$

Тоді функція $z(t) = \sqrt{\frac{3}{4}}t + \frac{i}{\sqrt{12}}t^3$ здійснює конформне відображення круга $|t| < 1$ на деяку зіркову область D площини $z = x + iy$ і є розв'язком оберненої задачі для потенціалу (8).

І. Іванов В. К. Інтегральні рівняння оберненої задачі теорії потенціалу. // ДАН СРСР. – 1955. – Т. 105, № 3. – С. 409–411.

УДК 517.948

А. О. Музичук

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАГЕРА ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ

Одним із підходів до розв'язування нестационарних граничних задач є зведення їх до стаціонарних за допомогою інтегрального перетворення (ІП) по часовій змінній. При цьому ключового значення набуває проблема оберненого перетворення. Особливо це стосується випадку неканонічних областей, коли в просторі зображень не вдається застосувати аналітичні методи, які допускали б ефективне повернення до оригіналу. В даній роботі узагальнюється метод, який був запропонований автором для розв'язування граничних задач для хвильового рівняння [1].

1. Інтегральне перетворення Лагера. В просторі X функцій $x(t), t \in [0, \infty)$, для яких виконується умова інтегровності

$\int_0^\infty x^2(t) dt < +\infty$, введемо скалярний добуток

$$(x, y) = \int_0^\infty x(t)y(t) dt \quad (1)$$

і на його основі норму $\|x\|^2 = (x, x)$.

Розглянемо систему функцій

$$\{\varphi_k(t) | \varphi_k(t) = e^{-\omega t} {}^{1/2} L_k(\omega t), \omega > 0\}_{k=0}^\infty. \quad (2)$$

Можна показати, що ці функції є ортогональними і $\|\varphi_k\|^2 = \frac{1}{\omega}$.

Означення. ІП Лагера будемо називати оператор Λ , який діє згідно з правилами

$$\Lambda: X \rightarrow m, \quad (3)$$

$$\Lambda x(t) = \hat{\mathbf{x}} = (x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)^T, \quad (4)$$

де $x_k = (x, \varphi_k)_m$ - простір обмежених послідовностей, а вектор $\mathcal{E}$ - трансформантою функції $x(t)$. Слідуючи теорії рядів Фур'є, для отримання оригіналу - функції $x(t)$, можна використати наступний ряд Фур'є по системі функцій (2):

$$x(t) = \omega \sum_{k=0}^{\infty} x_k \varphi_k(t), t \geq 0. \quad (5)$$

Для переходу до стаціонарних задач у просторі зображень оператора Λ потрібно знати трансформанти похідних по часу. Можна показати істинність наступних співвідношень:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx(t)}{dt}, \varphi_k \right) &= -x(0) + \frac{1}{2} \omega x_k + \omega \sum_{i=0}^{k-1} x_i, \\ (6) \quad \left(\frac{d^2 x(t)}{dt^2}, \varphi_k \right) &= -\frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} - \left(\frac{1}{2} + k \right) \omega x(0) + \frac{1}{4} \omega^2 x_k + \omega^2 \sum_{i=0}^{k-1} (k-i) x_i. \end{aligned}$$

2. Еквівалентність нестационарних задач і задач в просторі зображень. Нехай в області $\Omega \in \mathbb{R}^3$, обмеженій кусково-гладкою поверхнею S , $\vec{\nu}$ - зовнішня нормаль, розглядаються граничні задачі з однорідними початковими умовами для однорідного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u(M, t)}{\partial t^2} = \Delta u(M, t), M \in \Omega, t \in [0, \infty), \quad (7')$$

$$\frac{\partial u(M, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = u(M, 0) = 0, \quad (8')$$

чи однорідного рівняння дифузії

$$\frac{\partial u(M, t)}{\partial t} = \Delta u(M, t), M \in \Omega, t \in [0, \infty), \quad (7'')$$

$$u(M, 0) = 0, \quad (8'')$$

і загального вигляду граничними умовами

$$lu(M, t)|_S \equiv \sigma_1 u(M, t) + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \vec{\nu}} u(M, t) = f(M, t), M \in S, \quad (9)$$

узгодженими з початковими. Надалі вважаємо, що всі функції в постановці задач є достатньо гладкими для допустимості виконання операцій з їхніми трансформантами.

Розглянемо трансформанти функцій $u(M, t)$ і $f(M, t)$:

$\mathcal{E} = \Lambda u(M, t)$, $\mathcal{F} = \Lambda f(M, t)$. Як наслідок однорідності початкових

умов компоненти послідовності $\{u_k\}$ задовольняють наступні співвідношення:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(M) = 0; \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k u_k(M) = 0; \quad (11)$$

при цьому остання рівність стосується лише гіперболічного випадку. Якщо до лівої та правої частин диференціальних рівнянь (7) та граничної умови (9) застосувати ІІ Лагера, то з врахуванням початкових умов (8) отримаємо наступну систему граничних задач еліптичного типу:

$$A\hat{u} = 0; \quad (12)$$

$$l \hat{u} = \hat{f}. \quad (13)$$

Диференціальний оператор A має наступний вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \Delta - a_{0,0} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots \\ a_{1,0} & \Delta - a_{0,0} & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k,0} & a_{k,1} & \dots & a_{k,k-1} & \Delta - a_{0,0} & 0 & \dots \\ a_{k+1,0} & a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k-1} & a_{k+1,k} & \Delta - a_{0,0} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Його коефіцієнти залежать від вихідного нестационарного диференціального оператора. У випадку хвильового рівняння вони визначаються формулами

$$a_{k,i} = \begin{cases} \frac{1}{4} \omega^2, & i = k = 0; \\ \omega^2(k-i), & i < k; \\ 0, & i > k. \end{cases} \quad (15')$$

У випадку рівняння дифузії ці коефіцієнти мають дещо простіший вигляд:

$$a_{k,i} = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega, i = k = 0; \\ -\omega, i < k; \\ 0, i > k. \end{cases} \quad (15'')$$

Теорема. *Нестационарна гранична задача (7)-(9) є еквівалентною системі граничних задач (10)-(13).*

Доведення. Розглянемо лише випадок граничних задач для хвильового рівняння, оскільки схема обґрунтування для параболічної задачі аналогічна. Покажемо, що трансформанта $\mathcal{F}$ розв'язку $u(M, t)$ задачі (7'), (8'), (9) задовольняє систему (10)-(13). Спочатку підставимо її в ліву частину k -го рівняння системи (12) і виконаємо очевидні перетворення скалярних добутків:

$$\begin{aligned} & \Delta u_k(M) - \frac{1}{4}\omega \quad {}^2u_k(M) - \omega \quad {}^2\sum_{i=0}^{k-1} (k-i)u_i = \\ & (\Delta u, \varphi_k) - \frac{1}{4}\omega \quad {}^2(u, \varphi_k) + \omega \quad {}^2\sum_{i=0}^k (k-i)(u, \varphi_i) = \\ & (\Delta u, \varphi_k) - (u, \frac{1}{2}\omega[\frac{1}{2}\omega\varphi_k + \omega\sum_{i=0}^{k-1}\varphi_i] + \omega\sum_{i=0}^{k-1}[\frac{1}{2}\omega\varphi_k + \omega\sum_{j=0}^{i-1}\varphi_j]) = \\ & (\Delta u, \varphi_k) - (\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{1}{2}\omega\varphi_k + \omega\sum_{i=0}^{k-1}\varphi_i) = \\ & (\Delta u, \varphi_k) - (\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi_k) = (\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi_k) \end{aligned}$$

Оскільки функція $u(M, t)$ задовольняє хвильове рівняння, то, очевидно, останній скалярний добуток перетворюється на нуль для довільного номера рядка системи. Задоволення співвідношень (10)-(13) є очевидним.

Тепер покажемо, що ряд Фур'є

$$\bar{u}(M, t) = \omega \sum_{k=0}^{\infty} u_k(M) \varphi_k(t), M \in \Omega, t \geq 0, \quad (16)$$

побудований на основі розв'язку $\bar{u}$ системи (12), задовольняє хвильове рівняння. Обчислимо наступний вираз:

$$\begin{aligned}\Psi \bar{u}(M, t) &\equiv \Delta \bar{u}(M, t) - \frac{\partial^2 \bar{u}(M, t)}{\partial t^2} = \\ &= \omega \sum_{k=0}^{\infty} \Delta u_k(M) \varphi_k(t) - \omega \sum_{k=0}^{\infty} u_k(M) \frac{\partial^2 \varphi_k(t)}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Випишемо другу похідну по часу і змінимо порядок сумування:

$$\begin{aligned}\Psi \bar{u}(M, t) &= \omega \sum_{k=0}^{\infty} \Delta u_k(M) \varphi_k(t) - \\ &- \omega \sum_{k=0}^{\infty} u_k(M) \left\{ \frac{1}{4} \omega^2 \varphi_k(t) + \omega^2 \sum_{i=0}^{k-1} (k-i) \varphi_i(t) \right\} = \\ &= \omega \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t) \left[\Delta u_k(M) - \frac{1}{4} \omega u_k(M) \right] - \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} u_k(M) \sum_{i=0}^{k-1} (k-i) \varphi_i(t) = \\ &= \omega \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t) \left[\Delta u_k(M) - \frac{1}{4} \omega u_k(M) \right] - \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t) \sum_{i=k+1}^{\infty} (i-k) u_i(M).\end{aligned}$$

Використовуючи формули (6), можна записати:

$$\begin{aligned}\Psi \bar{u}(M, t) &= \\ &= \omega \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t) \left[\Delta u_k(M) - \frac{1}{4} \omega u_k(M) \right] - \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t) \sum_{i=0}^{k-1} (k-i) u_i(M) = \\ &= \omega \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t) \left\{ \Delta u_k(M) - \frac{1}{4} \omega^2 u_k(M) - \omega^2 \sum_{i=0}^{k-1} (k-i) u_i(M) \right\}.\end{aligned}$$

Оскільки $\hat{u}$ - розв'язок системи (12), то для $\forall k \geq 0$ вираз у фігурних дужках перетворюється на нуль. Звідси випливає, що $\forall M \in \Omega, t \geq 0 \Psi \bar{u}(M, t) = 0$, тобто функція $\bar{u}(M, t)$ задовольняє хвильове рівняння. Задоволення початкових та граничних умов перевіряється безпосередньою підстановкою.

Зауваження: 1) у випадку неоднорідних нестационарних диференціальних рівнянь система (12) буде неоднорідною; її права частина міститиме трансформанти правої частини відповідного нестационарного рівняння і функцій з початкових умов; 2) методика використання ІП Лагера повністю переноситься на випадок зовнішніх граничних задач, а також на задачі з нерегулярними граничними поверхнями.

3. Інтегральне представлення трансформант. В [1] було запропоновано інтегральне представлення трансформант за допомогою фундаментального розв'язку диференціального оператора, який є частковим випадком оператора, що задається формулою (14). Аналогічним способом можна показати, що коли

$G(M, P, T)$ - фундаментальний розв'язок нестационарного диференціального оператора, то вектор

$\hat{G} = (G_0(M, P), G_1(M, P), \dots, G_k(M, P), \dots)^T$, де

$G_k(M, P) = (G, \varphi_k)$, є фундаментальним розв'язком оператора A .

Теорема. *Послідовність $\hat{u}$, компоненти якої обчислюються згідно з формули*

$$u_k(M) = \iint_S \sum_{i=0}^k \left[G_{k-i}(M, P) \frac{\partial}{\partial \vec{V}_P} u_i(P) - u_i(P) \frac{\partial}{\partial \vec{V}_P} G_{k-i}(M, P) \right] ds_P, \quad (7)$$

є розв'язком системи (12) для $\forall M \in \Omega$.

Доведення. Підставимо інтеграли (16) у вираз правої частини k -го рівняння системи (12) і перегрупуємо в ньому доданки, зводячи подібні члени з функціями $u_k(P)$ та їх нормальними похідними. В результаті для $\forall k \geq 0$ і $\forall M \in \Omega$ отримаємо:

$$R_k(M) = \iint_S \sum_{i=0}^k \left[\frac{\partial}{\partial \vec{V}_P} u_i(P) \left\{ \Delta G_{k-i}(M, P) - \sum_{m=0}^{k-i} a_{k,m} G_m(M, P) \right\} - \right. \\ \left. - u_i(P) \frac{\partial}{\partial \vec{V}_P} \left\{ \Delta G_{k-i}(M, P) - \sum_{m=0}^{k-i} a_{k,m} G_m(M, P) \right\} \right] ds_P$$

Оскільки $\hat{G}$ - фундаментальний розв'язок оператора A , то вираз у фігурних дужках перетворюється на нуль $\forall M \in \Omega$, і, остаточно, $R_k(M) = 0$. Теорема доведена.

Для трансформант $\hat{u}$ інтегральне представлення (17) є аналогом формули Гріна, оскільки задає компоненти $u_k(M)$ через їх значення та значення нормальних похідних на границі S . Ці граничні значення можна визначити з граничних умов (13). Відповідно до наведеної вище методики, компоненти трансформант можна також шукати у вигляді аналогів потенціалів простого та подвійного шару, що в деяких задач дає змогу отримати розв'язки з меншим обсягом обчислень.

Вигляд представлення (17) є підставою для застосування до граничних задач у просторі зображень методу граничних елементів [2]. Варто відзначити як позитивний момент, що матриця алгебраїчної системи, що утворюється при його застосуванні, є незмінною для обчислення всіх компонент, а права частина обчислюється по рекурентному алгоритму.

1. Людкевич И.В., Музычук А.Е. Численное решение краевых задач для волнового уравнения. - Львов, ЛГУ, 1990. -80 с.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Метод граничных элементов. -М.:Мир, 1987.

УДК 539.3

І.С. Муха, Н.Я. Савула

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК ТИМОШЕНКА З ВИКОРИСТАННЯМ АПРОКСИМАЦІЙ ФУНКЦІЯМИ - "БУЛЬБАШКАМИ"

При дослідженні задач теорії оболонок типу Тимошенка методом скінченних елементів (МСЕ) для малих значень відносної товщини h спостерігається явище втрати точності отримуваних чисельних результатів. Це явище пов'язане з виродженням задачі для випадку $h \rightarrow 0$. Для боротьби з цим явищем у ряді робіт запропоновані різні методи, зокрема метод редукованого інтегрування та метод штрафу. У даній роботі для боротьби із втратою точності результатів використовується апроксимація розв'язку за допомогою функцій - "бульбашок".

Розглянемо задачу циліндричного згину пластини, нескінченної за напрямком ξ_2 - лінії, навантаженої рівномірно розподіленим тиском на зовнішній поверхні $\xi_3 = h/2$.

Ключові рівняння для цього випадку мають вигляд

$$\begin{aligned} -B \frac{d^2 u_1}{d\xi_1^2} &= p_1, \\ -G \left(\frac{d\gamma_1}{d\xi_1} + \frac{d^2 w}{d\xi_1^2} \right) &= p_n, \\ -D \frac{d^2 \gamma_1}{d\alpha_1^2} + G \left(\gamma_1 + \frac{dw}{d\alpha_1} \right) &= m_1, \\ 0 \leq \xi_1 &\leq 1, \end{aligned} \tag{1}$$

де $B=Eh/(1-\nu^2)$, $G=k^*G^*h$, $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$, $p=\text{const}$ - інтенсивність зовнішнього навантаження. Нехай $p_1=0$, $p_n=p=\text{const}$, $m_1=0$.

Припустимо, що на краях $\xi_1 = 0, 1$ пластина защемлена, тобто виконуються умови

$$w = \gamma_1 = 0, \quad u_1 = w = \gamma_1 = 0, \quad \xi_1 = 0; 1. \quad (2)$$

Розв'язок системи рівнянь (1) при крайових умовах (2) має вигляд

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ w &= \frac{P}{2G} \xi_1 + \left(\frac{P}{24D} - \frac{P}{2G} \right) \xi_1^2 - \frac{P}{12D} \xi_1^3 + \frac{P}{24D} \xi_1^4, \\ \gamma_1 &= -\frac{P}{12D} \xi_1 + \frac{P}{4D} \xi_1^2 - \frac{P}{6D} \xi_1^3. \end{aligned} \quad (3)$$

Для побудови чисельного розв'язку задачі (1), (2) запишемо її слабку постановку. Введемо простір

$$V = \{v(\xi_1) : v \in W_2^{(1)}, v = 0, \xi_1 = 0, 1\}. \quad (4)$$

Домножимо друге та третє рівняння (1) на довільні функції $\tilde{w}, \tilde{\gamma}_1 \in V$ та зінтегруємо на проміжку $[0, 1]$. Отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^1 G \frac{d\gamma_1}{dx} \tilde{w} dx + \int_0^1 G \frac{dw}{dx} \frac{d\tilde{w}}{dx} dx &= \int_0^1 p_1 \tilde{w} dx, \\ \int_0^1 D \frac{d\gamma_1}{dx} \frac{d\tilde{\gamma}_1}{dx} + \int_0^1 G \left(\gamma_1 + \frac{dw}{dx} \right) \tilde{\gamma}_1 dx &= \int_0^1 m_1 \tilde{\gamma}_1 dx, \quad \tilde{w}, \tilde{\gamma}_1 \in V. \end{aligned} \quad (5)$$

Чисельний розв'язок задачі (5) побудуємо МСЕ на сітці

$$\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = 1, \quad (6)$$

Позначимо через

$$\Omega_k = \{\xi_1 : \xi_1^{k-1} < \xi_1 < \xi_1^k\},$$

k -ий скінченний елемент. Відобразимо його на стандартний елемент

$$\Omega_{st} = \{\xi : -1 < \xi < 1\}$$

за допомогою формул

$$\xi_1 = \frac{1-\xi}{2} \xi_1^{k-1} + \frac{1+\xi}{2} \xi_1^k.$$

Виберемо на стандартному елементі наступні базисні функції

$$\varphi_1 = \frac{1-\xi}{2}; \varphi_2 = \frac{1+\xi}{2}; \varphi_i = \Phi_{i-1}(\xi), i = 3, 4, \dots, m,$$

де Φ_j визначається через поліноми Лежандра P_{j-1}

$$\Phi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t) dt, j = 2, 3, \dots,$$

Має місце формула $\Phi_j(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(2j-1)}}(P_j - P_{j-2})$.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь МСЕ формується з матриць B_{11} , B_{22} , B_{21} , B_{12} , F_1 , F_2 , елементи яких обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} b_{11}^{ij} &= \frac{2}{h_k} \int_{-1}^1 G \frac{d\varphi_i}{d\xi} \frac{d\varphi_j}{d\xi} d\xi, \\ b_{22}^{ij} &= \frac{2}{h_k} \int_{-1}^1 D \frac{d\varphi_i}{d\xi} \frac{d\varphi_j}{d\xi} d\xi + \frac{h_k}{2} \int_{-1}^1 G \varphi_i \varphi_j d\xi, \\ b_{21}^{ij} &= \int_{-1}^1 G \frac{d\varphi_i}{d\xi} \varphi_j d\xi, \\ b_{12}^{ij} &= \int_{-1}^1 G \frac{d\varphi_j}{d\xi} \varphi_i d\xi, \\ f_1^i &= \frac{h_k}{2} \int_{-1}^1 m_1 \varphi_i d\xi, \quad f_2^i = \frac{h_k}{2} \int_{-1}^1 p \varphi_i d\xi. \end{aligned} \tag{7}$$

Обчислення інтегралів у формулах (7) здійснюється з використанням властивостей базисних функцій та поліномів Лежандра.

В таблиці наведені результати обчислень відносного прогину w/l за формулою (3) - перший стовпчик та МСЕ - 2, 3 стовпчики для 4-ох базисних функцій ($h=1/10$).

	8-elem	16-lem
w/l-аналіт.	w/l	w/l
0.0000000E+0	0.0000000E+0	0.0000000E+0
2.1156921E+0		2.1134509E+0
5.8932617E+0	5.8878396E+0	5.8921302E+0
1.0499578E+1		1.0501599E+1
1.5229687E+1	1.5361143E+1	1.5235797E+1
1.9506805E+1		1.9517034E+1
2.2882324E+1	2.3152207E+1	2.2895998E+1
2.5035809E+1		2.5051752E+1
2.5774999E+1	2.6100408E+1	2.5791732E+1

Зауважимо, що шляхом використання лінійних апроксимацій МСЕ така точність результатів може бути досягнена у випадку значно густішої сітки.

УДК 519.689

Ю.В. Нікольський, В.В. Пасічник

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ, ЩО РОЗВИВАЄТЬСЯ

Пропонується та обґрунтовується підхід до аналізу інформаційних систем, що розвиваються. Його необхідність обумовлена деякими новими (нетрадиційними) обставинами, які виникають у процесі аналізу динамічних предметних областей. Особливості проектування та побудови таких інформаційних систем частково відображені в [1] та згенеровані особливостями формування вітчизняної законодавчої та нормативної бази діяльності суб'єктів ринку. Неоднозначність, що присутня у постановках задач автоматизації для таких предметних областей, ставить перед проектувальниками проблему розробки методології створення прототипів уніфікованих автоматизованих інформаційних систем. Водночас тривалість розробки та висока її вартість змушує мінімізувати процеси перепроєктування та забезпечити оперативну перебудову системи при зміні зовнішніх, не залежних від проектувальників, умов. Вказані обставини є важливими для формування перспективної маркетингової політики на ринку програмних засобів з метою організації розподілу ресурсів при просуванні на ринок товарного програмного продукту.

Наведена ситуація згенерувала задачу формалізації процесу проектування шляхом побудови відповідної моделі та її опис за допомогою формальної мови, операторам якої ставляться у відповідність задані програмні об'єкти. Це в свою чергу дозволяє оперативно оцінювати та аналізувати нові взаємозв'язки в інформаційній системі, які генеруються новими бізнес-процесами, та зменшити зусилля по створенню оновлених версій програмного забезпечення.

Введемо множину $A_0 = \{\alpha_i^{(0)} \in I_0\}$ всіх носіїв інформації (бізнес-об'єктів) про діяльність суб'єкта. Нехай A_{01} та A_{02} - множини вхідних та вихідних документів ($A_{01} \subseteq A_0$, $A_{02} \subseteq A_0$) відповідно. Ці множини фіксуються певними нормативними документами та можуть значною мірою змінюватися. Очевидно, що A_{01} та A_{02} ($A_{01} \cup$

$A_{02} = A_0$, $A_{01} \cap A_{02} = \emptyset$) виконують розбиття множини A_0 . Введемо також множину бізнес-операцій $\Omega_0 = \{ \omega_i^{(0)} \mid i \in J_0 \}$ на елементах

множини A_0 . Бізнес-операції Ω_0 ($\Omega_0: A_{01} \rightarrow A_{02}$) виконують сюр'єктивне відображення множини A_{01} у множину A_{02} та визначають бінарне відношення на множині A_0 . Це відношення є антирефлексивним та антисиметричним (за означенням на основі нормативних документів, якими вони визначені). Будемо розглядати діяльність, що автоматизується у вигляді алгебраїчної системи $\Sigma_0 = \langle A, \Omega_0, \Pi_0 \rangle$ [2]. Через Π_0 позначено множину предикатів - пропозиційних функцій, що можуть набирати істинне або хибне значення. Можна в подальшому розглядати, якщо це не обумовлено додатково, замість алгебраїчної системи Σ_0 модель Σ_0^* , в якій операції Ω_0 представлені відповідними предикатами у Π_0 .

Позначимо $I_{01} = |A_{01}|$, $I_{02} = |A_{02}|$ і побудуємо $P(A_{01})$ та $P(A_{02})$ - множини всіх непорожніх підмножин множин A_{01} та A_{02} відповідно та їх об'єднання $A = P(A_{01}) \cup P(A_{02})$. Реально, що $|P(A_{01})| < 2^{I_{01}} - 1$, $|P(A_{02})| < 2^{I_{02}} - 1$.

Кожний бізнес-об'єкт характеризується деякими інформаційними ознаками, які утворюють множину Φ_i ($\Phi_i = \{ \phi_{ij} \mid j \in L_0 \}$, $i \in I_0$, $L_0 \subset N$).

В процесі проектування автоматизованої системи побудуємо її математичну модель шляхом відображення алгебраїчної системи Σ_0 у алгебраїчну систему $\Sigma_1 = \langle B, \Omega_1, \Pi_1 \rangle$, де пара $B = \langle B_1, B_2 \rangle$, $B_1 = \{ \beta_i^{(1)} \mid i$

$\in I_{11} \}$, $B_2 = \{ \beta_i^{(2)} \mid i \in I_{12} \}$ складається з множин інформаційних

ознак, які містяться у множинах $P(A_{01})$ та $P(A_{02})$, відповідно та отримані їх відображенням за правилом

$$B_j = \bigcup_{\substack{\alpha_i \in P(A_{0j}) \\ i \in I_{0j}}} \Phi_i, j=1,2.$$

Очевидно, що $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Таке визначення множин B_1 та B_2 дозволяє позбутися надлишковості інформаційних ознак, які містять документи множин A_{01} та A_{02} . Множина операцій, які виконуються на

B позначимо $\Omega_1 = \{ \omega_i^{(1)} \mid i \in J_1 \}$, де $\omega_i^{(1)}: \beta_{i1} \rightarrow \beta_{i2}$, $\beta_{i1} \in B_1$, $\beta_{i2} \in B_2$.

На відміну від Ω_0 , A , Π_0 , множини Ω_1 , B , Π_1 не залежать від форматів

вхідних та вихідних документів, а визначені на основі законодавчих актів, що регламентують діяльність суб'єкта та прийняту систему обліку. Тому при проектуванні системи розглядатимемо виключно Σ_1 , оскільки перехід від Σ_0 до Σ_1 належить до проблематики проектування інтерфейсу. Зокрема, Ω_1 складається із нормативних операцій опрацювання інформації та операцій формування зовнішніх звітів.

Алгебраїчна система $\Sigma_1 = \langle B, \Omega_1, \Pi_1 \rangle$ відображається у систему $\Sigma_2 = \langle C, \Omega_2, \Pi_2 \rangle$ за правилами: множина $C = \{\gamma_i \mid i \in I_2\}$ складається з атрибутів баз даних та отримується з B поповненням множиною ключів K , множина відношень Π_2 бази даних вводиться шляхом аналізу множин C та Ω_2 на основі відповідної реляційної алгебри, а множина операцій Ω_2 отримується з Ω_1 застосуванням програмних засобів інструментальної реляційної СУБД.

Подальший аналіз властивостей множин алгебраїчної системи Σ_1 (або відповідної їй моделі Σ_1^*), буде проводитись з метою виділення загальних характеристик, що дозволить виконувати перепроєктування при зміні правил бізнесу. Для цього видається доцільним розробити спеціалізований програмний комплекс, який поряд з використанням CASE-засобів дозволить оперативно здійснювати перепрограмування системи.

І. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В.,
Тарасов Д.О. Концепція інформаційної системи "Реєстр власників
іменних цінних паперів". Інформаційні системи та мережі. Вісн. держ. ун-ту
"Львівська політехніка". 1997. №315. С.153-168. 2. Мальцев А.И.
Алгебраические системы. - М: Наука, 1971. - 230 с.

УДК 518:517.948

Т.М. Олійник, Б.А. Остудін

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКИХ ПРОСТОРОВИХ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Серед багатьох сучасних моделей, які описують різні фізичні процеси, неабиякий інтерес представляють нестационарні задачі

поширення тепла. Актуальними серед таких задач є просторові задачі теплопровідності в нерегулярних областях.

1. Постановка задачі. Нехай в R^3 задана деяка область Ω_+ , обмежена замкнутою поверхнею Γ , яку віднесемо до класу ліпшицевих. Введемо позначення:

$$I := (0, T), \Sigma := \Gamma \times I, Q_+ := \Omega_+ \times I, Q_- = R^4 \setminus \overline{Q_+}.$$

''Природним'' сімейством гільбертових просторів для граничних задач теплопровідності є сімейство просторів $H^{2s,s}(Q_+)$, де s - довільне дійсне число [1]. У випадку, коли s - ціле, то даний простір- це простір функцій інтегрованих з квадратом по області Q_+ разом зі своїми похідними по t до порядку s і зі всіма своїми похідними по x до порядку $2s$. Тобто, наприклад,

$$H^{2s,s}(Q_+) = L^2((0, T); H^{2s}(\Omega_+)) \cap H^s((0, T); L^2(\Omega_+)),$$

де

$$L^2(\Omega_+) = \{u(x, \cdot) \mid \int_{\Omega_+} |u(x, \cdot)|^2 d\Omega_+ < \infty\}.$$

Введемо такий оператор сліду для кожної функції з класу $H^{1,1/2}(Q_+)$:

$$B^+ : H^{1,1/2}(Q_+) \rightarrow H^{1/2,1/4}(\Sigma),$$

де

$$H^{1/2,1/4}(\Sigma) - \text{звуження функцій із } H^{1,1/2}(Q_+) \text{ на } \Sigma.$$

Розглянемо задачу: необхідно знайти розв'язок u в просторі $H^{1,1/2}(Q_+)$, який задовольняє умови

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f \quad \text{в } Q_+, \quad (1.1)$$

$$B^+ u = g \quad \text{на } \Sigma, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{в } \Omega_+, \quad (1.3)$$

де

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u - \text{еліптичний оператор,}$$

$$a_{ij}, a_0 \in C^\infty(R^3; R) - \text{функції дійсної змінної і } a_{ij} = a_{ji},$$

$$B^+ - \text{граничний оператор,}$$

$$g \in H^{1/2,1/4}(\Sigma) - \text{гранична функція,}$$

$$f \in L^2(I, H^{-1}(\Omega_+)).$$

Зауважимо, що оператор B^+ можна розглядати як

$$B^+ u = u|_{\Sigma}, \quad (1.4)$$

тобто задача (1.1.)-(1.3.)-представляє початково-крайову задачу типу Діріхле, або

$$B^+ u = \partial_n u|_{\Sigma}, \quad (1.5)$$

тобто задача (1.1.)-(1.3.) є задачею Неймана.

Методи чисельного знаходження розв'язку розглянутої задачі (1.1.)-(1.3.) умовно можна розділити на «прямі методи» (тобто з використанням формул Гріна) і «непрямі методи» (для представлення розв'язку задачі використовують потенціал простого чи подвійного шару). Коротко це можна записати:

$$u = V_{\sigma} - W_{\mu} \quad (\text{«прямий метод»}), \quad (1.6)$$

$$u = V_{\sigma} \quad (\text{«метод простого шару»}), \quad (1.7)$$

$$u = W_{\mu} \quad (\text{«метод подвійного шару»}), \quad (1.8)$$

де

$$(V_{\sigma})(x, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} \sigma(y, \tau) \cdot E(R, t - \tau) d\Gamma d\tau,$$

$$(W_{\mu})(x, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} \mu(y, \tau) \cdot \partial_n E(R, t - \tau) d\Gamma d\tau,$$

причому

σ і μ - шукані функції, визначені на граничній поверхні Γ ;

$$E(R, t) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^3} \cdot \exp(-R^2 / 4t) - \text{фундаментальний розв'язок}$$

рівняння теплопровідності.

Використання представлень розв'язку (1.6)-(1.8) та застосування запропонованих просторів дає змогу при розв'язуванні задачі (1.1)-(1.3) одержати еквівалентні граничні інтегральні рівняння 1-го або 2-го роду в залежності від граничної умови (1.3), а також встановити їх розв'язність.

Зауважимо також, що описані підходи при незначній модифікації основних функціональних просторів поширюються на випадок незамкнених границь.

2. Деякі аспекти чисельного розв'язування задач теплопровідності. Розглянемо початкову-крайову задачу (1.1.)-(1.3.) типу Діріхле. Для чисельного розв'язування задачі скористаємось представленням (1.7.). В результаті одержимо граничне інтегральне

рівняння (ГІР) Фредгольма 1-го роду по просторових змінних, яке можна записати в такому вигляді:

$$V_{\sigma} = g \text{ на } \Sigma, \quad (1.9)$$

або

$$\int_0^t \int_{\Gamma} \sigma(x, \tau) E(R, t - \tau) d\Gamma d\tau = g,$$

де

$\sigma(x, \tau)$ - невідома функція, визначена на граничній поверхні

Σ ,

R - відстань між точкою інтегрування та точкою спостереження на Σ .

При розв'язуванні (1.9) проведено дискретизацію по часовій змінній, в результаті чого одержано стаціонарну послідовність ГІР спеціального виду (ліві частини яких формуються лише один раз, а зміні підлягають- лише праві). Далі використовуємо метод колокації із застосуванням розбиття поверхні Γ криволінійною сіткою на елементи. В межах кожного такого елемента здійснюємо біквадратичну апроксимацію шуканих функцій σ . Обравши як точки колокації вузли елементів і здійснивши сумування по елементах поверхні, одержуємо послідовність систем алгебраїчних рівнянь (СЛАР). При розв'язуванні СЛАР враховуємо наявність слабкої особливості в ядрах інтегральних рівнянь, а також сингулярну поведінку шуканого розв'язку вздовж границі нерегулярних областей. Для послаблення особливості ядра використовуємо чисельно-аналітичний метод [2].

Описаний підхід використано для чисельного розв'язування одного класу початково-крайових задач теплопровідності на нерегулярних областях складної геометрії. Отримані результати засвідчують ефективність такого методу.

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложение. -М.: Мир, 1971. 371с. 2. Yu. Sybil. Three-dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface, Matematychni Studii, V.8, No.1 (1997) 79-96. 3. Олійник Т.М., Остудін Б.А. Алгоритм наближеного розв'язування однієї задачі теплопровідності у випадку розімкнених поверхонь складної геометрії.// Волинський математичний вісник. 1996, Вип. 3. С.99-102.

М. Ю. Опир, В. В. Черняхівський

АЛГОРИТМИ АВТОМАТИЧНОГО РОЗПІЗНАВАННЯ ІЗОЛІНІЙ ВИСОТ ТОПОГРАФІЧНИХ КАРТ

Усі об'єкти, представлені на топографічній карті, мають векторну природу, а для подальшої обробки растрове представлення просто непридатне (Geo Informational Systems працюють з векторною інформацією). На топографічній карті найбільший об'єм інформації несуть ізолінії висот. Ця інформація (у векторному вигляді) є необхідна для числових задач: розрахунок ерозії ґрунтів, температурного режиму, картографування, і т.ін. Тому було створено програмний продукт, який у заданій кольоровій растровій топографічній карті віднаходить (векторизує) ізолінії висот (горизонталі).

Аналіз та запропоновані рішення. Отримане сканером зображення має суттєві недоліки внаслідок фізичної природи процесу сканування. Кожен піксел зображення, отриманого за допомогою сканера, несе інтегральну характеристику деякої області зображення. Чіткий контур ізолінії при скануванні “розмивається” перехідними тонами. Тому були відкинуті методи, що працюють з диференціацією кольорів. Також не підходять в даному випадку методи, які бінаризують зображення та потоншують лінії [3]. Було запропоновано відмовитися від будь-якого перетворення зображення, що спотворює його (призводить до втрат інформації). По растровому зображенню відтворювалося приблизне “реальне” зображення. “Реальне” – означає, що можна визначити колір точки не тільки в цілочисельних координатах, а й в дійсних. Це дало змогу побудувати трасувальник (бігунок, tracer), що переміщується в дійсних координатах по “реальній” карті, та відшукує ізолінії. Цей бігунок використовує такі перетворення координат для спрощення процесу трасування: зміщення, поворот, “поляризація”. Відтворення “реального” зображення повинно бути достовірним та вимагати мінімум ресурсів процесора. Зважаючи на ці причини, було запропоновано пірамідальну апроксимацію.

Математичні моделі. В пірамідальній апроксимації беруть участь чотири сусідні пікселі (A, B, C, D), що розташовані у

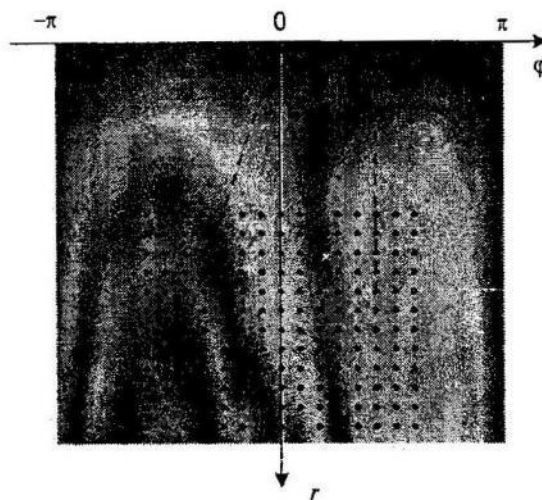
вершинах прямокутника. Колір кожного з пікселів розкладається на складові R, G та B. Над кожною зі складових (далі яскравість) виконується однакова процедура, після чого синтезується результат. Вводиться п'ята точка (E), яскравість якої є середнім арифметичним яскравостей кутів. Після цього обчислення яскравості результату полягає в знаходженні координати точки z на площині, що проходить через три точки (дві точки сторони та центральну E) при заданих x та y :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \text{ та } \begin{vmatrix} x_f & y_f & z_f - z_a \\ 1 & 0 & z_b - z_a \\ -1/2 & -1/2 & z_e - z_a \end{vmatrix} = 0$$

де a, b – точки сторони, e – центральна точка, f – шукана точка.

При трасуванні використовуються такі перетворення координат:

- зсув: $x' = x + \Delta x$,
 $y' = y + \Delta y$;
- поворот: $x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi$,
 $y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$;
- “поляризація”: $x' = y \cos x$,
 $y' = y \sin x$.



Процес трасування

Процес трасування. По неперервному зображенню переміщується точка трасування (далі бігунок). Він переміщується кроками-ітераціями. На кожній ітерації бігунок вибирає найкращий

напрямок, використовуючи при цьому зсув, поворот та полярні перетворення системи координат. Незмінним від ітерації до ітерації параметром бігунка є колір лінії. Бігунки "намагаються" віднайти найкращий напрямок. Він перебирає (сканує) простір від $-\pi/2$ до $\pi/2$ (по ϕ) та від мінімального до максимального радіусів, що також задані як незмінні параметри бігунка (див. рисунок). По шляху від поточної точки до точок, що скануються, обчислюється функція, що є інтегралом відхилення від заданого кольору лінії. Найкращим вважається напрямок, де ця функція досягає мінімуму. Бігунки можуть працювати у двох режимах трасування: прямими, спіралями. На перетвореній карті ці спіралі та прямі представлені відрізками. Трасування спіралями має деяку перевагу над трасуванням прямими, оскільки вони зберігають напрям, що був на попередній ітерації.

Проведено експериментальну апробацію програми на топографічних картах, сканованих з низькою якістю 150dpi. Вдалося побудувати ізолінії рівня для всіх ліній, що не мали зливання з сусідніми, зникання, критичної зміни кольору тощо.

1. GIS FRONTIERS IN BUSINESS AND SCIENCE and ICA MAP USE COMMISSION SESSION; Conference Proceedings, Volume 1; Masaryk University, Brno; First 1996. 2. Maperiali United States Geographical Survey (USGS). Ресурси Internet-у (<http://www.usgs.gov/>). 3. Т.М. Радул, Т.О. Банак. Курс лекцій з топології. Рукопис посібника.

УДК 519.689

А. Пелешишин

ПОБУДОВА ФОРМАЛЬНОЇ МОДЕЛІ WEB-СИСТЕМИ

Web-система визначається як набір взаємопов'язаних сервісів (або один сервіс як їхній комплекс) та набір клієнтів, що подають запит.

Стан та поведінка Web-системи повністю визначається станом та поведінкою сервісів системи. Зміни стану сервісу можуть виникати лише внаслідок отримання запиту клієнта.

В інформаційних системах архітектури "клієнт-сервер" не можна наперед передбачити алгоритми функціонування клієнта (особливо у Web-системах). Можна лише визначити множину

можливих запитів клієнта та відповідну реакцію на них сервісів ІС (інформаційної системи). Також можна проводити ймовірнісний аналіз запитів клієнтів ІС.

Виділимо два основні апарати формального опису реакції сервісів ІС на клієнтські запити.[0]

Перший ґрунтується на алгоритмічному описі правил функціонування ІС. Такий опис здійснюється на певній формальній мові, орієнтованій на відповідну предметну область.

Другий (автоматний) - орієнтується на опис станів ІС і правил переходів між ними та базується на використанні апаратів абстрактних автоматів та мереж Петрі.

Існують певні відмінності між першим та другим підходами, що простежуються при їх класичному використанні. Зокрема:

Алгоритмічний підхід ближчий до програмної реалізації сервісів системи, тому він є більш економний стосовно розмірності моделі, наочніший та легший для безпосереднього впровадження.

Підхід, базований на автоматних моделях, краще формалізований, і як наслідок, більш придатний для аналізу як логічних правил, так і фізичних аспектів функціонування Web-системи.

Основні проблеми автоматного підходу впливають із неадекватного росту числа станів, переходів та розмірностей алфавітів моделі системи. Ця проблема стає критичною при моделюванні крупних інформаційних систем, зокрема, систем глобального масштабу (типу WWW, що функціонує у мережі INTERNET) [4].

Для усунення проблеми великої розмірності або нескінченності в описі множин вхідних, вихідних алфавітів і станів системи доцільно використовувати розширення апаратів опису автоматних моделей. Так виділимо наступні напрямки таких розширень:

1. використання недетермінованих та імовірнісних автоматних моделей;
2. використання моделей, що базуються на автоматах із параметрами (реакція системи на запит визначається не тільки самим запитом, а й додатковими параметрами, що супроводжують запит системи);
3. побудова автоматних мереж як заміника ієрархічної структури модулів в алгоритмічних моделях.

Автоматна модель розподіленої ІС описується традиційним впорядкованим набором[0]

$$IS = (Q, A, St, \varphi, \psi);$$

де

Q – вхідний алфавіт ІС; A – вихідний алфавіт ІС; St – множина станів системи, φ, ψ – функції переходів та виходів.

Множину символів, що складають вхідний алфавіт системи, опишемо наступним чином:

$$\begin{aligned} Q &= \{Q_i\}, \\ Q_i &= \{Id_Q^{(i)}, Pq_1^{(i)} \dots Pq_{N_Q^{(i)}}^{(i)}\} \\ P_j^{(i)} &= \{At_1 : D_Q^{(i)} \dots At_l : D_Q^{(i)}\} \quad l = N_{P_Q^{(i)}} \end{aligned}$$

Аналогічно описується множина символів, що утворюють вихідний алфавіт системи.

Кожний запит до ІС та її відповідь містить дві частини: ідентифікаційну та параметричну. Ідентифікаційна - однозначно визначає тип запиту. Параметри є фактично додатковою інформацією, що супроводжує запити та відповіді на них ІС.

Загальну схему конкретного стану St інформаційної системи можна описати наступним чином:

$$St^{(i)} = (Id_{St}, St_1^{(i)} \dots St_{N_{St}}^{(i)}),$$

де $St_1 \dots St_{N_{St}}$ - стани компонент інформаційної системи. Таким чином, формальний опис стану ІС має рекурсивний характер. Така рекурсія будується на основі ієрархічної структури інформаційної системи (одним з можливих інструментів відображення структури ІС є FHD - діаграми функціональної ієрархії).

Визначення точної реакції системи на запит клієнта залежить не лише від ідентифікаторів запиту та стану ІС. Реакція системи залежить також від параметрів P_j запиту та бази даних ІС. У відповіді системи також міститиметься, крім ідентифікатора, й параметрична компонента.

У загальному випадку реакція системи може бути неповністю визначеною і у випадку параметричного опису. У такому разі для моделювання Web-систем доцільно використовувати апарат імовірнісних автоматів.

1. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. - М.: Мир, 1984.
2. Аничкин С.А. и др. Протоколы информационно-вычислительных сетей. Справочник. - М.: Радио и связь, 1990.
3. Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Шумлич Ш. Введение в теорию абстрактных автоматов. - М: Изд-во моск. ун-та, 1985.
4. Зайцев С.С. Описание и реализация протоколов сетей ЭВМ. - М.: Энергия, 1980.

А. А. Переймибіда

ПРО ДЕЯКІ ПІДХОДИ ДО РОБОТИ З РОЗРІДЖЕНИМИ МАТРИЦЯМИ ІЗ ГРУПОВАНИМИ НЕНУЛЬОВИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

1. Постановка задачі. При програмній реалізації методів розв'язування задач математичної фізики виникає потреба працювати з матрицями великих розмірностей. Програмування під DOS накладає низку обмежень на використання пам'яті.

Наступні підходи можна використовувати для розв'язання перелічених проблем: проблема одного сегмента може бути розв'язана через динамічний розподіл пам'яті; використання Extended або Expanded пам'яті дасть змогу використовувати всю доступну оперативну пам'ять; тимчасове збереження інформації на диск з наступним підвантаженням необхідної інформації, дозволить використовувати пам'ять у межах доступного дискового простору та оперативної пам'яті (далі: *доступної пам'яті*). Засобами ООП можна приховати основний недолік таких підходів: різні реалізації для підтримки різних типів пам'яті.

Сучасні операційні системи (наприклад, Windows 95) підтримують реалізацію віртуальної пам'яті [1]. Часто у задачах математичної фізики виникають розріджені матриці. Виникає питання: чи завжди доцільно у таких випадках використовувати стандартну реалізацію віртуальної пам'яті?

2. Робота з віртуальною пам'яттю. Якщо ми хочемо замовити великі об'єми пам'яті, а використовуємо лише деякі елементи – слід використати віртуальну пам'ять. При виділенні (Commit) деякого об'єму пам'яті, ОС розподіляє для процесу адресний простір потрібного розміру. Але об'єм у пам'яті чи на диску не займається. Далі, у межах виділеної, можна резервувати (Reserve) пам'ять, з якою вже можна працювати. Після цього розмір доступної пам'яті у системі зменшується на відповідну величину. Мінімальний розмір резервованої пам'яті – 1 сторінка ОС (у Windows 95 – 4к).

3. Приклад реалізації. У системах програмування (розглядається реалізація у Delphi), при описі великих масивів у віртуальній пам'яті резервується необхідний об'єм. Тобто на диску, у

файлі для підвантаження (swap file), займається необхідний об'єм пам'яті. При описі *a:array [1..5000,1..5000] of double*, необхідно мати для запуску програми 200 000 000 байт місця для змінної *a*.

Реалізовано клас *VirtualArray*, який дає змогу працювати з великими двовимірними масивами, але орієнтований на збереження розріджених матриць. Лише при збереженні ненульових елементів у системі виділяється необхідний об'єм пам'яті. Таким чином, з урахуванням службових затрат, для збереження нульової матриці, згаданої вище, необхідно 48 842 байт.

У табл. 1 наведено результати порівняння класичного та пропонованого підходу. Тестування проводились на комп'ютері з процесором Pentium 200 MMX (ОП: 32Мб) для масивів розмірністю 5000х5000. Нулі у тестах слідували один за другим по стрічках матриці.

Таблиця 1. Час доступу до матриць залежно від заповненості

Заповненість	Читання (хв.)	Перший запис (хв.)*	Наступні записи (хв.)	Економія (наближ., Мб)
0%	0:27	0:28	0:28	200
40%	0:49	0:38	1:16	120
70%	1:00	0:50	2:02	60
Класичний	0:39	0:42	3:08	-

Результати свідчать про ефективність реалізованого класу за рахунок економії об'єму використаної пам'яті. Запис/читання у розріджену матрицю відбувається тим швидше, чим більш розріджена матриця.

Зауважено, що даний підхід є не завжди ефективний. Результати, наведені у табл. 1, отримані для матриць із неперервним розміщенням ненульових елементів (стрічка за стрічкою). Якщо ж ці елементи не груповані (розміщені випадково), то, за рахунок того, що мінімальний об'єм пам'яті для виділення становить одну сторінку (4k), ми можемо і не отримати вигаду. Ефективне використання класу *VirtualArray* буде лише тоді, коли відстані між групами ненульових елементів є більші за 1 сторінку.

* Перший запис у масив, виділений у віртуальній пам'яті, відбувається значно швидше за рахунок того, що не потрібно узгоджувати дані, які записуються, з даними збереженими у файлі підвантаження.

4. Приклад використання для діагональних матриць.

Розглянуто випадок, що виник при розв'язуванні задач математичної фізики. Побудова програмного комплексу для розв'язування телеграфного рівняння (наприклад для випадку розглянутого у [2]) зумовила необхідність використовувати великі масиви. Реалізація під DOS використовувала перераховані у пункті 1 методи обходу обмежень системи при використанні пам'яті.

Аналіз структури отримуваних матриць показав їх спеціальну циклічну стрічкову структуру (рис. 1). Кількість стрічок, що будуть заповнені, не піддається попередньому визначенню.

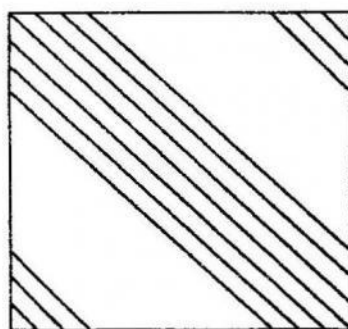


Рис. 1. Стрічковість отримуваних матриць

Ефективним використання описаного вище класу *VirtualArray* буде лише тоді, коли розмірність матриці перевищить 512x512. Для нашої задачі було реалізовано нащадок цього класу: *VirtualBandArray*: замовляється масив *VirtualArray* розміром $N \times (N + 2(N - 1))$, а доступ здійснюється за зміщеною системою

координат $\begin{cases} i' = i \\ j' = j - i + N \end{cases}$. Оскільки в *VirtualArray* резервуються не

нульові елементи, то в об'ємі необхідної пам'яті ми втратимо лише на системні потреби. Недоліком є лише те, що розходується адресний простір об'ємом $(N \times (N + 2(N - 1))) \times 8$. Виходячи з величини адресного простору (2-4Гб), можна вважати, що даний недолік не є суттєвим.

Таким чином, пряме використання стандартних можливостей не завжди ефективне. Ми описали спеціальні прийоми для більш ефективної роботи з розрідженими матрицями у Windows-системах.

1. Калверт Ч. Delphi 2. Энциклопедия пользователя. К.: НИПФ "ДиаСофт Лтд.", 1996. - 736. 2. Халко Р. С., Переймибіда А. А. Метод потенциалів розв'язування початково-крайових задач для телеграфного рівняння на площині. //Теорет. електротехніка. 1996. №53. С. 73-82.

Б.О. Попов

ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ ДЛЯ ПОБУДОВИ БАЛАНСНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Для представлення складної функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ її заміняють простішим виразом із $(m+1)$ -м параметрами

$$F(A, x) = F(a_0, a_1, \dots, a_m; x). \quad (1)$$

Часто вимагається, щоб зважена похибка на проміжку $[a, b]$ не перевищувала певного значення μ . Якщо кількість параметрів наближення необхідно мінімізувати, то ми приходимо до найкращого чебишовського зваженого (з вагою $w(x) > 0$) або мінімаксного наближення. Деякі обчислювальні системи мають процедури для знаходження мінімаксного наближення раціональним многочленом

$$V_{k,l}(x) = x^s R_{k,l}(x^p), \quad (2)$$

де s та p – цілі числа, $R_{k,l}(x)$ – раціональний многочлен із степенем чисельника – k і степенем знаменника – l ($k+l=m$).

Для швидкого обчислення наближення та зменшення похибок заокруглення часто зручно використовувати на різних підінтервалах $[z_{i-1}, z_i]$ ($a = z_0 < z_1 < \dots < z_r = b$) проміжку $[a, b]$ наближаючі вирази $F(A_i, x)$ з різними значеннями параметрів, тобто переходити до наближення сплайнами. Якщо максимальне значення похибки наближення

$$\mu_i = \max_{x \in [z_{i-1}, z_i]} |(f(x) - F(A_i, x))| / w(x), \quad (3)$$

де $a = z_0 < z_1 < \dots < z_r = b$ однакове на усіх підінтервалах ($\mu_i = \mu, i = \overline{1, r}$), то таке наближення зветься балансним ("balanced") наближенням сплайнами. Часом його звуть також рівномірним [1] або вирівненим ("leveled", "equal-leveled") наближенням сплайнами [3,6]. Якщо кожна ланка сплайну є найкраще чебишовське наближення, то таке наближення називаємо чебишевським сплайном. Балансне наближення чебишевським сплайном є і оптимальним. Це означає, що коли границі на проміжку $[a, b]$ ланок

сплайну (вузли) вибрані з умови балансності, то ми одержуємо при заданій похибці μ найменшу можливу кількість ланок r , а при заданій кількості ланок – найменшу похибку. Якщо зафіксовано і найбільшу похибку і кількість ланок, то одержується найбільший можливий проміжок наближення [1,3].

Ефективність наближення може додатково збільшуватися, якщо допустити використання апроксимуючих виразів різної форми на різних ланках сплайну. У поширених обчислювальних системах балансні наближення сплайнами відсутні через необхідність виконувати для їх знаходження завеликий об'єм обчислень. Тим більше не використовуються балансні наближення із наближаючими виразами різного виду. Проте час обчислень може бути суттєво зменшений при використанні аналітичних перетворень на комп'ютері.

В основі зменшення часу обчислень при знаходженні балансних наближень лежить використання поняття ядра наближень. Добре відомо [1,3,6], що коли $f(x) \in C^{m+1}[a, b]$ та $f^{(m+1)}(x) \neq 0$ при $x \in [a, b]$, то максимальна похибка μ найкращого чебишевського наближення многочленом $P_m(x)$ степеня m на проміжку $[a, b]$ є

$$\mu = \frac{1}{2^{2m+1}(m+1)!} |f^{(m+1)}(\xi)| (b-a)^{m+1}, \quad (4)$$

де $\xi \in (a, b)$.

Логічно припустити, що за певних умов для довільного наближаючого виразу $F(A, x)$ справджується

$$\mu = \frac{1}{2^{2m+1}(m+1)!} |\eta(f(\xi), F)| (b-a)^{m+1}. \quad (5)$$

Якщо рівність (5) справедлива, то функцію $\eta(f, F) = \eta(f(x), F)$ називаємо ядром наближення функції $f(x)$ за допомогою виразу $F(A, x)$. У загальному випадку вираз для ядра наближень залежить від функції $f(x)$ та її $(m+1)$ похідних:

$$\eta(f, F) = \varphi(f(x), f'(x), \dots, f^{(m+1)}(x), F) \quad (6)$$

Теорема [1]. Нехай $f(x) \in C^{m+2}[a, b]$, $\eta(f, F) \in C^1[a, b]$, $w(x) \in C^1[a, b]$ і $\eta(f, F)/w(x) \neq 0$ при $x \in [a, b]$, то для $r \rightarrow \infty$ максимальна похибка μ балансного зваженого наближення чебишевським сплайном $S(F, x)$ із r ланками функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ становить

$$\mu = \frac{r^{-m-1}}{2^{2m+1}(m+1)!} \left(\int_a^b \eta(f, F)/w(x)^{\frac{1}{m+1}} dx \right)^{m+1} \left[1 + O\left(\frac{b-a}{r}\right) \right]. \quad (7)$$

Якщо у виразі (7) знехтувати величиною $O\left(\frac{b-a}{r}\right)$, то для визначення вузлів $z_i (i = \overline{0, r})$ матимемо рівняння

$$i \int_a^b \eta(f, F)/w(x)^{\frac{1}{m+1}} dx = r \int_a^{z_i} \eta(f, F)/w(x)^{\frac{1}{m+1}} dx, i = \overline{0, r}. \quad (8)$$

Для практичного використання формул (7) та (8) необхідно мати аналітичні вирази для ядер $\eta(f, F)$. Загальні властивості ядер і способи знаходження їх аналітичних виразів описані в [1,2]. У більшості випадків способи знаходження аналітичних виразів (6) доволі складні. Часто їх реалізація тільки за допомогою “ручки і паперу” практично неможлива. Частина з них реалізована у вигляді процедур у системі комп’ютерної алгебри Maple V Release 5 [4]. Деякі конкретні результати наведено у [2,7].

Із використанням співвідношень (7) та (8) побудовано методи знаходження балансних наближень, які реалізовано як процедури для системи Maple V Release 5. У процедурах спершу знаходять аналітичні вирази для ядер, а далі встановлюють числові значення вузлів сплайнів і параметрів наближень на кожній ланці сплайну. Деякі процедури передбачають знаходження на кожній ланці сплайну такого наближення, при якому досягається найменша похибка серед набору виразів із фіксованою кількістю параметрів.

Приклад. Для функції $f(x) = \Gamma(x)$ знайти оптимальне балансне наближення на проміжку $[1,3]$ із найбільшою абсолютною похибкою $\mu = .00119$. Множина наближаючих виразів – раціональні многочлени $R_{k,l}(x)$ із трьома параметрами ($m = k + l = 2$). Результати обчислень:

$$z_1 = 1.70395986, \mu_1 = .0011891,$$

$$x \rightarrow 1.709000233 \frac{1}{.2284254502 + (-2.939460194 + x)x},$$

$$z_2 = 2.422041577, \mu_2 = .0011888,$$

$$x \rightarrow 1.904625501 + (-1.335278026 + .4412700943x)x,$$

$$z_3 = 3.003122812, \mu_3 = .0011896,$$

$$x \rightarrow 15.40341426 \frac{1}{38.50661308 + (-13.26964749 + x)x}.$$

У цьому прикладі оптимальні k та l виявилися різними для різних підінтервалів. Це дивно, бо звичайно для $\Gamma(x)$ використовується раціональне наближення при $k=l$ [5]. Проте наближення тієї ж функції на тих же підінтервалах раціональним виразом $R_{l,l}(x)$ дає такі максимальні похибки $\mu_1 = .015051$, $\mu_2 = .0033367$, $\mu_3 = .0013161$. Результати виявляються гіршими на всіх підінтервалах. Найбільша різниця – у 12 разів.

1. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. Киев: Наук.думка, 1989. 272с. 2. Попов Б.О., Лаушник О.І. Знаходження оптимальної форми раціональних наближень// Відбір і обробка інформ. 1997. Вип.11(87). С.107-110. 3. Meinardus G. Some Results in Segmented Approximation// Comput. Math. Appl. 1997. Vol.33. №1/2. P.165-180. 4. Monagan M.B., Geddes K.O., Heal K.M. et al. Maple V. Programming Guide. N.Y.: Springer-Verlag. 1998. 390p. 5. Moshier S.L. Methods and Programs for Mathematical Functions. N.Y.: John Wiley. 1989. 418p. 6. Nurnberger G. Approximations by Spline Functions. N.Y.: Springer-Verlag. 1989. 416p. 7. Попов Б.А. A System for Function Approximation Properties Investigation //SIGSAM Bulletin. 1997. Vol.31. №3. P.29-30.

УДК 519.6:518

П.С. Сеньо

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ МЕТОДАМИ ІНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Аналіз статистичного матеріалу закінчено, коли істотні властивості генеральної сукупності записано аналітично. Зокрема, ця основна задача математичної статистики розв'язана повністю, коли відома функція розподілу, або густина генеральної сукупності. Практично, ці функції дослідник *підбирає* на основі аналізу вибірки - відомі критерії погодженості (Пірсона, Колмогорова, Смірнова тощо) лише з певним ступенем надійності обґрунтовують зроблений вибір; можемо лише *оцінити* значення невідомих параметрів розподілу та й це лише при умові, коли сам розподіл відомий.

Суть проблеми полягає в наступному. Потрібно побудувати таку криву, графік якої "найщільніше" пройшов би через множину

точок (x_i, n_i) ; побудована крива повинна бути *густиною*; крива повинна бути теоретично обґрунтованою; найбільш простою; рівняння кривої повинне містити найменше можливе число параметрів. Тут x_i - елементи частотної таблиці вибірки; n_i - вибіркові частоти. Така крива обґрунтовано вважається розподілом генеральної сукупності і може використовуватися як в практиці (наприклад, можна обчислити n_i і для x_i , яких і немає в таблиці; розв'язувати задачі інтерполяції, екстраполяції тощо) так і при теоретичних дослідженнях.

Криву, яка вирівнює точки (x_i, y_i) площини можна побудувати нескінченною кількістю способів (це різні криві!). Тому підбираємо таку криву, але лише з певної фіксованої множини кривих. Виходячи з теореми Вейерштраса, найчастіше підбирають параболу $y = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$. Однак цей шлях нам не підходить в зв'язку з тим, що для k точок така крива має степінь $k-1$, а в нас, як правило, k велике ($\approx 10 - 1000$); така парабола, як правило, не є густиною; похибки такої апроксимації великі.

Більшість розподілів випадкових змінних характеризуються такими властивостями:

1. значення таких змінних лежать в певних межах, тобто, ймовірності $P(\zeta < \zeta_{\min}) = P(\zeta > \zeta_{\max}) = 0$;

2. густина розподілу є унімодальною функцією - на проміжку $[\zeta_{\min}, a]$ вона зростає, в точці a досягає максимуму і далі на проміжку $[a, \zeta_{\max}]$ спадає;

3. на кінцях проміжка $[\zeta_{\min}, \zeta_{\max}]$ похідна від густини рівна нулю та й часто дотик графіка густини $p(x)$ до осі ОХ є вищого порядку.

К.Пірсон показав [3], що більшість розподілів ймовірностей є розв'язками такого диференціального рівняння

$$y' = y(x+a)/(b_0 + b_1x + b_2x^2). \quad (1)$$

До таких розподілів, зокрема, належать такі фундаментальні розподіли як рівномірний, експонентний, нормальний, гама розподіл, бета розподіли 1-го і другого роду; розподіли Пірсона, Стюдента, Фішера, Парето. Сюди ж належить і будь-який з розподілів, що отримується лінійним перетворенням випадкової змінної, що керується одним з перерахованих розподілів. Однак,

практичне застосування цієї методики нашою метою є на проблему визначення теоретичних моментів розподілу через статистичні моменти. Цю проблему пом'якшив Л.М.Большов за допомогою асимптотичних перетворень [1].

Нехай функція $y = p(x)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{d y}{d x} = y \frac{(x+a)}{f(x)}, \quad (2)$$

де $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ - деяка функція. Тоді розв'язок рівняння (2) є густиною, що задовольняє умови 1) - 3), якщо коефіцієнти розкладу $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ виражаються через теоретичні моменти розподілу

$$m_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i p(x) dx \text{ так:}$$

$$a m_n + n b_0 m_{n-1} + (n+1) b_1 m_n + (n+2) b_2 m_{n+1} + \dots = -m_{n+1}, \quad (3)$$

де $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

Якщо i -та похідна рівна нулю, або має двохстороннє обмеження, то тоді можна описати всі класи розподілів, які є узагальненнями кривих Пірсона. Зокрема, для цього достатньо, щоб існувало інтервальне розширення другої похідної функції $f(x)$. Очевидно, що інтервали - розв'язки природно звужуються з врахуванням властивостей густини. Моменти цих розподілів задовольняють наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} a m_0 + 0 f(0) + f'(0) m_0 + 2 \frac{1}{2!} [f''(x)] m_1 = -m_1, \\ a m_1 + f(0) m_0 + 2 f'(0) m_1 + 3 \frac{1}{2!} [f''(x)] m_2 = -m_2, \\ a m_2 + 2 f(0) m_1 + 3 f'(0) m_2 + 4 \frac{1}{2!} [f''(x)] m_3 = -m_3, \\ a m_3 + 3 f(0) m_2 + 4 f'(0) m_3 + 5 \frac{1}{2!} f''(x) m_4 = -m_4. \end{cases} \quad (4)$$

Це система рівнянь з інтервальними коефіцієнтами. Розв'язавши її, отримуємо інтервали для коефіцієнтів і межі, коли корені дійсні, кратні, комплексні. Так отримуємо інтервальні аналоги розподілів, які найкраще вирівнюють наявні вибіркові значення. Можливі випадки, коли отримані інтервали перетинаються. Це означає, що в зв'язку з різними збуреннями, вибіркові значення можна вирівнювати обома відповідними розподілами (вони, як правило, асимптотично еквівалентні).

Моменти в системі (4) теоретичні і тому нам невідомі. З вибірки ми можемо отримати всі потрібні статистичні моменти. Інтеграл, якими є теоретичні моменти, оцінюємо інтервально за

типовою методикою. Розбивши проміжок інтегрування в цих інтегралах вибірковими значеннями з частотної таблиці отримуємо інтервальні оцінки теоретичних моментів через статистичні. В результаті в системі (4) і величини $m_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ також є відомими інтервалами.

Частотна таблиця *групує* експериментальні дані з неперервної генеральної сукупності. Моменти цього "групового" розподілу відрізняються від моментів неперервного розподілу [2]. Інтервальний варіант поправок Шеппарда отримуємо реалізуючи інтервальну оцінку правої частини рівності

$$\int_{y_i - \frac{h}{2}}^{y_i + \frac{h}{2}} x^k p(x) dx = h(y_i^k p(y_i)) + h^3 \frac{1}{2 \cdot 2!} (y_i^k p(y_i))' + \dots + h^{2j-1} \frac{1}{2^{j-1} (2j-2)!} (y_i^k p(y_i))^{(2j-2)},$$

де y_i – середини інтервалів таблиці; h – крок таблиці.

1. Больше в Л. Н., Асимптотически пирсоновские преобразования, Теория вкроятностей и ее применения, том УІІІ, вып. 2, 1963, с.129-155. 2. Крамер Г., Математические методы статистики., Мир., М., 1975. 3. Романовский В., Математическая статистика., ГОНТИ НКТП СССР, 1938.

УДК 519.689

Д.О. Тарасов

ЗАСОБИ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЦІЛІСНОСТІ ДАНИХ НА ОСНОВІ ПРОМИСЛОВИХ СТАНДАРТІВ

Різнопланові інформаційні системи на базі реляційних СУБД широко використовуються для автоматизації обліку, опрацювання та аналізу інформації. Метою роботи таких систем є спрощення процесів прийняття рішень за рахунок використання інформації з БД. Однак рішення має ґрунтуватися на несуперечливій інформації. Таким чином, для забезпечення результативності дії інформаційної системи СУБД повинна забезпечувати цілісність даних у БД. Різні СУБД використовували власні засоби для забезпечення цілісності даних. Їх засоби розвивались відповідно до специфіки застосування, забезпечення сумісності версій та політики фірми виробника.

Упродовж останніх років гостро стало питання інтеграції та обміну даними між інформаційними системами. Ця обставина та швидкий розвиток СУБД і прикладних програм зумовлює необхідність використання узагальнених стандартів. Їх складовою частиною є засоби опису реляційної моделі, правил функціонування інформаційної системи та правил цілісності даних.

Переважає більшість сучасних реляційних СУБД та інструментальні засоби розробки наділені засобами використання мови SQL для роботи з традиційними реляційними БД.

Сучасний стандарт мови SQL - SQL 92, прийнятий у 1992 році Міжнародною Асоціацією по Стандартах (ISO) та Американським Інститутом по Національних Стандартах (ANSI), розроблено на базі SQL 89, SQL 86 та розробленої у 1970 році співробітниками компанії IBM мови SQL.

Наявні на ринку СУБД мають різний рівень сумісності зі стандартом, тому для перевірки відповідності конкретної реалізації мови SQL стандарту використовують рівні відповідності (Full 92, Intermed 92, Entry 92, SQL 89, SQL 86 - перелічені по спаданню відповідності до SQL 92). Існують СУБД, які, при належній якості проектування БД та процедур опрацювання даних, дозволяють не застосовуючи деякі елементи SQL 92 (наприклад тимчасові таблиці) забезпечувати належний рівень цілісності даних. Це свідчить про певну надлишковість стандарту, орієнтовану на старі версії. Як недолік SQL можна навести недостатнє забезпечення цілісності переходу між станами та операцій над доменами.

Розглянемо декларативні засоби збереження цілісності стану БД у стандарті SQL 92. Для цього наведемо основні види порушень цілісності даних у реляційних структурах. До основних можна віднести порушення:

1. функціональних залежностей;
2. обмежень на значення атрибутів та домени;
3. обмежень на значення в межах відношення;
4. обмежень на інформацію у БД.

Обмеження, перелічені у пунктах 3)-4), переважно зумовлені правилами функціонування конкретної системи та не пов'язані безпосередньо з моделлю БД.

Для огляду можливостей SQL 92 наведемо приклад реалізації найбільш вживаних обмежень – на значення атрибутів та домени і на значення в межах відношення.

Приклад 1. Для визначення атрибута *customer_num* первинним ключем відношення *customer* (у складі команди визначення

відношення) мовою SQL (у стандарті SQL92) використовуються наступні команди:

```
CREATE DOMAIN dm_name AS CHAR(30);  
CREATE TABLE customer (customer_num NUMBER(10)  
    CONSTRAINT Customer_pkey_constraint PRIMARY KEY,  
    fname dm_name, lname dm_name CONSTRAINT  
    LName_notnull_constraint NOT NULL);
```

Перша команда описує домен *dm_id* та *dm_name*. Друга створює відношення *customer(customer_num, fname, lname)* з обмеженням - значення атрибута *lname* повинно бути визначено. Назви обмежень записуються після параметра CONSTRAINT.

Приклад 2. Для створення іменованих користувачем обмежень цілісності (точніше цілісності стану БД) використовується команда:

```
CREATE ASSERTION ім'я_обмеж CHECK (предикат)  
[умови_перевірки];
```

Параметр *ім'я_обмеж* задає назву, за якою можна визначити, що відбулася спроба порушення правила цілісності стану БД заданого параметром *предикат*. Необов'язковий параметр *умови_перевірки* визначає вид перевірки обмеження (відкладена, безпосередня).

Незважаючи на чітку розробку декларативної цілісності SQL 92 допускає потенційні ситуації порушення цілісності. Це стосується роботи з курсорами, ізоляції транзакцій.

Поширеність та значні можливості SQL дозволили використати його як прототип стандартів мов у таких проблемно-орієнтованих областях, як часові та об'єктно-орієнтовані БД.

1. Мартин Грабер. Справочное руководство по SQL. "ЛОРИ", 1997. 2. Стивен Бобровски. Oracle7 и вычисления клиент/сервер. "ЛОРИ", 1995. 3. С. Уинкуп. Microsoft SQL Server 6.5 в подлиннике: пер. с англ. - СПб.: BHV - Санкт-Петербург, 1998. - 896 с. 4. Date C.J. An Introduction to Database Systems. - Addison-Wesley Longman, Inc., 1995. 5. The Informix Guide to SQL. Informix Software, Inc. 1991.

УДК 519.8

І.П. Твердохліб, Г.Г. Цегелик

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ СТАБІЛІЗОВАНОЇ ФУНКЦІЇ СПОЖИВАННЯ

В [1] розглядалась оптимізаційна задача апроксимації функції споживання довільної ринкової економічної системи з

використанням так званої майже ідеальної моделі споживання або AIDS – моделі [2]. Потрібно було знайти таку невідому симетричну матрицю інциденції $X: E^n \rightarrow E^n$ функції споживання ринкової економічної системи, щоб

$$\min_{\{\vec{\alpha}, \eta\}} (SpX + \langle \vec{b}, X\vec{b} \rangle) \rightarrow ? \quad (1)$$

при умовах

$$\vec{w} = \vec{\alpha} + X\vec{a} + c\vec{\beta} \quad (2)$$

та обмеженнях

$$\begin{cases} \langle \vec{\alpha}, \vec{a} \rangle + 0.5 \langle \vec{a}, X\vec{a} \rangle = k, X\vec{e} = 0, X = X^*; \\ \langle \vec{\alpha}, \vec{e} \rangle = 1, \langle \vec{\beta}, \vec{e} \rangle = 0, \vec{e} = (1, 1, \dots, 1)^T \in E^n, \end{cases} \quad (3)$$

де вектор-параметри $\vec{w}$ та $\vec{\beta} \in E^n$ є фіксованими разом із константами c та $k \in R^1$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - означає звичайний скалярний добуток в евклідовому просторі $E^n := (R^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $\vec{b} \in E^n$ є апіорі заданим і характеризує пріоритетний вплив на ціновий вектор економічної системи, SpX - слід матриці X , n - кількість продуктів чи груп продуктів, що споживається у конкретній економічній системі. Розв'язком задачі (1)-(3) буде функція споживання у формі матриці інциденцій, яка має стабілізаційні властивості і забезпечує заданий рівень споживання k в системі. Розв'язування задачі (1)-(3) стандартними методами, як правило, виявляє відсутність розв'язку через необмеженість знизу цільової функції (1). Проведений в [1] аналіз цієї моделі дозволив явно ввести у модель приховані параметри $\{\eta\}$, роль яких виконує набір власних векторів $\{\vec{\xi}_j \in E^n : j = \overline{1, n-1}\}$ матриці X . Тоді задача (1)-(3) зводиться до такої задачі: знайти

$$\min_{\{\vec{\xi}, \vec{\xi}_j\}} \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \frac{\langle \vec{\xi}, \vec{\xi}_j \rangle}{\langle \vec{\xi}_j, \vec{a} \rangle} \left[1 + \langle \vec{b}, \vec{\xi}_j \rangle^2 \right] \right\} \quad (4)$$

при умові

$$X\vec{a} = \vec{\xi} \quad (5)$$

та обмеженнях

$$\begin{cases} \langle \vec{\xi}, \vec{a} \rangle + \bar{k} = 0, \langle \vec{\xi}, \vec{e} \rangle = 0, X\vec{e} = 0, \bar{k} := 2k + 2 \langle c\vec{\beta} - \vec{w}, \vec{a} \rangle; \\ \langle \vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j \rangle = \delta_{ij} \left(i, j = \overline{1, n-1} \right), \langle \vec{\xi}_j, \vec{e} \rangle = 0 \left(j = \overline{1, n-1} \right), \vec{\xi} := \vec{w} - \vec{\alpha} - c\vec{\beta}. \end{cases} \quad (6)$$

Встановлено [1], що для існування розв'язку задачі (4)-(6) вектори $\tilde{\xi}_j (j = \overline{1, n-1})$ повинні задовольняти таким умовам для $n \geq 4$

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_j = \sum_{i=1}^{n-1} (A^{-1})_{ji} \tilde{e}_i = \sum_{i=1}^{n-1} A_{ij}^* \tilde{e}_i \\ A_{n-1,j} = 1/\sqrt{n-1} \quad \forall j = \overline{1, n-1}, \end{cases} \quad (7)$$

де $\tilde{e}_i \in E_*^{n-1}$ - довільна ортонормована база векторів простору E_*^{n-1} , що є ортогональним до вектора $\tilde{e} \in E^n$, а A_{ij} - елементи будь-якої ортогональної матриці $A \in \text{Hom}(E_*^{n-1})$

Пропонується такий метод знаходження розв'язку задачі (4)-(6) з використанням співвідношень (7).

На першому етапі необхідно знайти ортонормовану базу векторів $\tilde{e}_i$ простору $E_*^{n-1} (i = \overline{1, n-1})$. Формування бази простору E_*^{n-1} здійснюємо послідовно в два кроки. Враховуючи довільність системи векторів $\{\tilde{e}_i : i = \overline{1, n-1}\}$, спочатку побудуємо ортогональну систему векторів $\{\tilde{\varphi}_j \in E_*^{n-1} : j = \overline{1, n-1}\}$ з умов

$$\begin{cases} \langle \tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_j \rangle = \delta_{ij} & (i, j = \overline{1, n-1}) \\ \langle \tilde{\varphi}_j, \tilde{e} \rangle = 0 & (j = \overline{1, n-1}) \end{cases} \quad (8)$$

Система (8) не розв'язується для загального випадку, а використовується для послідовного визначення компонентів векторів $\tilde{\varphi}_j$, починаючи з $j=1$. При цьому для визначення $\tilde{\varphi}_j$ використовуються лише друга умова (8) та перша умова (8) для $1 \leq i \leq j-1$. Так, $\tilde{\varphi}_1$ визначається лише з умови $\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{e} \rangle = 0$, вектор $\tilde{\varphi}_2$ - з умов $\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle = 0$ і $\langle \tilde{\varphi}_2, \tilde{e} \rangle = 0$ і т.д. В загальному випадку отримуємо систему взаємноортогональних векторів $\tilde{\varphi}_j \in E_*^{n-1} (j = \overline{1, n-1})$, де k -та координата вектора $\tilde{\varphi}_{jk}$ дорівнює 1 при $1 \leq k \leq j$, (-j) при $k = j+1$ і нулю при $j+1 < k \leq n-1$. Зауважимо, що для виконання другої умови системи (8), потрібна n -та координата вектора $\tilde{\varphi}_j$. Вважаємо, що для $j = \overline{1, n-2}$ $\varphi_{jn} = 0$, а $\varphi_{n-1,n} = -(n-1)$. На другому кроці отримана система векторів $\tilde{\varphi}_j$ нормується. В результаті отримуємо таку систему векторів $\{\tilde{e}_j \in E_*^{n-1} : j = \overline{1, n-1}\}$, яка є ортонормованою базою простору E_*^{n-1} і координати яких обчислюються за формулами

$$e_{jk} = \begin{cases} 1/\sqrt{j(j+1)} & \text{при } 1 \leq k \leq j; \\ -\sqrt{j/(j+1)} & \text{при } k = j+1; \\ 0 & \text{при } j+1 < k \leq n-1. \end{cases} \quad (9)$$

На другому етапі необхідно знайти будь-яку ортогональну матрицю $A \in \text{Hom}(E_*^{n-1})$. Розглядаємо рядки матриці A як $(n-1)$ -вимірні вектори $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_{n-1}$ і з умови ортогональності $A \cdot A^* = 1$ робимо висновок, що система векторів $\{\bar{A}_j, j = \overline{1, n-1}\}$ є ортонормованою. Враховуючи, що на основі (8) $\bar{A}_{n-1} = (1/\sqrt{n-1}, \dots, 1/\sqrt{n-1})$, можна визначити для $j = \overline{1, n-2}$ елементи матриці A за формулами (9). Роль вектора $\bar{e}$ в цьому випадку відіграє вектор $\bar{A}_{n-1}$. Отже, одержали таку матрицю A^* /див. (10)/.

На третьому етапі обчислюємо координати векторів $\bar{\xi}_j$ за формулами (8) з використанням (9). В загальному випадку для $j = \overline{1, n-1}$ маємо /див. співвідношення (11) /. Зауважимо, що за формулами (11) обчислюються

$$A^* = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} & \dots & 1/\sqrt{j(j+1)} & \dots & 1/\sqrt{(n-2)(n-1)} & 1/\sqrt{n-1} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} & \dots & 1/\sqrt{j(j+1)} & \dots & 1/\sqrt{(n-2)(n-1)} & 1/\sqrt{n-1} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} & \dots & 1/\sqrt{j(j+1)} & \dots & 1/\sqrt{(n-2)(n-1)} & 1/\sqrt{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/\sqrt{j(j+1)} & \dots & 1/\sqrt{(n-2)(n-1)} & 1/\sqrt{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\sqrt{j/(j+1)} & \dots & 1/\sqrt{(n-2)(n-1)} & 1/\sqrt{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1/\sqrt{(n-2)(n-1)} & 1/\sqrt{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -\sqrt{(n-2)/(n-1)} & 1/\sqrt{n-1} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\bar{\xi}_j = \begin{cases} 1/\sqrt{j(j+1)} \left[\sum_{i=1}^j \bar{e}_i - j\bar{e}_{j+1} \right] & (j = \overline{1, n-2}) \\ \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} \bar{e}_i & (j = n-1). \end{cases} \quad (11)$$

перші $(n-1)$ -а координати векторів $\{\vec{\xi}_j \in E^n : j = \overline{1, n-1}\}$. Останню координату ξ_{jn} цих векторів можна знайти з умови $\langle \vec{\xi}_j, \vec{e} \rangle = 0$, з якої отримуємо

$$\xi_{jn} = 0 \quad (j = \overline{1, n-2}), \quad \xi_{n-2,n} = -\sqrt{(n-2)/n}, \quad \xi_{n-1,n} = -1/\sqrt{n}. \quad (12)$$

На четвертому етапі знаходимо розв'язок оптимізаційної задачі (4)-(6) з використанням системи векторів $\{\vec{\xi}_j \in E^n : j = \overline{1, n-1}\}$. Розв'язком цієї задачі буде така матриця інцидентій X функції споживання, яка забезпечує мінімум функціонала (1) при заданому рівні споживання k і яка має стабілізаційні властивості.

При обґрунтуванні запропонованого методу розв'язування задачі (1)-(3) суттєво використовувалась властивість довільності ортонормованої бази векторів $\vec{e}_j$ та матриці A із співвідношення (7). Тобто і система векторів $\vec{e}_j$, і матриця A є одними із можливих. Питання вибору їх із множини допустимих за деякими критеріями, а також вплив такого вибору на ефективність обчислювального процесу ще вимагає додаткового дослідження.

1. Твердохліб І. Математичний аналіз моделі пріоритетного споживання.//В кн.: Економетричні методи і моделі в економіці: теорія і практика./Зб. матер. першої Всеукраїнської економетричної конференції, 2-4 лютого 1998р./ Ч. 4. – Львів, 1998, С.62-65. 2. A. S. Deaton and J. Muellbauer. An Almost Ideal Demand System.//Amer. Econ. Rev. June 1980, Vol. 70. P. 312-326.

УДК 519.68

М.І. Філяк, Г.Г. Цегелик

ЕФЕКТИВНІСТЬ МЕТОДІВ ПОСЛІДОВНОГО ПЕРЕГЛЯДУ І БЛОЧНОГО ПОШУКУ ДЛЯ РІЗНИХ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ ЗВЕРТАННЯ ДО ЗАПИСІВ

В роботі досліджується ефективність методів послідовного перегляду і блочного пошуку записів в послідовних файлах для різних законів розподілу ймовірностей звертання до записів: рівномірного і "бінарного", закону Зіпфа, розподілу, який

наближено задовольняє правилу "80-20" та ін. За критерій ефективності приймається математичне сподівання числа порівнянь, необхідних для пошуку запису в файлі. Деякі часткові результати таких досліджень наведені в [1,2].

Розглянемо послідовний файл, який містить N записів. Нехай p_i - ймовірність звертання до i -го запису файла, E - математичне сподівання числа порівнянь, необхідних для пошуку запису в файлі.

1. Метод послідовного перегляду. Для цього методу

$$E = \sum_{i=1}^N i p_i.$$

У випадку рівномірного розподілу ймовірностей звертання до записів $E = \frac{1}{2}(N+1)$.

Якщо ймовірності звертання до записів розподілені за "бінарним" законом [3], то

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{i}{2^i} + \frac{N}{2^N}.$$

Методом математичної індукції можна довести, що

$$E_m = \frac{1}{2} E_{m-1} + 1 \quad (m = 3, 4, \dots),$$

де

$$E_m = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{i}{2^i} + \frac{m}{2^{m-1}}.$$

Використовуючи цю рекурентну формулу, легко встановити, що

$$E = 2 - \frac{2}{2^N}.$$

Припустимо, що ймовірності звертання до записів задовольняють закон Зіпфа [3]. Тоді для E одержуємо такий вираз:

$$E = \frac{N}{C + \ln N + \gamma_N},$$

де $C = 0,577 \dots$ - ейлерова стала, γ_N - деяка нескінченно мала величина.

Якщо ймовірності звертання до записів задовольняють узагальнений закон розподілу [3], то $E = H_N^{(c-1)} / H_N^c$, де $0 < c < 1$,

$$H_N^{(s)} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^s}.$$

Використовуючи апроксимації [3]

$$H_n^{(c)} = \frac{1}{1-c} n^{1-c} - C^{(c)} + \gamma_n^{(c)},$$

$$H_n^{(c-1)} = \frac{1}{2-c} n^{2-c} + \alpha^{(c)}(n),$$

де $C^{(c)}$ - деякі постійні, $\gamma_n^{(c)}$ - деякі нескінченно малі величини, $\alpha^{(c)}(n)$ - повільно зростаюча функція (для обчислення якої складені таблиці), одержуємо

$$E = \frac{\frac{1}{2-c} N^{2-c} + \alpha^{(c)}(N)}{\frac{1}{1-c} N^{1-c} - C^{(c)} + \gamma_N^{(c)}}.$$

2. Метод блочного пошуку. Для цього методу

$$E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (i+j) p_{(i-1)m+j},$$

де n - число блоків, на які розбитий файл, m - розмір блоків.

Якщо розподіл ймовірностей звертання до записів є рівномірним, то

$$E = \frac{1}{2} \left(n + \frac{N}{n} \right) + 1.$$

Функція E досягає мінімуму $\sqrt{N} + 1$ при $n = m = \sqrt{N}$.

Нехай ймовірності звертання до записів задовольняють "бінарний" розподіл. Тоді аналогічно як в [3] з точністю до нескінченно малої величини одержуємо

$$E = \frac{2^m}{2^m - 1} \left(3 - \frac{m+2}{2^m} \right).$$

Для знаходження значення параметра m , при якому функція E досягає мінімуму, дістаємо рівняння

$$2^m ((m-1) \ln 2 - 1) + 1 = 0.$$

Припустимо, що ймовірності звертання до записів задовольняють закон Зіпфа. Тоді аналогічно як в [3] з достатньо високою точністю для E маємо вираз

$$E = \frac{1}{H_N} \left(N + H_N - \left(\frac{N}{n} - 1 \right) \left(n - \frac{1}{2} \ln n - C_1 \right) \right),$$

де $C_1 = \frac{1}{2} \ln 2\pi$, $H_N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i}$. Функція E досягає мінімуму при $n = n_0$,

де n_0 - додатний корінь рівняння

$$2n^2 - n = N(\ln n + 2C_1 - 1).$$

Якщо ймовірності звертання до записів задовольняють узагальнений закон розподілу, то аналогічно як в [3] з достатньо високою точністю

$$E = \frac{1}{H_N^{(c)}} \left(H_N^{(c-1)} + H_N^{(c)} + \left(\frac{N}{n} - 1 \right) \frac{N^{1-c}}{1-c} \left(\frac{c-1}{2-c} n + \frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}} \right) \right).$$

Для наближеного обчислення значення параметра n , при якому E досягає мінімуму, одержуємо рівняння

$$\begin{aligned} n^{3-c} + \frac{2-c}{1-c} \left((N-n) \left(\alpha^{(c)}(n+1) - \alpha^{(c)}(n) \right) + (1-c) \alpha^{(c)}(n) \right) n = \\ = \frac{(2-c)^2}{1-c} N \alpha^{(c)}(n). \end{aligned}$$

1. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 3. Сортировка и поиск. - М.: Мир, 1978. - 844 с. 2. Мартин Дж. Организация баз данных в вычислительных системах. - М.: Мир, 1980. - 644 с. 3. Цегелик Г. Г. Системы распределенных баз данных. - Львов: Світ, 1990. - 168 с.

УДК 519.62

Р.С. Хапко

ПРО МЕТОДИ РОТЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДРУГОЇ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО РІВНЯННЯ

Наближене розв'язування початково-крайових задач для телеграфного рівняння має важливе значення для прикладних наук і технологій. Серед різних способів чисельного розв'язування таких задач відповідне місце посідає підхід, що ґрунтується на частковій дискретизації вихідної задачі методом Роте по часу і подальшому використанні *граничних* інтегральних рівнянь (див., наприклад, [2, 3, 5]). Ми розглядаємо застосування цього методу для чисельного розв'язування другої зовнішньої початково-крайової задачі для телеграфного рівняння. Подібні задачі виникають, наприклад, при

модельованні процесу поширення акустичних хвиль, відбитих акустично жорстким тілом, в однорідному ізотропному середовищі з коефіцієнтом затухання відмінним від нуля.

1. Метод Роте. Нехай $D \subset \mathbb{R}^2$ необмежена область така, що її доповнення є обмеженим і однозв'язним з границею $\Gamma \in C^3$ і нехай $T > 0$ – задана константа. Необхідно знайти обмежену, двічі неперервно-диференційовану функцію $u(x, t)$, що задовольняє телеграфне рівняння

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{в } D \times (0, T] \quad (1)$$

з коефіцієнтами $a > 0$ і $b > 0$, однорідні початкові умови

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{в } D \quad (2)$$

і граничні умови

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = F \quad \text{на } \Gamma \times [0, T], \quad (3)$$

де ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ і F – задана функція, для якої виконується умова погодженості. Відомо [1], що при належній гладкості функції F поставлена задача має єдиний розв'язок.

На рівномірному розбитті часового інтервалу $[0, T]$

$$\left\{ t_i = ih, i = -2, -1, \dots, N_t - 2, h = \frac{T}{N_t - 2}, N_t > 2 \right\} \quad (4)$$

апроксимуємо похідні по часовій змінній в задачі (1)–(3) за допомогою таких скінченних різниць

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_i) \approx \frac{u(x, t_i) - u(x, t_{i-1})}{h}, \quad i = -1, \dots, N_t - 2, \text{ і}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t_i) \approx \frac{u(x, t_i) - 2u(x, t_{i-1}) + u(x, t_{i-2}))}{h^2}, \quad i = 0, \dots, N_t - 2.$$

В результаті нестационарна задача (1)–(3) трансформується на розбитті (4) в таку послідовність стаціонарних задач

$$\Delta U_n - \gamma^2 U_n = \alpha_0 U_{n-1} + \alpha_1 U_{n-2} \quad \text{в } D, \quad (5)$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial \nu} = F_n \quad \text{на } \Gamma, \quad (6)$$

$$U_n(x) = O(1), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (7)$$

для $n = 0, \dots, N_t - 2$ з

$$U_n(x) \approx u(x, t_n), \quad F_n(x) := F(x, t_n), \quad \gamma^2 := \frac{1}{a^2 h^2} + \frac{b}{h},$$

$$\alpha_0 := -\frac{2}{a^2 h^2} - \frac{b}{h} \quad \text{і} \quad \alpha_1 := \frac{1}{a^2 h^2}.$$

Отже, за допомогою методу Роте ми отримали рекурентну послідовність задач Неймана для визначення $U_n \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ з початковими значеннями $U_{-2} = 0$ і $U_{-1} = 0$. Методом індукції можна довести наступний результат про єдиність.

Теорема 1. Система (5)-(7) має найбільше один розв'язок.

2. Граничні інтегральні рівняння. Безпосереднє застосування прямого або непрямого варіанта методу інтегральних рівнянь до послідовності задач (5)-(7) призводить до необхідності обчислення подвійних інтегралів по необмеженій області D , що створює значні проблеми при наближеному розв'язуванні. У зв'язку з цим побудуємо інші інтегральні представлення для розв'язків рівнянь (5).

Нехай $K_0(z)$ і $K_1(z)$ – функції Макдональда, $v_n(z)$ і $w_n(z)$ – послідовність поліномів

$$v_n(z) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{n,2k} z^{2k}, \quad w_n(z) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} a_{n,2k+1} z^{2k+1},$$

коефіцієнти яких визначаються за рекурентними формулами

$$a_{n,0} = 1, \quad n = 0, 1, \dots, N_l - 2, \quad a_{n,n} = -\frac{\alpha_1}{2\gamma n} a_{n-1,n-1},$$

$$a_{n,k} = \frac{1}{2\gamma k} \left\{ 4 \left[\frac{k+1}{2} \right]^2 a_{n,k+1} - \alpha_0 a_{n-1,k-1} - \alpha_1 a_{n-2,k-1} \right\}$$

для $k = n-1, \dots, 1$ і $n = 1, \dots, N_l - 2$. Справедливе твердження

Теорема 2. Функції

$$\Phi_n(x, y) := K_0(\gamma|x-y|)v_n(|x-y|) + K_1(\gamma|x-y|)w_n(|x-y|) \quad x \neq y,$$

задовольняють рівняння (5) відносно x в $\mathbf{R}^2 \setminus \{y\}$ для $n = 0, \dots, N_l - 2$ і мають логарифмічну особливість при $x \rightarrow y$.

Введемо за допомогою функцій Φ_n потенціали простого та подвійного шару

$$U_n(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^n \int_{\Gamma} q_m(y) \Phi_{n-m}(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma \quad \text{і} \quad (8)$$

$$V_n(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^n \int_{\Gamma} q_m(y) \frac{\partial}{\partial v(y)} \Phi_{n-m}(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (9)$$

відповідно, з неперервними густинами $q_n(x)$. Враховуючи асимптотичну поведінку функцій Макдональда: $K_0(z) \sim \ln \frac{1}{z}$ і

$K_1(z) \sim \frac{1}{z}$ при $z \rightarrow 0$, отримаємо, що потенціали (8) і (9) мають на

границі Γ властивості класичних логарифмічних потенціалів. Зокрема, як і у випадку інших диференціальних рівнянь, нормальна похідна потенціалу подвійного шару в нашому випадку має таке представлення

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^n \frac{\partial}{\partial v(x)} \int_{\Gamma} q_m(y) \frac{\partial}{\partial v(y)} \Phi_{n-m}(x, y) ds(y) = \\ & = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^n \frac{\partial}{\partial \theta(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial q_m}{\partial \theta}(y) \Phi_{n-m}(x, y) ds(y) - v(x) \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^n \int_{\Gamma} v(y) q_m(y) \times \\ & \quad \times [\gamma^2 \Phi_{n-m}(x, y) + \alpha_0 \Phi_{n-m-1}(x, y) + \alpha_1 \Phi_{n-m-2}(x, y)] ds(y), \end{aligned}$$

де $x \in \Gamma$, $\theta(x)$ – одиничний вектор дотичної до кривої Γ і $\Phi_{-2}(x, y) = \Phi_{-1}(x, y) = 0$. Отже, ми можемо звести послідовність задач (5)–(7) до відповідних граничних інтегральних рівнянь.

Теорема 3. *Потенціал простого шару U_n є розв'язком системи задач (5)–(7), якщо його густини задовольняють систему інтегральних рівнянь другого роду*

$$q_n(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} q_n(y) \frac{\partial}{\partial v(x)} \Phi_0(x, y) ds(y) = Q_n(x), \quad x \in \Gamma \quad (10)$$

з правими частинами

$$Q_n(x) := F_n(x) - \sum_{m=0}^{n-1} q_m(x) + \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\Gamma} q_m(y) \frac{\partial}{\partial v(x)} \Phi_{n-m}(x, y) ds(y)$$

для $n = 0, \dots, N_l - 2$. Потенціал подвійного шару V_n є розв'язком системи задач (5)–(7), якщо його густини задовольняють систему гіперсингулярних рівнянь першого роду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \theta(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial q_n}{\partial \theta}(y) \Phi_0(x, y) ds(y) - \\ & - \frac{\gamma^2}{\pi} v(x) \int_{\Gamma} v(y) q_n(y) \Phi_0(x, y) ds(y) = G_n(x), \end{aligned} \quad (11)$$

де $x \in \Gamma$

$$\begin{aligned} G_n(x) := & F_n(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial q_m}{\partial \theta}(y) \Phi_{n-m}(x, y) ds(y) + \\ & + v(x) \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\Gamma} v(y) q_m(y) [\gamma^2 \Phi_{n-m}(x, y) + \\ & + \alpha_0 \Phi_{n-m-1}(x, y) + \alpha_1 \Phi_{n-m-2}(x, y)] ds(y). \end{aligned}$$

За допомогою теорії Рісса–Шаудера можна довести коректність отриманих інтегральних рівнянь у відповідних функціональних просторах. Зокрема, у випадку банахових просторів справедливим є твердження

Теорема 4. Для кожних $F_n \in C(\Gamma)$ існує єдиний розв'язок системи (10) $q_n \in C(\Gamma)$. Для кожних F_n з простору Гельдера $C^{0,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$ існує єдиний розв'язок системи (11) q_n в $C^{1,\alpha}(\Gamma)$.

Комбінуючи теорему 1 і теорему 4, отримаємо наступний результат про існування і єдиність розв'язків наших диференціальних задач.

Теорема 5. Система (5)–(7) має єдиний розв'язок.

3. Повна дискретизація. Коротко опишемо процедуру наближеного розв'язування системи інтегральних рівнянь першого роду (11). Нехай крива Γ має параметричне представлення

$$\Gamma := \{x(s) = (x_1(s), x_2(s)) \mid 0 \leq s \leq 2\pi\},$$

де $x: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ є тричі неперервно диференційованою 2π –періодичною функцією з $|x'(s)| > 0$ для всіх s . З врахуванням цього і після виділення особливостей система (11) зводиться до такого параметричного вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \cot \frac{\sigma-s}{2} \psi'_n(\sigma) - \left[H_0^1(s, \sigma) \ln \left(4 \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + H_0^2(s, \sigma) \right] \psi_n(\sigma) \right\} d\sigma = G_n(s) \end{aligned} \quad (12)$$

з правими частинами

$$\begin{aligned} G_n(s) = & g_n(s) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \varphi_m(\sigma) \times \\ & \times \left[H_{n-m}^1(s, \sigma) \ln \left(4 \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} \right) + H_{n-m}^2(s, \sigma) \right] d\sigma, \end{aligned} \quad (13)$$

де $0 \leq s \leq 2\pi$, $n = 0, \dots, N_t - 2$, $\varphi_n(s) := q_n(x(s))$, $g_n(s) := F_n(x(s))|x'(s)|$ і $\psi_n(s) := \sum_{m=0}^n \varphi_m(s)$ і ядра H_n^0 H_n^1 є тричі неперервно диференційованими функціями обох аргументів.

Для чисельного розв'язування системи (12) скористаємось методом квадратур, що ґрунтується на тригонометричній інтерполяції [4, 6]. З цією метою на розбитті

$\left\{s_j := \frac{j\pi}{M}, j = 0, 1, \dots, 2M-1\right\}$ розглянемо три квадратурні формули

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) d\sigma \approx \frac{1}{2M} \sum_{j=0}^{2M-1} f(s_j),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(\sigma) \cot \frac{\sigma - s_k}{2} d\sigma \approx \sum_{j=0}^{2M-1} T_{|j-k|} f(s_j) \text{ і}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \ln \left(4 \sin^2 \frac{s_k - \sigma}{2} \right) d\sigma \approx \sum_{j=0}^{2M-1} R_{|j-k|} f(s_j),$$

де R_j і T_j – відомі коефіцієнти [4, 6]. Ці формули отримані шляхом заміни підінтегральної функції f її тригонометричним інтерполяційним многочленом і подальшого точного інтегрування. Застосовуючи виписані квадратурні правила до відповідних інтегралів у (12) та (13) і розглядаючи отримані апроксимаційні рівняння в точках колокації s_k , приходимо до послідовності систем рівнянь

$$\sum_{j=0}^{2M-1} \psi_{n,M}(s_j) \left\{ T_{|j-k|} + R_{|j-k|} H_0^1(s_k, s_j) + \frac{1}{2M} H_0^2(s_k, s_j) \right\} = G_{n,M}(s_k)$$

для $k = 0, \dots, 2M-1$ і $n = 0, \dots, N_t - 2$ з правими частинами

$$G_{n,M}(s_k) = g_n(s_k) - \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2M-1} \left[R_{|j-k|} H_{n-m}^1(s_k, s_j) + \frac{1}{2M} H_{n-m}^2(s_k, s_j) \right] \varphi_{n,M}(s_j)$$

Аналіз збіжності та похибки цього методу базується на його інтерпретації як повністю дискретного проекційного методу в просторах Гельдера [4, 6].

Проведені чисельні експерименти для нестационарних задач у випадку аналітичних граничних кривих та граничних функцій підтверджують очікувану лінійну збіжність пропонованого методу стосовно часової дискретизації та експоненціальну збіжність відносно дискретизації інтегральних рівнянь.

1. Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: Издательство технико-теоретической литературы, 1953. 2. Пасічник Р. М., Хапко Р. С. Поєднання методів сіток та інтегральних рівнянь при розв'язуванні задач типу Діріхле для хвильового рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип. 41. С. 94–98. 3. Хапко Р. С., Чубей О. В. Численное решение краевых задач для телеграфного уравнения методом гиперплоскостей и интегральных уравнений. Львов. ун-т, Львов, 1991. – 8 с. Деп. в УкрНИИНТИ 04.06.91. № 815–Ук. 4. Chapko R., Kress R. On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind // In: R.P. Agarwal, Ed., Contributions in Numerical Mathematics (World Scientific, Singapore, 1993). P. 127–140. 5. Chapko R., Kress R. Rothe's method for heat equation and boundary integral equations // J. Integ. Equat. and Appl. 9. 1997. P. 47–69. 6. Kress R. On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory // J. Comput. Appl. Math. 61. 1995. P. 345–360.

УДК 517.51

Г.Г. Цегелик, Н.В. Федчишин

АПАРАТ НЕКЛАСИЧНИХ МАЖОРАНТ І ДІАГРАМ НЬЮТОНА ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ, ЗАДАНИХ ТАБЛИЧНО

Теорія неklasичних мажорант і діаграм Ньютона бере свій початок з праць [1,2], в яких вперше введено поняття неklasичної мажоранти і діаграми Ньютона нескінченної числової послідовності, встановлені необхідні і достатні умови існування діаграми Ньютона, вивчені властивості мажоранти Ньютона. Як застосування запропоновано підхід до побудови класу наближених методів пошуку інформації в файлах баз даних. В [3,4] побудований апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій дійсної змінної, заданих на проміжку і заданих таблицно. В [5] апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона використаний для побудови нової квадратурної формули. В даній роботі розглядається побудова апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблицно.

Розглянемо функцію двох дійсних змінних $z = f(x, y)$, яка задана своїми значеннями в деяких точках (x_i, y_j) ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$):

$$f(x_i, y_j) = z_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m).$$

Нехай

$$|z_{ij}| = a_{ij} \leq M \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m),$$

де M – деяка константа.

Точку $P_{ij}(x_i, y_j, -\ln a_{ij})$ в системі координат xuz назовемо точкою зображення значення функції $z = f(x, y)$ в точці (x_i, y_j) . Припустимо, що точки зображення P_{ij} значень функції $z = f(x, y)$ в точках (x_i, y_j) в просторі xuz побудовані. Множину цих точок позначимо через S , а її опуклу оболонку – через $C(S)$. Нехай Q – проекція $C(S)$ на площину xu . Для кожної фіксованої точки $(x, y) \in Q$ визначимо точку $B(x, y, \chi(x, y))$, де

$$\chi(x, y) = \inf_{(x, y, z) \in C(S)} z.$$

Множина точок $B(x, y, \chi(x, y))$, де $(x, y) \in Q$, утворює опуклу поверхню δ_f , яка обмежує $C(S)$ знизу. Цю поверхню назовемо діаграмою Ньютона функції $z = f(x, y)$. Позначимо

$$M_f(x, y) = \exp(-\chi(x, y)), \quad (x, y) \in Q.$$

Тоді для кожної точки (x_i, y_j) ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$) виконується нерівність

$$|f(x_i, y_j)| = a_{ij} \leq M_f(x_i, y_j).$$

Функцію $z = M_f(x, y)$, визначену на множині Q , назовемо мажорантою Ньютона функції $z = f(x, y)$ на множині Q .

Теорема 1. Мажоранта Ньютона $M_f(x, y)$ функції $z = f(x, y)$ є неперервною і логарифмічно вгнутою функцією на множині Q .

Теорема 2. Справедлива рівність

$$\max_{i, j} |f(x_i, y_j)| = \max_{(x, y) \in Q} M_f(x, y).$$

При цьому, якщо

$$\max_{i, j} |f(x_i, y_j)| = |f(x_k, y_l)|,$$

то

$$\max_{(x,y) \in Q} M_f(x,y) = M_f(x_k, y_l).$$

Нами вивчені властивості мажоранти і діаграми Ньютона, виведені співвідношення для знаходження значень $M_f(x,y)$ в точках (x_i, y_j) через значення a_{ij} , а також як застосування побудована нова кубатурна формула для наближеного обчислення визначених інтегралів.

1. Цегелик Г.Г. Мажоранты и диаграммы Ньютона числовых последовательностей и их приложение к поиску информации в базах данных.-Киев. 1985, 12с.-(Препр./АН УССР, Ин-т кибернетики им.В.М.Глушкова; №85-49). 2. Цегелик Г.Г. Организация и поиск информации в базах данных. Львов: Вища шк., 1987. 176с. 3.Цегелик Г.Г. Мажоранты и диаграммы Ньютона функций действительной переменной, заданных в промежутке //Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. №6. С. 18-19. 4.Цегелик Г.Г. Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение //Укр. мат. журн. 1989. №9, Т.41. С. 1273-1276. 5. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. Використання неklasичного апарату мажорант і діаграм Ньютона функцій для побудови нової квадратурної формули //Вісн. Львів. ун-ту. Сер.мех.-мат. Вип.41. 1995. С.108-111.

УДК 519.6

С.М. Шахно, П.М. Недашковський

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ПРО НАЙМЕНШІ КВАДРАТИ

Нелінійні задачі про найменші квадрати виникають у багатьох практичних застосуваннях: при оцінюванні параметрів фізичних процесів за результатами вимірювань, у керуванні різними об'єктами та процесами, при оцінюванні параметрів і перевірці гіпотез у математичній статистиці тощо.

Чисельному розв'язанню нелінійної задачі про найменші квадрати присвячено багато наукових праць. Відзначимо тут монографії [1,2]. Як основні і найбільш ефективні розглядаються методи Гауса-Ньютона та метод Левенберга-Маркварта. На базі цих

методів побудовано і досліджено їхні модифікації, які покращують певні характеристики базових методів [3]. Також відомі програмні реалізації чисельних методів розв'язання нелінійної задачі про найменші квадрати. Зокрема, в пакеті MATLAB реалізовано методи Гауса-Ньютона та Левенберга-Маркварта. Однак такі пакети програм досить дорогі і нам часто недоступні. Тому нами розроблений комплекс програм, в якому здійснено реалізацію згаданих вище методів Гауса-Ньютона та Левенберга-Маркварта, а також низку їхніх модифікацій, описаних в [3].

В пакеті програм NELINSQR розглядаються методи розв'язування систем нелінійних рівнянь як в традиційній постановці, так і в сенсі найменших квадратів:

1. Знайти корінь x_* функції $F(x)$, де $F: R^n \rightarrow R^m$ нелінійна по x функція, починаючи з x_0 , використовуючи один з наявного набору алгоритмів.

2. Знайти
$$\min_{x \in R^n} f(x) = \frac{1}{2} F(x)^T F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m F_i(x)^2,$$

де $m \geq n$, функція нев'язки $F: R^n \rightarrow R^m$ нелінійна по x , а через $F_i(x)$ позначена i -та компонента функції $F(x)$.

Враховуючи, що при $m=n$ нелінійна задача про найменші квадрати включає в себе як частковий випадок задачу розв'язування систем нелінійних рівнянь, основна увага при реалізації приділялась розв'язуванню задачі 2. При цьому за основу взято модульну систему алгоритмів, наведену в [1].

Для розв'язування задачі 1 реалізовано метод Ньютона у вигляді [1]

$$x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1} F(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Для задачі 2 реалізовано наступні методи:

1. Метод Гауса-Ньютона [1]

$$x_{k+1} = x_k - [J(x_k)^T J(x_k)]^{-1} J(x_k)^T F(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

2. Узагальнений метод Гауса-Ньютона [1]

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k [J(x_k)^T J(x_k)]^{-1} J(x_k)^T F(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3)$$

3. Модифікований метод Гауса-Ньютона [3]

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - [J(\bar{x}_k)^T J(\bar{x}_k)]^{-1} J(\bar{x}_k)^T F(x_k), \\ \bar{x}_k &= (1 - \mu)x_k + \mu\varphi(x_k), \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

де $\varphi: F^n \rightarrow F^n$ – деякий допоміжний оператор, для якого $x_* = \varphi(x_*)$

4. Модифікований метод Левенберга-Маркварта [3]

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k [J(\bar{x}_k)^T J(\bar{x}_k) + \gamma_k I]^{-1} J(\bar{x}_k)^T F(x_k), k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

де $\gamma_k = \beta \|J(\bar{x}_k)^T F(x_k)\|$, $\beta > 0$, $\bar{x}_k$ – визначено в (4).

5. Різницеві аналоги методу Гауса-Ньютона [3]

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k [F(2x_k - x_{k-1}, x_{k-1})^T F(2x_k - x_{k-1}, x_{k-1})]^{-1} F(2x_k - x_{k-1}, x_{k-1})^T F(x_k); \quad (6)$$

та

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k [F(x_k, x_{k-1})^T F(x_k, x_{k-1})]^{-1} F(x_k, x_{k-1})^T F(x_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

де $F(u, v)$ – поділена різниця функції $F(x)$, обчислена за вузлами u та v . Для вибору кроку α_k використовувалась стратегія лінійного пошуку.

Для методів (1)-(3) передбачено можливість задання похідних аналітично, можливе обчислення програмою за скінченними різницями. Також передбачено масштабування векторів змінних та функції у випадку сильної розбіжності за величиною їхніх компонент.

Програма NELINSQR написана на мові Delphi 3.0 Client-Server Suite для застосування під оболонками Windows 95, Windows 98, Windows NT і є розвитком програми NELIN_R, описаної в [3].

Програма NELINSQR не висуває ніяких специфічних вимог до апаратного забезпечення. У програмі передбачено певну кількість регулюючих параметрів. Ми можемо встановити кількість знаків після коми в обчисленнях, обмежуючу кількість ітерацій (при перевищенні якої процес вважається розбіжним), певні регулюючі параметри для самих методів.

У програмі передбачено Help. До візуальних компонентів підключені підказки - Hint. Також є кілька демонстраційних файлів.

До переваг програми слід віднести можливість побудови. Мається на увазі підключення тестових задач та інших методів. Щоправда, це вимагає певної кваліфікації від користувача і хоча б мінімального знання Delphi.

1. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной минимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир. 1998. 440 с. 2. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир. 1975. 558 с. 3. Шахно С. М. Методи розв'язування нелінійної задачі про найменші квадрати. Тексти лекцій. Львів, 1998. 40 с.

Й. Г. Шипка, Р. Й. Шипка

ОПТИМІЗАЦІЯ КЕРУВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ТОНКОЇ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ

При дослідженні надійності роботи елементів конструкцій, що перебувають в умовах інтенсивного теплового навантаження, актуальними є задачі оптимального керування розподілом температурних деформацій та напружень.

Розв'язування задач оптимального керування температурними напруженнями, деформаціями або переміщеннями може бути зведене до обернених задач теплопровідності, в яких за заданим розподілом напружень, деформацій або переміщень визначається температурне поле тіла.

В межах квазістатичної задачі термопружності розглядається математична постановка та методика розв'язку задачі оптимального керування осесиметричними напруженнями вільно опертої по контуру тонкої круглої пластинки.

Нестационарне осесиметричне температурне поле пластинки при наявності внутрішніх температурних джерел описується рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial T(\rho, x, \tau)}{\partial \tau} = \Delta T(\rho, x, \tau) + F(\rho, x, \tau) \quad (\rho, x) \in D, \tau > 0 \quad (1)$$

з граничними

$$\left. \frac{\partial T(\rho, x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\rho=1} = 0 \quad x \in [0, 1], \tau > 0; \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial T(\rho, x, \tau)}{\partial \tau} (-1)^i H_i(T(\rho, x, \tau) - t_i(\rho, \tau)) \right|_{x=l_i} = 0, \rho \in [0, 1], \tau > 0,$$

$$l_i = \begin{cases} 0, i = 1 \\ 1, i = 2 \end{cases} \quad (3)$$

та початковою

$$T(\rho, x, \tau)|_{\tau=0} = f(\rho, x), \quad (\rho, x) \in \bar{D} \quad (4)$$

умовами.

$D = \{(\rho, x) | \rho \in [0, 1], x \in (0, 1)\}$; $\bar{D} = \{(\rho, x) | \rho \in [0, 1], x \in [0, 1]\}$ – область, яку займає пластинка.

Нехай теплове навантаження на граничній поверхні пластинки $x = 0$ є відомою функцією. Задача оптимального керування напруженнями пластинки полягає у визначенні в просторі $C(G), (G = \{(\rho, \tau) \in [0, 1] \times [0, \tau_0]\}, \tau_0 = \text{const})$ такого керування $u(\rho, x, \tau)$ – температури нагрівального середовища $t_2(\rho, t)$ або теплового потоку на поверхні $x = 1$, яке забезпечує мінімум рівномірного відхилення напружень $\sigma(\rho, x, \tau;)$ від деякого заданого розподілу $\varphi_*(\rho, x, \tau)$, тобто

$$\min_u I(u), I(u) = \max_{(\rho, x, \tau)} |\sigma(\rho, x, \tau; u) - \varphi_*(\rho, x, \tau)|, (\rho, x, \tau) \in G. \quad (5)$$

Для знаходження розв'язку поставленої задачі керування використовується метод оберненої задачі термопружності. Припускається, що існує таке керування $u \in C(G)$, на якому функціонал $\min_u I(u)$ досягає точної нижньої грані, що еквівалентно рівності

$$\sigma(\rho, x, \tau; u) = \varphi_*(\rho, x, \tau), (\rho, x, \tau) \in G, \quad (6)$$

і будується розв'язок $T(\rho, x, \tau)$ неklasичної задачі теплопровідності (1)-(4), (6) при $i = 1$. По знайденому розподілу температури шукане керування визначається з умови (3) при $i = 2$.

Використовуючи відомі методи інтегрування рівнянь термопружності, умову (6) можна записати у вигляді

$$2(1-\nu) \int_0^1 \int_0^1 \xi(1+3(1-2x)(1-2\eta))T(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta + \\ + (1+\nu) \int_0^1 (1+3(1-2x)(1-2\eta))T(\rho, \eta, \tau) d\eta - 2T(\rho, x, \tau) = \varphi(\rho, x, \tau). \quad (7)$$

Як компонента тензора напружень береться сума радіальних та кутових напружень: $\sigma(\rho, x, \tau) = \frac{(1-\nu)}{\alpha_T E} (\sigma_{rr}(\rho, x, \tau) + \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, x, \tau))$, де E, ν, α_T – відповідно модуль Юнга, коефіцієнти Пуасона та лінійного розширення.

Таким чином, вихідна задача керування напруженнями пластинки (5) зводиться до неklasичної задачі (1)-(4), (7) при $i = 1$, в якій по заданому розподілу температурних напружень визначається температурне поле пластинки, тобто до оберненої задачі термопружності.

Застосовуючи до задачі (1)-(4), (7) послідовно скінченне перетворення Ханкеля та перетворення Лапласа, в просторі зображень отримаємо

$$\frac{\partial^2 T_n^L(x, s)}{\partial x^2} - \mu_n^2 T_n^L(x, s) = -\Phi_n(x, s); \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_n^L(0, s)}{\partial x} - H_1 T_n^L(0, s) = -H_1 t_{1n}^L(s); \quad (9)$$

$$a_n \int_0^1 (1 + 3(1-2x)(1-2\eta)) T_n^L(\eta, s) d\eta - T_n^L(x, s) = \varphi_n^L(x, s), \quad (10)$$

де $\Phi_n(x, s) = (f_n(x) + F_n^L(x, s))/k^2$, $a_n = \begin{cases} 2 & n=0 \\ (1+\nu) & n>0 \end{cases}$; $T_n^L(x, s)$,

$t_{1n}^L(s)$, $\varphi_n^L(x, s)$ – зображення по Лапласу функцій $T_n(x, \tau)$, $t_{1n}(x, \tau)$, $\varphi_n(x, \tau)$, які в свою чергу є зображеннями по Ханкелю функцій $T(\rho, x, \tau)$, $t_1(\rho, \tau)$, $\varphi(\rho, x, \tau)$; s – параметр перетворення Лапласа, $\mu_n^2 = (\gamma_n^2 + s)/k^2$, γ_n – додатні корені характеристичного рівняння $J_1(\gamma) = 0$, $J_1(\gamma)$ – функція Бесселя першого роду першого порядку.

Можна показати, що розв'язок задачі (1)-(4), (9) існує та єдиний при виконанні наступних умов погодження між функціями розподілу напружень $\varphi(\rho, x, \tau)$ та початкового розподілу температури $f(\rho, x)$:

$$\int_0^1 (1 + 3(1-2x)(1-2\eta)) f_n(x) dx = \frac{1}{a_n} (\varphi_n(x, 0) + 2f_n(x)),$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Розв'язок задачі (8)-(10) можна записати у вигляді $T_n^L(x, s) = \frac{P_n(x, s)}{\psi_n(s, x)}$, де $P_n(x, s)$, $\psi_n(x, s)$ – відомі функції.

Проаналізувавши поведінку коренів рівняння $\psi_n(x, s) = 0$, можна побудувати розв'язок задачі (8)-(10), а потім, використовуючи зворотні перетворення Лапласа та Ханкеля, побудувати розв'язок вихідної задачі.

Н.М. Щербина

ЧИСЕЛЬНО – АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглядається один із можливих методів розв'язування лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. Цей метод в ідейному плані подібний до методу, який детально досліджений у праці [2] і виявився ефективним при розв'язуванні багатьох практичних задач у випадку систем із сталими коефіцієнтами.

Розглянемо математичну модель у вигляді системи n лінійних звичайних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами

$$\frac{d}{dx} z(x) = A(x)z(x) + f(x), \quad x \in [0, b], \quad (1)$$

з крайовими умовами, накладеними на функцію $z(x)$ при $x = 0$ та $x = b$ (по $n/2$ на кожному кінці, n – парне).

Тут z – невідомий вектор з компонентами $z_1, z_2, \dots, z_n$; $A(x)$ – матриця розміру $n \times n$, компонентами якої є задані неперервні функції $a_{ij}(x)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) в інтервалі зміни аргументу x ; $f(x)$ – вектор-функція з компонентами $f_i(x)$.

Такого типу задачі часто виникають при дослідженні напружено-деформованого стану тонкостінних елементів конструкцій (оболонки, пластин, стержнів), які перебувають під дією різних експлуатаційних навантажень.

При розв'язуванні сформульованої двоточної лінійної крайової задачі використовуємо прийом зведення її до набору $n+1$ задач Коші

$$\frac{d}{dx} z^{(0)}(x) = A(x)z^{(0)}(x) + f(x), \quad z_i^{(0)}(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} z^{(k)}(x) = A(x)z^{(k)}(x), \quad z_i^{(k)}(0) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Розв'язок крайової задачі записується через розв'язки задач (2) – (3) у вигляді

$$z(x) = z^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^n C_k z^{(k)}(x). \quad (4)$$

Сталі C_k визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь, одержаної при задоволенні крайових умов.

Метод знаходження розв'язків задач (2) – (3) базується безпосередньо на обчисленні матрицанта. Відзначимо, що при такому підході до побудови розв'язку крайової задачі немає потреби у чисельному розв'язуванні задач Коші, основною проблемою тут є обчислення матрицанта G_0^x . У загальному випадку матриці $A(x)$ це є складною і аналітично практично нерозв'язальною задачею. Використовуючи зображення матрицанта у вигляді мультиплікативного інтеграла [1], розроблено алгоритм для наближеного обчислення матрицанта.

Отже, розв'язок крайової задачі у покомпонентному записі має вигляд

$$z_i(x) = \sum_{i=1}^n C_k g_{ik}(x) + \int_0^x \sum_{j=1}^n k_{ij}(x, \tau) f_j(\tau) d\tau \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

де $g_{ij}(x)$ – елементи матриці G_0^x , $k_{ij}(x, \tau)$ – елементи матриці $K(x, \tau) = G_0^x [G_0^\tau]^{-1}$.

При $x = 0$ $n/2$ невідомих сталих C_k легко визначаються відразу. Решта сталих C_k знаходимо з наступної системи $n/2$ лінійних алгебраїчних рівнянь, отриманої при задоволенні крайових умов при $x = b$:

$$z_i(b) = z_i^{(0)}(b) + \sum_{k \in J_2} C_k g_{ik}(b),$$

де $J_2 = \{1, 2, \dots, n\} \setminus J_1$. Через J_1 і J_2 позначені відповідно множини індексів знайдених та ще не визначених сталих C_k .

Таким чином, описаний метод дозволяє одержати наближений розв'язок крайової задачі в аналітичній формі, що є особливо цінним при розв'язуванні контактних задач [2]. Здійснена програмна реалізація методу та апробація на тестових задачах.

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1998. – 552 с.
2. Щербина Н. М. Методи розв'язування контактних задач для пружних анізотропних шаруватих циліндричних оболонок. – Препр. НАН України, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, № 7 – 94, 1994. – 56 с.

Н.М. Щербина, О.В. Максимук

КОНТАКТНА МІЦНІСТЬ З'ЄДНАННЯ КОМПОЗИТНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ЖОРСТКИМ БАНДАЖЕМ

При експлуатації нафто-газове обладнання перебуває в складних умовах контактної навантаження. Тому є актуальною проблема підвищення контактної міцності конструктивного з'єднання. На практиці таке з'єднання – композитна циліндрична оболонка, яка на певній частині довжини затиснена жорсткою обіймою (бандажем). Оболонка виготовлена з армованого полімерного матеріалу з сталим по товщині кутом армування φ . Проблема полягає у визначенні контактної тиску між бандажем і композитною оболонкою, котрий є основною характеристикою для оцінки міцності з'єднання.

Математична модель даної задачі побудована на основі рівнянь узагальненої теорії оболонок типу Тимошенка [4], які враховують специфічні особливості механічної поведінки елементів конструкцій із композитних матеріалів (КМ), зокрема, відносно низьку жорсткість на зсув, анізотропію фізико-механічних властивостей. Відзначимо, що ця модель враховує також зміну жорсткісних характеристик матеріалу, зумовлену різним кутом армування.

У випадку осесиметричного напружено-деформованого стану оболонки (за умови відсутності тангенціальних складових зовнішнього навантаження) рівняння рівноваги мають вигляд

$$\frac{dN_1}{dx} = 0, \quad \frac{dM_1}{dx} - Q_1 = 0, \quad \frac{dQ_1}{dx} - \frac{1}{R} N_2 = -\sigma(x) \quad (1)$$

де

$$\sigma(x) = \begin{cases} q(x), & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & a < x \leq l, \end{cases} \quad (2)$$

$q(x)$ – шуканий контактний тиск.

Співвідношення пружності, враховуючи спрямовано орієнтоване армування для даної задачі можна записати у такому вигляді:

$$N_1 = 2h \left(\Omega_{11} \frac{du}{dx} + \Omega_{12} \frac{w}{R} \right), \quad N_2 = 2h \left(\Omega_{12} \frac{du}{dx} + \Omega_{22} \frac{w}{R} \right),$$

$$Q_1 = \frac{5h}{3} \Omega_{55} \left(\gamma + \frac{dw}{dx} \right), \quad M_1 = \frac{2h^3}{3} \Omega_{11} \frac{d\gamma}{dx}, \quad (3)$$

де $2h$, l , R – відповідно товщина, довжина і радіус серединної поверхні оболонки. У формулах (1)-(3) вживаються загальноприйняті позначення. Вирази для величин Ω_{11} , Ω_{12} , Ω_{22} , Ω_{55} наведені в [4].

В умовах заданого навантаження припускається, що $N_1 = 0$. Лівий край оболонки (при $x=0$) разом з обоймою жорстко защемлений, а правий край (при $x=l$) – вільний.

Приймається, що в області контакту $0 \leq x \leq a$ значення обтиснення ε оболонки жорсткою обоймою є відоме. Це дозволяє записати умову контактної взаємодії у вигляді [2]

$$\varpi = -\varepsilon - kq(x). \quad (4)$$

Коефіцієнт k враховує обтиснення нормалі до серединної поверхні оболонки [2].

Розв'язкова система рівнянь, отримана при підстановці (2) в (1), у матричній формі зображається так:

$$\frac{d}{dx} z(x) = Az(x) + F(x), \quad (5)$$

де $z(x) = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T = \left(\omega, \gamma, \frac{d\varpi}{dx}, \frac{d\gamma}{dx} \right)^T$ – вектор невідомих,

$$F(x) = (0, 0, -q(x), 0)^T.$$

Елементи матриці A системи (5) легко визначаються через геометричні параметри оболонки та пружні характеристики матеріалу, що залежать від кута армування φ .

Загальний розв'язок системи (5) з заданими крайовими умовами будується за допомогою чисельного методу, який виявився ефективним при розв'язуванні багатьох контактних задач [3,5]. Цей метод дозволяє відразу записати наближений розв'язок задачі в аналітичній формі.

Наприклад, прогин оболонки за даним методом визначається так

$$\varpi(x) = z_1(x) = \sum_{k=1}^4 c_k g_{1k}(x) - \int_0^x g_{13}(x-\tau) q(\tau) d\tau, \quad (6)$$

де

$$g_{ii}(x) = 1 + \sum_{k=1}^m a_{ij}^{(k)} x^k / k!,$$

$$g_{ij}(x) = \sum_{k=1}^m a_{ij}^{(k)} x^k / k!, \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Тут m – параметр методу, вибір якого залежить від конкретної задачі [5], $a_{ij}^{(k)}$ – (i, j) -й елемент матриці A^k . Сталі c_k знаходяться з граничних умов.

Підставляючи (6) в (5), одержуємо інтегральне рівняння контактної задачі для визначення контактного тиску $q(x)$. Отримане рівняння зводиться до лінійного неоднорідного рівняння Фредгольма II роду з розривним ядром. Його розв'язок будується чисельно.

Проведений аналіз отриманих числових результатів дозволяє зробити деякі висновки щодо впливу зміни фізико-механічних властивостей матеріалу оболонки на величину та розподіл контактного тиску, а також на контактну міцність з'єднання, що характеризується силою T . Розрахунок останньої здійснюється за формулою

$$T = \frac{20}{3} \pi R h f G' Q,$$

де $Q = \int_0^a q(x) dx$ – безрозмірна величина, f – емпіричний коефіцієнт (характеризує конструктивні особливості з'єднання), G' – модуль зсуву КМ.

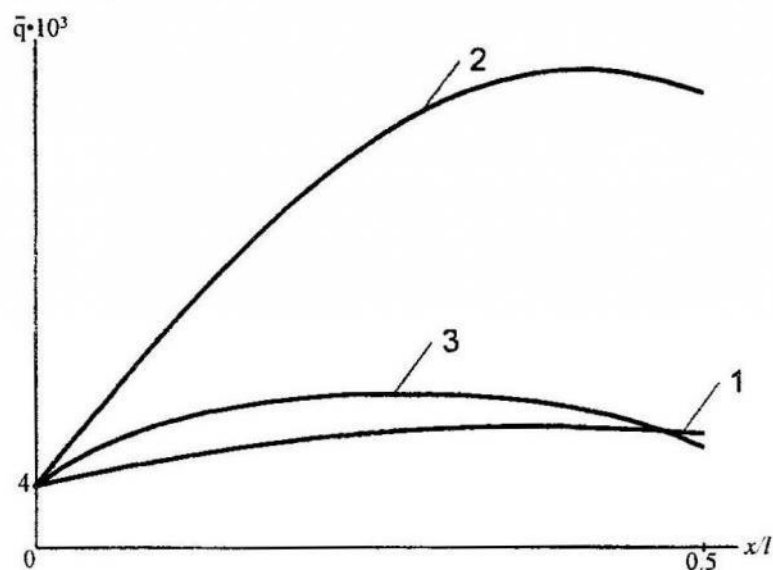
Показано, що при збільшенні величини структурних параметрів матеріалу: $\xi = E_a / E_c$, (E_a, E_c – модулі пружності армованих волокон і сполучника) та $\eta = V_a / V$ – коефіцієнт армування (V_a – об'єм армованих волокон в об'ємі композита) спостерігається підвищення контактної міцності з'єднання.

Рисунок ілюструє розподіл контактного тиску в області контакту залежно від зміни жорсткісних характеристик матеріалу, спричиненої різним кутом армування. Криві 1, 2, 3 відповідають значенням $\varphi = 0, \pi/3, 5\pi/12$ відповідно. Розрахунок здійснювався для оболонки з такими геометричними параметрами та пружними сталими матеріалу [1]:

$$l/R = 2, \quad h/R = 1, \quad \varepsilon/l = 0.005, \quad a/l = 0.5;$$

$$E_1 = 4.4 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad E_2 = 1.3 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad G_{13} = 0.37 \cdot 10^4 \text{ МПа},$$

$$\nu_{12} = \nu_{21} = 0.18.$$



1. Жигун И.Г., Поляков В.А. Свойства пространственно армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1978. – 216 с.
2. Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. К.: Наук. думка, 1988. – 280 с.
3. Пелех Б.Л., Максимук А.В., Щербина Н. Н. Контактная жесткость слоистых цилиндрических оболочек. Матричный метод решения контактных задач для многослойных цилиндрических оболочек// Механика композит. Материалов. 1986. №2. С.276-280.
4. Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. К.: Наук. думка, 1980. – 216 с.
5. Щербина Н.М. Методи розв'язування контактних задач для пружних анизотропних шаруватих циліндричних оболонок. – Препр. НАН України, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача, № 7 – 94, 1994. – 56 с.

УДК 51(092)

Г.М. Возняк, А.І. Кардаш

ОБИРВАНИЙ ШЛЯХ

„Уся його сила волі, неймовірна працездатність, темперамент пішли на одне діло, що заповнювало його цілком – на наукову творчість – так сказав корифей української математики, академік Михайло Кравчук про великого сина Швейцарії –Леонарда Ейлера, що своїм внеском у точні й природничі науки сприяв значному

поступові пізнання в XVIII столітті. Але ці слова можна також віднести до самого Михайла Кравчука, одного із провідних українських математиків XX століття, праці якого становлять фундаментальне надбання різних галузей математичної науки, а також до видатного математика-кібернетика Ігоря Вітенька, трагічна доля якого обірвала життєвий шлях на 37 році...

Життєвий шлях

Народився майбутній учений 28 березня 1938 року в селі Черняхівці на Тернопільщині, в селянській національносвідомій родині. Його батько Володимир Вітенко тридцятирічним у серпні 1941 року був мобілізований на війну, з якої не повернувся... Мати Євгенія з родини Осадчуків, 1919 року народження за зв'язки і допомогу ОУН-УПА в 1944 році була заарештована і засуджена військовим трибуналом на 20 років каторжних робіт. Ув'язнення відбувала в таборах Кемерова, Іркутська, Норильська, Мордовії. Залишившись сиротою, хлопчик виховувався у двоюрідній сестри Анни Кониш у селі Верхняки Збаражського району. Тут він здобув початкову освіту. Навчання продовжив у селі Черняхівці, де в 1952 році закінчив семирічну школу. Любов до математики привила йому вчителька Катерина Закритна. Середню освіту Ігор здобув у Збаражській СШ № 2, де математики його навчав прекрасний вчитель, чудова людина Іван Нарадько, який власне й повів свого учня у Львівський університет. Хлопець мав не надто гарний почерк, тому вчитель у приймальній комісії сказав: „не звертайте уваги на його почерк, з нього буде великий вчений...” Ці слова виявились пророчими.

Тяжкі часи припали на навчання в університеті. Ігор як і його приятелі – перший курс за взуття мав білі парусинові мешти, за одержу – байовий спортивний костюм, а сумкою для книжок і конспектів служив... паперовий куферок. Їжу готували по черзі в гуртожитку. Матеріальна скрута погнала студентів на збирання врожаю на цілину в Казахстан (1956 та 1958 роки). Це було складним випробовуванням й елементом загартування характеру. Доводилось працювати в спеку (45-50°C), а під кінець перебування спали в наметах при сімнадцяти-градусному морозі в соломі. Багато повернулось з ознаками захворювання на туберкульоз. Перші парадні костюми було пошити аж у 1959 році. Але ніякі труднощі не могли зламати головного – волі до навчання. Ігор – відмінник навчання і один з семи закінчив університет з відзнакою у першому випуску модерної на той час спеціалізації „обчислювальна математика”. Талановитого студента зауважив професор Олександр Костовський, який запропонував Ігорю навчання в аспірантурі.

Три роки минають як одна мить... Все спрямоване на наукову роботу. До закінчення аспірантури підготовлено кандидатську дисертацію. Є надія залишитись працювати в рідному університеті. Але не судилося... Ігоря скеровують на роботу в Харків (Інститут гірничого машинобудування і обчислювальної техніки; пізніше – Інститут радіоелектроніки). Тут гурт молодих викладачів та співробітників різного профілю: теоретики, інженери, практики. У цей період закладені підвалини тематики подальшої наукової роботи. Ігор співпрацює зі своїми колегами, допомагаючи їм своїми порадами, настановами; стає їх науковим лідером. На цей час припадає захист кандидатської дисертації та період першої серйозної закоханості з сумним фіналом: батьки нареченої десь дізналися, що Ігор із сім'ї „ворогів народу” і заборонили дочці підтримувати будь-які стосунки з ним. Це душевне потрясіння стало головною причиною того, що Ігор повертається в Західну Україну. У Львові для нього знову роботи не знайшлося; довелося влаштуватися старшим викладачем кафедри теоретичної кібернетики Ужгородського університету. Його колега по роботі, нині професор Юрій Василенко згадує, що „...Ігор був справжнім ученим від Бога, який виділявся особливим інтелектом й працьовитістю; я й мої колеги ще до тепер використовуємо його посібники, які ми вислали також до Харкова, Іванова, Новосибірська та в інші міста”.

В Ужгороді розпочинається третій етап наукової роботи Вітенька. Ним підготовлено до захисту докторську дисертацію. Однак на засіданні Великої вченої ради університету в кінці серпня 1974 року секретар парткому заявив „ми не можемо дати позитивної характеристики для захисту докторської дисертації вихідцю з родини ворогів народу...” Це був фінал...

А перед цим в листах до матері, яка на той час уже повернулась із заслання, Ігор скаржився, що захист докторської дисертації під загрозою зриву, бо на нього пишуть огидні анонімки про його походження з бандерівської родини. Пригнічений цькуванням та переслідуванням Ігор приїжджає на Спаса в своє рідне село в гості до матері. Відвідує своїх знайомих, рідних, вчителів; прогулюється лісом, полями. Після повернення в Ужгород продовжує працювати наче в якомусь страсі. На початку вересня Ігоря в Ужгороді вже немає. Колеги подають на розшук... 20 вересня 1974 року його знайшли мертвим у Винниківському лісі під Львовом. Мисливець зі собакою випадково натрапив на покійного. Скільки днів пролежав у лісі – невідомо. При загиблому були гроші, документи, годинник. Ні ран, ні слідів насильства не виявлено. Отже, це не був ні хуліганський напад, ні грабунок. Похорон

організовували колеги по Львівському університету. Результати слідства в справі Ігора Вітенька не відомі до цього часу.

Так трагічно й незбагненно обірвалось життя молодого талановитого вченого, математика-кібернетика Ігора Вітенька. Є підстави вважати, що Ігор став жертвою тоталітарної системи, яка нищила цвіт, еліту нації – не лише поетів, письменників, митців а й талановитих учених: математиків, фізиків, кібернетиків...

Творчий шлях

Львівський період наукової роботи (1960-1963) пройшов під знаком підготовки кандидатської дисертації на тему «Дослідження по чисельних методах визначення нулів аналітичних функцій», яку Ігор завершив у 1963 році, а успішно захистив у 1967 році. В період 1963-1966 роки вийшли друком 7 публікацій у престижних журналах спочилого в Бозі Союзу: Доповіді академії наук СРСР, Доповіді академії наук УРСР, Вісник Львівського університету тощо:

1. До визначення нулів рядів Лорана;
2. Узагальнені формули перетворень в методах Лобачевського-Грефе і Лемера;
3. Про один алгоритм виділення множників рядів Тейлора;
4. Чисельний метод виділення множників поліномів і рядів Тейлора;
5. Визначення головних індексів рядів Лорана;
6. Ділення та факторизація рядів Лорана;
7. Вираження за допомогою детермінанта добутків Лобачевського-Грефе для рядів Лорана.

Деякі статті опубліковано в співтоваристві з науковим керівником – професором Костовським.

Харківський період наукової роботи пов'язаний як з тематикою Інституту радіоелектроніки, так і з майбутнім уподобанням Ігора – кібернетикою, а також темами кандидатських дисертацій його нових приятелів, для яких він виступав в ролі теоретика:

8. Про оптимальні алгоритми функціонування АЦП типу "Напруга-код";
9. Оптимальні алгоритми додавання і множення на машинах з плаваючою крапкою;
10. Оцінка повної похибки для методу дихотомії при розв'язанні алгебраїчних рівнянь.

Як вдячність за наукову співпрацю професор Стахов свою наукову монографію з теорії вимірювань видав з посвятою Ігорю Вітеньку.

Найбільш продуктивним у житті Ігоря Вітенка є Ужгородський період.

Спроби опублікувати свої статті в Інституті кібернетики в Києві не приводили до мети. Публікації затримуються на роки, а час іде – матеріал морально старіє (хоча по смерті Ігоря ряд статей, посланих ним до друку, виходять під іншими прізвищами, а по розроблюваній ним тематиці захищається декілька докторських дисертацій). Тому Ігор вдається до маневру, властивому радянському періоду, – публікує наукові праці під виглядом учбових посібників. Саме в цей час виходять друком монографії:

11. Математична логіка;
12. Конструктивні операції;
13. Схеми, алгоритми, многовиди.

Ці праці власне склали відповідні розділи докторської дисертації. Також вийшли друком статті:

14. Про деякі нові класи алгебр;
15. Мінімізація операторних схем алгоритмів;
16. Теорія оптимальних алгоритмів аналого-цифрового перетворення;
17. Коректуючі (i, k, s) -алгоритми;
18. Незвідні класи ознак для розпізнавання образів.

Вільне володіння англійською та німецькою мовами дозволяло Ігорю бути інформованим у наукових розробках з цієї тематики в світі.

Зупинимося детальніше на тематиці останніх публікацій:

а) "Математична логіка"

Крім класичних понять математичної логіки розглянуто властивості теорії замикань, які відіграють роль основного апарату для вивчення логічного виведення. Основна ідея праці – довільну логіку слід трактувати як теорію деякого класу структур.

б) "Конструктивні операції"

Значна увага приділяється інтуїтивній теорії конструктивних функцій (конструктивна функція – функція для якої існує алгоритм обчислення її значення) та теорії рекурсивних функцій, які можна використовувати також як спецкурс в теорії програмування.

в) "Схеми, алгоритми та многовиди"

З позицій алгебраїчного підходу систематично розвивається теорія схем, зокрема схем алгоритмів. На основі поняття схеми дається означення важливих класів алгебри, частковим випадком

яких є підгрупи і булеві алгебри. Наведено означення схем та сформульовані проблеми дослідження схем.

Ці праці стали лебединою піснею – останніми друкованими науковими працями Ігоря Вітенка, коли їх авторів вже стелилася хресна дорога у вічність...

УДК 51(092)

О.М. Костовський, В.О. Костовський

РОБОТИ І.В. ВІТЕНКА В ЛОГІЦІ ТА ТЕОРІЇ ПРОГРАМУВАННЯ

Логіка, теоретичний фундамент програмування завжди цікавили Ігоря Володимировича, і його наукові праці 1970 -74 рр. пов'язані з дослідженнями саме в цих галузях математики.

У монографії [2] конкретна аксіоматична теорія розглядається як певний клас L висловлювань (аксіом, формул логіки), що замкнений відносно оператора (системи засобів) доведення F , де доведення розглядається як частковий випадок фундаментального математичного поняття замикання, аналогічного топологічному та алгебраїчному замиканням.

Система засобів доведення називається повною, якщо за допомогою цієї системи можна довести кожен теорему, тобто висловлювання, що є логічно загальнозначущим в L . У [2] побудовані повні системи доведень для двох алгебр.

У монографії [2] довільна логіка розглядається як теорія деякого класу структур, послідовно викладається теорія класів і детально досліджуються логіка висловлювань і логіка алгебраїчних перетворень.

У підручнику [3] викладено теорію рекурсивних функцій. Цю теорію викладено на основі концепції програми для багаторегістрових машин (операторних алгоритмів), в системі команд яких використовуються оператори присвоювання, додавання та віднімання одиниці, умовного (за нулем) та безумовного переходу. На базі цієї концепції послідовно будується універсальна функція, доводяться всі відомі теореми про властивості рекурсивних функцій і нерозв'язних алгоритмічних проблем. Також доводяться

теореми про еквівалентність відомих алгоритмічних систем операторним алгоритмам. Зазначимо, що аналогічний підхід до викладення теорії алгоритмів реалізований майже через 10 років [5].

Як відомо [3], визначення за програмою будь-яких нетривіальних її властивостей є алгоритмічно нерозв'язною проблемою. В кінці 60-х років відродився інтерес до теоретичного програмування, а саме, до теорії схем програм (СП). У монографії [1] введено поняття СП, що узагальнювало всі відомі на той час поняття, і отримано цікаві математичні результати про алгоритмічні властивості СП.

Стаття [4] опублікована вже після загибелі автора. В ній досліджуються алгоритмічні властивості множин нескінченних послідовностей (НП), які не є конструктивними об'єктами. На них вводиться топологія досліджуються алгоритмічні властивості псевдобулевих алгебр, що індукуються цією топологією. Тематика [4] є продовженням досліджень з теорії програмування, що була розпочата в [1].

1. Вітенько І. В. Схемы, алгоритмы и многообразия. Ужгород: УЖДУ, 1970. 76с. 2. Вітенько І. В. Математична логіка. Ужгород: УЖДУ, 1971. 274с. 3. Вітенько І. В. Конструктивні операції. Ужгород: УЖДУ, 1972. 212с. 4. Витенько И. В. О вычислимости свойств бесконечных последовательностей// Теория автоматов, алгоритмов и математическая логика. К.: 1974. С. 3-21. 5. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию вычислимых функций. М.: Мир, 1983.

ЗМІСТ

<i>М.Я. Бартіш. ПРО МЕТОДИ ТИПУ НЬЮТОНА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І ЗАДАЧ НА ЕКСТРЕМУМ.....</i>	<i>3</i>
<i>І.Є. Бернакевич. НЕСТАЦІОНАРНІ ПРОЦЕСИ В СИСТЕМІ «ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА - ІДЕАЛЬНА РІДИНА».....</i>	<i>6</i>
<i>М.В. Білик, В.М. Горлач, І.І. Трескот. ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ «ФАКУЛЬТЕТ».....</i>	<i>10</i>
<i>М.Е. Білинський, А.А. Переймибіда. ДІАХРОНІЧНА ЛІНІЙНІСТЬ В АВТОМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ПАРАДИГМОТВІРНОСТІ ДЕВЕРБАТИВІВ АНГЛІЙСЬКОЇ МОВИ</i>	<i>12</i>
<i>О.В. Блажівська. ПРО СПРЯЖЕНИЙ ТЕПЛОМАСООБМІН ПРИ ВІЛЬНІЙ КОНВЕКЦІЇ У БІНАРНІЙ СУМІШІ ГАЗІВ ПОБЛИЗУ ВЕРТИКАЛЬНОЇ ПЛАСТИНИ</i>	<i>15</i>
<i>І.Ю. Бобало. ПРОЦЕДУРА СТРУКТУРИЗАЦІЇ ПОЧАТКОВОЇ ІНФОРМАЦІЇ ДЛЯ СЛАБОСТРУКТУРОВАНИХ ЗАДАЧ ВИБОРУ</i>	<i>18</i>
<i>Д.Б. Буй. ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЇ РЕКУРСІЇ.....</i>	<i>21</i>
<i>Д.Б. Буй, С.А. Поляков. КОМПОЗИЦІЙНІ СТРУКТУРИ SQL – ПОДІБНИХ МОВ: ФІЛЬТРАЦІЯ ТА ПОВНИЙ ОБРАЗ</i>	<i>24</i>
<i>П.П. Вагін, Ю.В. Іщук. ВОДНА ЕРОЗІЯ ҐРУНТІВ НА ОСНОВІ ЕМПІРИЧНОЇ МОДЕЛІ (ДЛЯ РІЗНИХ ТИПІВ ҐРУНТІВ)</i>	<i>27</i>
<i>П.П. Вагін, Г.Й. Лучко, В.Я. Федорович. МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ЕРОЗІЇ ВОДНОГО КАНАЛУ.....</i>	<i>29</i>
<i>П.П. Вагін, О.Й. Піскозуб. МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ РЕЛЬЄФУ МІСЦЕВОСТІ НА ПОВЕРХНЕВО-СХИЛОВУ ЕРОЗІЮ ҐРУНТУ</i>	<i>32</i>
<i>П.С. Венгерський, Д. В. Косарев, Ю.О. Чоботок, Г.А. Шинкаренко. СИСТЕМА ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ НА РЕЛЬЄФІ ПОВЕРХНІ.....</i>	<i>35</i>
<i>П.С. Венгерський, Ю.Я. П'єч. ПРИСКОРЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ІНТЕРВАЛЬНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДОМІНУЮЧОЮ ДІАГОНАЛЛЮ</i>	<i>38</i>
<i>П.С. Венгерський, Н.Я. Смушак, Г. А.Шинкаренко. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СТОКУ ВОЛОГИ НА ПОВЕРХНІ ВОДОЗБОРУ</i>	<i>41</i>
<i>П.С. Венгерський, В.М. Трушевський, П.С. Сеньо. ОЦІНКА ГЛИБИНИ РЕКУРСІЇ ОДНОГО КЛАСУ ДВОСТОРОННІХ МЕТОДІВ</i>	<i>45</i>

<i>В.Д. Вовк, Р.Б. Петришин, Г.А. Шинкаренко.</i> ВЕРХІВКА СИСТЕМИ КЛАСІВ ПРОГРАМНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ	48
<i>В.Д. Вовк, Р.Б. Петришин, Г.А. Шинкаренко.</i> РОЗВ'ЯЗУВАНІСТЬ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ.....	51
<i>Я.С. Гарасим, Б.А. Остудін.</i> ПРО ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО РОДУ В ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ	54
<i>Н.П. Головач, І.І. Дияк.</i> АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ДЕФОРМАЦІЙ У ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ПМГЕ	59
<i>В.В. Головащенко, В.В. Лихочвор, Г.Г. Цегелик.</i> ЕКСПЕРТНА СИСТЕМА ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ВИБОРУ ОПТИМАЛЬНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ ВИРОЩУВАННЯ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ КУЛЬТУР	62
<i>Б.М. Голуб, Ю.П. Оліярник.</i> ЛОКАЛЬНЕ ЗБІЛЬШЕННЯ ФУНКЦІЇ МЕТИ В ТУНЕЛЬНИХ АЛГОРИТМАХ ГЛОБАЛЬНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ	65
<i>Б.М. Голуб, Ю.М. Щербина.</i> КВАЗІНЬЮТОНІВСЬКА МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	67
<i>Мирослава Дзіковська.</i> ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДАНИХ ДЛЯ СТІЙКОГО РОЗУМІННЯ МОВИ У ДІАЛОГОВІЙ СИСТЕМІ TRIPS-98	71
<i>Х.С. Дороцька, Г.Г. Цегелик.</i> ДО ПОБУДОВИ ОПТИМАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ОДНОРІВНЕВИХ ІНДЕКСНО-ПОСЛІДОВНИХ ФАЙЛІВ	75
<i>І.І. Дияк.</i> АДАПТИВНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ НА ОСНОВІ ГІБРИДНИХ АПРОКСИМАЦІЙ	78
<i>Я.О. Дубров.</i> ТЕОРІЯ ДЕСКРИПЦІЙНИХ МОРФІЗМІВ. МОДЕЛЮВАННЯ МЕНТАЛЬНИХ СТРИБКІВ У КОНТЕКСТІ ТЕОРЕМИ ГЙОДЕЛЯ	81
<i>І.М. Дудзяний, С.І. Дудзяний.</i> ДО ПИТАННЯ СТІЙКОСТІ ІНВАРІАНТНИХ ТОРІВ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ.....	84
<i>А.Т. Дудикевич, С.М. Левицька.</i> КОМБІНОВАНИЙ МЕТОД ОБЧИСЛЕННЯ ПОТЕНЦІАЛУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ ДЛЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ.....	87
<i>А.Т. Дудикевич, С.М. Левицька.</i> РІЗНИЦЕВА СХЕМА ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА В ПРОСТОРОВОМУ ВИПАДКУ	91

<i>Л.М. Дяконюк, Я.Г. Савула.</i> КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОПЕРЕНОСЕННЯ У ШАРІ З ТОНКИМ ПОКРИТТЯМ.....	93
<i>П. Жежнич.</i> ПРОБЛЕМИ ПОДАННЯ ЧАСОВИХ ДАНИХ В ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ (НА ПРИКЛАДІ СИСТЕМИ "ЕЛЕКТРОННОГО МУЗЕЮ").....	95
<i>М.В. Жук, А.Ю. Кіндибалу.</i> ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БІГ АРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ	98
<i>П.Ф. Завгородній, А.П. Власюк, О.Ю. Тимейчук.</i> МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ОРЕБРЕННЯ ПОВЕРХНІ ФОРМИ НА ПРОЦЕС ЛИТТЯ	100
<i>К.С. Іванків, М.В. Щербатий.</i> ДО ПИТАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСАМИ ПРОТІКАННЯ ІНФЕКЦІЙНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ	103
<i>Н.В. Іванова.</i> ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ДЕФОРМУВАННЯ ЗСУВНИХ ОБОЛОНОК	106
<i>А.І. Кардаш.</i> РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ МЕТОДУ ПРОСТОЇ ІТЕРАЦІЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР	110
<i>А.І. Кардаш, І.І. Чулик.</i> РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ МЕТОДУ ЗЕЙДЕЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ	112
<i>Я.А. Кардаш, Г.Г. Цегелик.</i> ДО ПОБУДОВИ ОПТИМАЛЬНИХ ІМОВІРНІСНИХ ДВІЙКОВИХ ДЕРЕВ ПОШУКУ	116
<i>А.В. Катренко.</i> ПРОБЛЕМИ ПРЕДСТАВЛЕННЯ СИСТЕМИ ПЕРЕВАГ ОСОБИ, ЩО ПРИЙМАЄ РІШЕННЯ	118
<i>А.В. Катренко.</i> СЛАБКА СТРУКТУРОВАНІСТЬ ЯК ВЛАСТИВІСТЬ СКЛАДНИХ СИСТЕМ	120
<i>Р.І. Кісіль, І.С. Муха.</i> БЕЗУМОВНО СТІЙКА СХЕМА МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТОНКОСТІННИХ ТВЕРДИХ ТІЛ	123
<i>В.Я. Козак, В.А. Ліщинський.</i> ПОБУДОВА ПЕРЕДАВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ЛІНІЙНИХ НЕЧІТКИХ СИСТЕМ.....	125
<i>Ю.С. Козаревська, Я.В. Кондратюк, О.Й. Піскозуб, Г.А. Шинкаренко.</i> АДАПТИВНА СТАБІЛІЗАЦІЯ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ МІГРАЦІЇ ДОМШОК.....	127
<i>М.Ф. Копитко.</i> ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ШАРУВАТИХ ТІЛ	130

<i>М.Д. Коркуна, М.В. Делявський, Н.І. Берегова. ПРО УЗАГАЛЬНЕННЯ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ</i>	<i>134</i>
<i>О.С. Коссак, Я.Г. Савула. D-АДАПТИВНА МОДЕЛЬ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ НЕОДНОРІДНИХ СТРУКТУР</i>	<i>137</i>
<i>О.В. Костів. БАЗОВІ ОПЕРАТОРИ ОБРОБКИ ДЕРЕВОВИДНИХ СТРУКТУР</i>	<i>140</i>
<i>Р.Б. Кравець. БАГАТОВИМІРНА МОДЕЛЬ ДАНИХ У СИСТЕМАХ АНАЛІТИЧНОЇ ОБРОБКИ ІНФОРМАЦІЇ.....</i>	<i>142</i>
<i>М.М. Кундрат. МОДЕЛЬ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ТІЛА З ЛІНІЙНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ</i>	<i>145</i>
<i>В.М. Кухарський, Я.Г. Савула. ВИКОРИСТАННЯ ПРОЕКЦІЙНО- СІТКОВИХ МЕТОДІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ- ДИФУЗІЇ У ТОНКИХ КРИВОЛІНІЙНИХ КАНАЛАХ</i>	<i>148</i>
<i>О.І. Лаушник, Б.О. Попов. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ СПЛАЙНАМИ ІЗ ЗАДАНОЮ КІЛЬКІСТЮ ЛАНОК.....</i>	<i>153</i>
<i>В.А. Ліщинський, О.П. Хома. ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ СИНТЕЗУ СКІНЧЕННИХ АВТОМАТІВ</i>	<i>156</i>
<i>Василь Литвин. ОБ'ЄКТНО-ОРІЄНТОВАНИЙ ПІДХІД ДО ПРОЕКТУВАННЯ БАЗ ДАНИХ.....</i>	<i>158</i>
<i>В.М. Макар. ЧИСЕЛЬНІ СХЕМИ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ РОЗРАХУНКІВ НА ОСНОВІ h-АДАПТИВНОЇ ВЕРСІЇ МСЕ.....</i>	<i>160</i>
<i>М.Й. Михайлюк. ПРО ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ В ОДНОМУ КЛАСІ ПОТЕНЦІАЛІВ.....</i>	<i>162</i>
<i>А.О. Музичук. ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАГЕРА ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ</i>	<i>165</i>
<i>І.С. Муха, Н.Я. Савула. ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК ТИМОШЕНКА З ВИКОРИСТАННЯМ АПРОКСИМАЦІЙ ФУНКЦІЯМИ - "БУЛЬБАШКАМИ".....</i>	<i>171</i>
<i>Ю.В. Нікольський, В.В. Пасічник. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ, ЩО РОЗВИВАЄТЬСЯ.....</i>	<i>174</i>
<i>Т.М. Олійник, Б.А. Остудін. ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКИХ ПРОСТОРОВИХ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.....</i>	<i>176</i>
<i>М. Ю. Отир, В. В. Черняхівський. АЛГОРИТМИ АВТОМАТИЧНОГО РОЗПІЗНАВАННЯ ІЗОЛІНІЇ ВИСОТ ТОПОГРАФІЧНИХ КАРТ</i>	<i>180</i>

<i>А. Пелешишин. ПОБУДОВА ФОРМАЛЬНОЇ МОДЕЛІ WEB-СИСТЕМИ</i>	182
<i>А.А. Переймибіда. ПРО ДЕЯКІ ПІДХОДИ ДО РОБОТИ З РОЗРІДЖЕНИМИ МАТРИЦЯМИ ІЗ ГРУПОВАНИМИ НЕНУЛЬОВИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ</i>	185
<i>Б.О. Попов. ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ ДЛЯ ПОБУДОВИ БАЛАНСНИХ НАБЛИЖЕНЬ</i>	188
<i>П.С. Сеньо. РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ МЕТОДАМИ ІНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛІЗУ</i>	191
<i>Д.О. Тарасов. ЗАСОБИ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЦІЛІСНОСТІ ДАНИХ НА ОСНОВІ ПРОМИСЛОВИХ СТАНДАРТІВ</i>	194
<i>І.П. Твердохліб, Г.Г. Цегелик. МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ СТАБІЛІЗОВАНОЇ ФУНКЦІЇ СПОЖИВАННЯ</i>	196
<i>М.І. Філяк, Г.Г. Цегелик. ЕФЕКТИВНІСТЬ МЕТОДІВ ПОСЛІДОВНОГО ПЕРЕГЛЯДУ І БЛОЧНОГО ПОШУКУ ДЛЯ РІЗНИХ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ ЗВЕРТАННЯ ДО ЗАПИСІВ</i>	200
<i>Р.С. Хапко. ПРО МЕТОДИ РОТЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДРУГОЇ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО РІВНЯННЯ</i>	203
<i>Г.Г. Цегелик, Н.В. Федчишин. АПАРАТ НЕКЛАСИЧНИХ МАЖОРАНТ І ДІАГРАМ НЬЮТОНА ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ, ЗАДАНИХ ТАБЛИЧНО</i>	209
<i>С.М. Шахно, П.М. Недашковський. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ПРО НАЙМЕНШІ КВАДРАТИ</i>	211
<i>Й. Г. Шипка, Р. Й. Шипка. ОПТИМІЗАЦІЯ КЕРУВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ТОНКОЇ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ</i>	214
<i>Н.М. Щербина. ЧИСЕЛЬНО – АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ</i>	217
<i>Н.М. Щербина, О.В. Максимук. КОНТАКТНА МІЦНІСТЬ З'ЄДНАННЯ КОМПОЗИТНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ЖОРСТКИМ БАНДАЖЕМ</i>	219
<i>Г.М. Возняк, А.І. Кардаш. ОБІРВАНИЙ ШЛЯХ</i>	222
<i>О.М. Костовський, В.О. Костовський. РОБОТИ І.В. ВІТЕНЬКА В ЛОГІЦІ ТА ТЕОРІЇ ПРОГРАМУВАННЯ</i>	227

Збірник наукових праць

Міністерство освіти України
Львівський державний університет
імені Івана Франка

Вісник
Львівського університету

Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.
Випуск 50

ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ
ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Редактор Е.А. Главадська
Художник редактор Е.А. Каменщик
Технічний редактор С.Д. Довба
Комп'ютерна верстка А.А. Переймибіда

Підписано до друку . . 98. Папір офсетний. Вид. Замовне

Державне спеціалізоване видавництво "Світ"
при Львівському університеті
290000 Львів, вул. Дорошенка, 41

Надруковано видавничим центром
Львівського державного університету ім. І. Франка
290602 Львів, вул. Університетська, 1

ISSN 0201-758X.ISSN 0320-6572.

Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. мат., 1998, вип. 50, 1-240