УДК 511.364

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ІНВАРІАНТІВ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВЕЙЄРШТРАССА

Я. М. Холявка

Kholyavka Ya. M. On the approximation of the invariants connected with Weierstrass elliptic functions. Let $\wp_1(z), g_{2,1}, g_{3,1}, 2\omega, 2\omega_1$ and $\wp_2(z), g_{2,2}, g_{3,2}, 2\omega, 2\omega_2$ be the notations of the Weierstrass elliptic function theory. We estimate from below the simultaneous approximation $\omega, g_{2,1}, g_{3,1}, g_{2,2}, g_{3,2}$.

Нехай $\wp_1(z)$ та $\wp_2(z)$ – еліптичні функції Вейєрштрасса з одним спільним періодом, $2\omega, 2\omega_1$ та $2\omega, 2\omega_2$ – деякі фіксовані пари їх основних періодів, $g_{2,1}, g_{3,1}$ та $g_{2,2}, g_{3,2}$ – інваріанти $\wp_1(z)$ та $\wp_2(z)$ відповідно, $\sigma_1(z)$ та $\sigma_2(z)$ – асоційовані з $\wp_1(z)$ та $\wp_2(z)$ σ-функції Вейєрштрасса, $\xi_0, \dots, \xi_4$ – наближаючі алгебраїчні числа, n_i та L_i – їх степені та довжини, $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_0, \dots, \xi_4)$. Надалі будемо позначати $\Omega[A, B] = \{(x, s) : x = \pm 1, \dots, \pm(A-1);\ s = 0, 1, \dots, B-1\}$, $|f|_\Delta = \sup_{z \in \Delta} |f(z)|$, C_i – деякі сталі.

Відомо [1], що $\wp_1(z)$ та $\wp_2(z)$ при $\omega \in \mathbb{A}$ мають принаймні по одному трансцендентному інваріанту, тому серед чисел $\omega, g_{2,1}, g_{3,1}, g_{2,2}$ та $g_{3,2}$ є трансцендентні. У цій праці розглянуто наближення алгебраїчними числами інваріантів функцій $\wp_1(z)$ і $\wp_2(z)$ та їх спільного періоду ω.

Теорема. *Нехай*

$$N = n\left(\frac{\ln L_0}{n_0} + \min(n_1, n_2)\left(1 + \frac{\ln L_1}{n_1} + \frac{\ln L_2}{n_2}\right) + \min(n_3, n_4)\left(1 + \frac{\ln L_3}{n_3} + \frac{\ln L_4}{n_4}\right)\right).$$

Якщо існує стала $C = C(\omega, \omega_1, \omega_2)$ *така, що для довільних* t, m, m_1, m_2, $t \in \mathbb{R}$, $m, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $|m_1| \leqslant t$ *виконується*

$$|m\omega + m_1\omega_1 + m_2\omega_2| > C\exp(-t^2), \tag{1}$$

то існує деяка ефективна стала $\Lambda = \Lambda(w, w_1, w_2) > 0$ *така, що справджується оцінка*

$$|\omega - \xi_0| + |g_{1,2} - \xi_1| + |g_{1,3} - \xi_2| + |g_{2,2} - \xi_3| + |g_{2,3} - \xi_4| > \exp(-\Lambda N^3). \tag{2}$$

Сформулюємо твердження, які використаємо при доведенні теореми.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 11J89.

Ця робота підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук, грант N APU 051106.

Лема 1 ([2], с. 256). *Нехай* $s, l \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$(\wp^l(z))^{(s)} = \sum_{2a+3b+4c=s+2l} E(a,b,c,l,s)\wp(z)^a \wp'(z)^b \wp''(z)^c,$$

де всі числа $a, b, c, E(a,b,c,l,s)$ *– цілі і* $\sum_{2a+3b+4c=s+2l} E(a,b,c,l,s) \leqslant 6^{s+l}s!$.

Лема 2 ([4], с. 115). *Нехай* A, N_0, μ, m_0 *– натуральні числа,* $\mu > m_0$, $L_i(x_1,\ldots,x_\mu) = a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,\mu}x_\mu$, $a_{i,k} \in \mathbb{R}$, $|a_{i,k}| < A$, $i = 1,\ldots,m_0$.

Тоді існують цілі раціональні числа $c_1,\ldots,c_\mu$ *такі, що*

$$L_i(c_1,\ldots,c_\mu) < N_0^{-1}, \quad 0 < \max|c_k| < 2(A\mu N_0)^{\frac{m_0}{\mu-m}},\ k = 1,\ldots,\mu.$$

Лема 3 ([2], с. 46). *Нехай* $P \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$, $\deg_{x_i} P \leqslant \mathcal{N}_i$, $i=1,\ldots,n$; $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{A}$, $m = \deg \mathbb{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. *Якщо* $P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \not\equiv 0$, *то*

$$|P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)| \geqslant L(P)^{1-m} \prod_{i=1}^{n} L(\alpha_i)^{\frac{-\mathcal{N}_i m}{d(\alpha_i)}}.$$

Лема 4 ([4], с. 115). *Нехай* $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, $4\gamma^3 - \alpha\gamma - \beta = 0$. *Тоді*

$$\deg\gamma \geqslant \deg\mathbb{Q}(\alpha,\beta)\min{}^{-1}(d(\alpha), d(\beta)),$$

$$L(\gamma) < \exp(\deg\mathbb{Q}(\alpha,\beta)(d^{-1}(\alpha)\ln L(\alpha) + d^{-1}(\beta)\ln L(\beta) + 5)),$$

де $d(\gamma)$ *та* $L(\gamma)$ *– степінь та довжина алгебраїчного числа* γ.

Лема 5 ([5], с. 78). *Функції* $\sigma(z)$ *та* $\sigma(z)\wp(z)$ *цілі і для* $M > 1$ *виконуються оцінки* $|\sigma^2(z)\wp(z)|_{|z|\leqslant M}, |\sigma(z)|_{|z|\leqslant M} \leqslant C_1^{M^2}$.

Якщо ε *– віддаль від найближчого полюса* $\wp(z)$ *до* z_0 *і* $|z_0| \leqslant M$, *то* $|\sigma(z_0)| \geqslant \varepsilon C_2^{-M^2}$, *де* C_1, C_2 *– сталі, залежні тільки від основних періодів* $\wp(z)$.

Лема 6 ([3], с. 58). *Нехай* R_1, $R_2 \in \mathbb{R}$, $8 < 4R_1 < R_2$, $f(z)$ *регулярна в крузі* $|z| \leqslant R_2$, E *– множина з* $\mathcal{D}^2$ *точок, які належать кругу* $|z| \leqslant R_1$, *віддаль між якими для кожної пари точок не менше* ε, $0 < \varepsilon < 1$. *Тоді*

$$|f(z)|_{|z|\leqslant R_1} \leqslant 2|f(z)|_{|z|\leqslant R_2}\left(\frac{4R_1}{R_2}\right)^{\mathcal{D}^2 S} + 2\mathcal{D}R_1^{-1}\left(\frac{33R_1}{\varepsilon\mathcal{D}}\right)^{\mathcal{D}^2 S} \max_{x\in E, 0\leqslant s\leqslant S}\left|\frac{f^{(s)}(x)}{s!}\right|.$$

Лема 7 ([6]). *Нехай* $\alpha_\varkappa \in \mathbb{C}$, $y_t \in \mathbb{Z}$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l_1=0}^{q-1}\sum_{l_2=0}^{q-1} D_{k,l_1,l_2} z^k \wp_1^{l_1}(z)\wp_2^{l_2}(z),\ \Delta = \det(\wp_1^{l_1}(\alpha_\varkappa))_{l_1,\varkappa=0,\ldots,q-1} \neq 0,$$

$$\Delta(\varkappa) = \det(\wp_2^{l_2}(2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa))_{l_2,y_t=0,\ldots,q-1} \neq 0,$$

$$\Delta(y_t,\varkappa) = \det((2x\omega + 2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa)^k)_{k=0,\ldots,q_0-1; x=0,\ldots,\pm(x_1-1)} \neq 0,\ x_1 = \frac{q_0+1}{2},$$

$\Delta_{l_1,\varkappa}$ *– алгебраїчне доповнення елемента* $\wp_1^{l_1}(\alpha_\varkappa)$, $\Delta_{l_2,y_t}(\varkappa)$ *– алгебраїчне доповнення елемента* $\wp_2^{l_2}(2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa)$, $\Delta_{k,x}(y_t,\varkappa)$ *– алгебраїчне доповнення елемента* $(2x\omega + 2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa)^k$.

Тоді

$$D_{k,l_1,l_2} = \sum_{x=-x_1+1}^{x_1-1} \sum_{t=0}^{q-1} \sum_{\varkappa=0}^{q-1} f(2x\omega + 2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa) \frac{\Delta_{l_1,\varkappa}}{\Delta} \frac{\Delta_{l_2,y_t}(\varkappa)}{\Delta(\varkappa)} \frac{\Delta_{k,x}(y_t,\varkappa)}{\Delta(y_t,\varkappa)}.$$

Лема 8 ([6]). *Нехай $\wp(z)$ – еліптична функція Вейєрштрасса, $\widetilde{\omega_1}$ та $\widetilde{\omega_2}$ – деяка фіксована пара їх основних періодів, $\widetilde{\omega}(n,m) = 2n\widetilde{\omega_1} + 2m\widetilde{\omega_2}$, $0 < \delta < 1$, $Z_0(\delta)$ – множина точок основного паралелограма періодів, які не входять в області $|\widetilde{\omega}(n_1,n_2) - 2z| < 4\delta$ $(n_1, n_2 = 0, 1, 2)$. Розділимо $Z_0(\delta)$ на вісім частин $Z_i(\delta)$ (i=1,...,8) діагоналями основного паралелограма і прямими, що проходять через середини його сторін. До кожної з цих частин приєднаємо всі точки, віддалені не більше як на δ^2 від її межі. Отримані замкнені області позначимо $Y_i(\delta)$ (i=1,...,8). Тоді $\exists\delta_1 \forall\delta < \delta_1 \exists C_0$ такі, що для $z_1 = \widetilde{\omega}(m_1,m_2) + v_1$, $z_2 = \widetilde{\omega}(k_1,k_2) + v_2$, $m_1, m_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $v_1, v_2 \in Y_i(\delta)$ отримаємо*

$$|\wp(z_1) - \wp(z_2)| \geqslant C_0|v_1 - v_2|.$$

Лема 9 ([2], с. 107). *Нехай $a_1, ..., a_m$ – різні числа, Δ – визначник Вандермонда $|a_g^b|_{g=1,\dots,m,b=0,\dots,m-1}$, Δ_g^b – алгебраїчне доповнення елемента $|a_g^b|$. Тоді*

$$\sum_{b=0}^{m-1} \left| \frac{\Delta_g^b}{\Delta} \right| \leqslant \prod_{t=1,t\neq g}^{m} \frac{1 + |a_t|}{|a_g - a_t|}.$$

Доведення теореми. Нехай для достатньо великого $\lambda \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$|\omega - \xi_0| + |g_{1,2} - \xi_1| + |g_{1,3} - \xi_2| + |g_{2,2} - \xi_3| + |g_{2,3} - \xi_4| < \exp(-\lambda^9 N^3). \tag{3}$$

Позначимо через $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ твірні елементи поля $\mathbb{Q}(\xi_0, \dots, \xi_4)$,

$$s_0 = [\lambda^{5,5} N^2],\ x_0 = [\lambda N],\ x_1 = [\lambda^3 N],\ q = [\lambda^{2,25} N],\ q_0 = 2[\lambda^3 N] - 1. \tag{4}$$

Розглянемо функцію

$$\begin{gathered} f(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l_1=0}^{q-1} \sum_{l_2=0}^{q-1} C_{k,l_1,l_2} z^k \wp_1^{l_1}(z) \wp_2^{l_2}(z), \\ C_{k,l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{k,l_1,l_2,\tau}\zeta_\tau,\ C_{k,l_1,l_2,\tau} \in \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{5}$$

З леми 1 та (5) отримаємо

$$\begin{gathered} f^{(s)}((2x+1)\omega) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l_1=0}^{q-1} \sum_{l_2=0}^{q-1} \sum_{\tau=1}^{n} C_{k,l_1,l_2,\tau}\zeta_\tau \sum_{s_1+s_2+s_3=s} \frac{s!}{s_1!s_2!s_3!} \times \\ \times \frac{k!}{(k-s_3)!} ((2x+1)\omega)^{k-s_3} \prod_{i=1}^{2} \sum_{2a_i+4c_i=s_i+2l_i} d_{a_i,0,c_i}^{(i)}(l_i, s_i) \wp_i^{a_i}(\omega) (\wp_i''(\omega))^{c_i}. \end{gathered} \tag{6}$$

Розглянемо $f^{(s)}((2x+1)\omega)$ як лінійні форми від $C_{k,l_1,l_2,\tau}$. З леми 1 та (4) отримаємо оцінку коефіцієнтів $A_{k,l_1,l_2,\tau}(x,s)$ форм (6) при $(x,s) \in \Omega[4x_1, s_0]$

$$|A_{k,l_1,l_2,\tau}| < \exp(-C_1\lambda^{5,6} N^2 \ln N). \tag{7}$$

Покладемо $m_0 = 2(2x_0 - 1)$, $\mu = nq_0q^2$, $N_0 = [\exp(\lambda^{6,25}N^3)] + 1$. З леми 2, (4) та (7) випливає, що існує нетривіальний набір $C_{k,l_1,l_2,\tau}$, для яких справджуються оцінки

$$|f^{(s)}((2x+1)\omega| < \exp(-\lambda^{6,25}\, N^3), (x,s) \in \Omega[x_0, s_0],$$
$$|C_{k,l_1,l_2,\tau}| < \exp\left(5\lambda^{5,75}\frac{N^3}{n}\right). \tag{8}$$

Нехай β_1 – найближчий до $\wp_1(\xi_0)$ корінь рівняння $4z^3 - \xi_1 z - \xi_2 = 0$, β_2 – найближчий до $\wp_2(\xi_0)$ корінь рівняння $4z^3 - \xi_3 z - \xi_4 = 0$. Тоді з (3) та (4) отримаємо

$$|\wp_i(\omega) - \beta_i| < C_2 \exp\left(-\frac{\lambda^9}{3}N^3\right), \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

Якщо $\gamma_1 = 6\beta_1^2 - \xi_1/2$, $\gamma_2 = 6\beta_2^2 - \xi_3/2$, то з (9) матимемо

$$|\wp_i''(\omega) - \gamma_i| < C_3 \exp\left(-\frac{\lambda^9}{3}N^3\right), \quad i = 1, 2. \tag{10}$$

Визначимо числа $f_{x,s}$:

$$f_{x,s} = \sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l_1=0}^{q-1}\sum_{l_2=0}^{q-1}\sum_{\tau=1}^{n} C_{k,l_1,l_2,\tau}\zeta_\tau \sum_{s_1+s_2+s_3=s} \frac{s!}{s_1!s_2!s_3!}\frac{k!}{(k-s_3)!}\times$$
$$\times((2x+1)\xi_0)^{k-s_3}\prod_{i=1}^{2}\sum_{2a_i+4c_i=s_i+2l_i} d^{(i)}_{a_i,0,c_i}(l_i, s_i)\beta_i^{a_i}\gamma_i^{c_i}. \tag{11}$$

З (4), (9) і (10) для $(x,s) \in \Omega[4x_1, s_0]$ отримаємо

$$|f^{(s)}((2x+1)\omega) - f_{x,s}| < \exp\left(-\frac{\lambda^9}{4}N^3\right). \tag{12}$$

Для $(x,s) \in \Omega[x_0, s_0]$ з (8) і (12) випливає

$$|f_{x,s}| < \exp\left(-\frac{\lambda^{6,75}}{2}N^3\right). \tag{13}$$

Розглянемо числа $2^{s_0}f_{x,s}$ як значення многочленів $P_{x,s} \in \mathbb{Z}[\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \beta_1, \beta_2]$. При $(x,s) \in \Omega[4x_1, s_0]$

$$L(P_{x,s}) < \exp\left(6\lambda^{5,75}\frac{N^3}{n}\right). \tag{14}$$

З лемм 3, 4 і оцінки (14) для $f_{x,s} \neq 0, (x,s) \in \Omega[x_0, s_0]$ отримаємо

$$|f_{x,s}| > \exp(-\lambda^6 N^3). \tag{15}$$

Оцінки (13) та (15) суперечливі, тому

$$f_{x,s} = 0, \quad (x,s) \in \Omega[x_0, s_0]. \tag{16}$$

З (12) і (16) маємо

$$|f^{(s)}((2x+1)\omega)| < \exp\left(-\frac{\lambda^9}{4}N^3\right), \quad (x,s) \in \Omega[x_0, s_0]. \tag{17}$$

Покажемо, що (17) виконується для $(x,s) \in \Omega[2x_1, s_0]$.

Основна лема. *Нехай (16) і (17) виконуються для* $(x,s) \in \Omega[\widetilde{x}_p, s_0]$, $\widetilde{x}_p = 2^p x_0$, $2^p < 2\lambda^2$. *Тоді вони виконуються і для* $(x,s) \in \Omega[\widetilde{x}_{p+1}, s_0]$.

Доведення леми. Позначимо через δ паралелограм, який обмежує область $\{z : z = 2t\omega + 2t_1\omega_1, |t|, |t_1| < \widetilde{x}_{p+1}\}$,

$$|z|_\delta = C_4 \widetilde{x}_p. \tag{18}$$

Визначимо

$$\begin{gathered}\rho = \frac{1}{2}\min(|u\omega + u_1\omega_1|, |v\omega + v_2\omega_2|), u, u_1, v, v_2 \in \mathbb{Z},\, u^2 + u_1^2 \neq 0,\\ v^2 + v_2^2 \neq 0; \quad R_1 = C_4\widetilde{x}_p + \rho, \quad R_2 = 12R_1,\end{gathered} \tag{19}$$

де C_4 визначається в (18). Нехай $\Delta_i = \{z : z = (2t+1)\omega + +(2t_i+1)\omega_i, |t| \leqslant T, |t_i| \leqslant T_i, i = 1,2\}$, $\quad \delta_1 = \partial(\Delta_1 \cap \Delta_2)$.

Виберемо T, T_1 і T_2 найменшими цілими числами, для яких круг $|z| \leqslant R_2$ міститься в $\partial(\Delta_1 \cap \Delta_2)$. Покладемо

$$T = C_5\widetilde{x}_p,\, T_1 = C_6\widetilde{x}_p,\, T_2 = C_7\widetilde{x}_p,\, |z|_{\delta_1} < C_8\widetilde{x}_p, \tag{20}$$

$$F(z) = f(z)\sigma_1^{2q}(z)\sigma_2^{2q}(z). \tag{21}$$

З (20) і леми 5 отримаємо

$$|F(z)|_{\delta_1} < \exp\left(6\lambda^{5,75}\frac{N^3}{n} + 2C_9\lambda^{4,25}2^{2p}N^3\right). \tag{22}$$

З леми 5 і включення $(x,s) \in \Omega[\widetilde{x}_p, s_0]$ матимемо

$$|(\sigma_1^{2q}(z)\sigma_2^{2q}(z))^{(s)}|_{z=(2x+1)\omega} < \exp(\lambda^{5,7}N^2\ln N + 2C_9\lambda^{4,25}2^{2p}N^3). \tag{23}$$

Використовуючи припущення леми 1 і (23), для $(x,s) \in \Omega[\widetilde{x}_p, s_0]$ отримаємо таку оцінку:

$$|F^{(s)}((2x+1)\omega)| < \exp\left(-\frac{\lambda^9}{5}N^3\right). \tag{24}$$

З леми 6, (2), (19), (22) і (24) маємо, що

$$|F(z)|_{|z|\leqslant R_1} < \exp(-2^{2p}\lambda^{6,5}N^3). \tag{25}$$

Оскільки з леми 5 випливає, що для достатньо малого ε-околу $V(\varepsilon, (2x+1)\omega)$ точки $(2x+1)\omega$ при $|x| \leqslant \widetilde{x}_{p+1}$ виконується оцінка

$$\min_{z\in V(\varepsilon,(2x+1)\omega)} |(\sigma_1^{2q}(z)\sigma_2^{2q}(z))^{(s)}| > \exp(-2^{2p}\lambda^{4,35}N^3), \tag{26}$$

то з (21), (25) і (26) для $|x| \leqslant \widetilde{x}_{p+1}$ отримаємо

$$|f(z)|_{V(\varepsilon,(2x+1)\omega)} < \exp(-2^{p-1}\lambda^{6,5}N^3). \tag{27}$$

З (27) для $(x,s) \in \Omega[\widetilde{x}_{p+1}, s_0]$ випливає оцінка

$$|f^{(s)}((2x+1)\omega)| < \exp\left(-\frac{2^p}{3}\lambda^{6,5}N^3\right). \tag{28}$$

З (12) і (28) для $(x,s) \in \Omega[\widetilde{x}_{p+1}, s_0]$ отримаємо

$$|f_{x,s}| < \exp(-2^{p-2}\lambda^{6,5}N^3). \tag{29}$$

Оцінки (15) і (29) суперечливі, тому $f_{x,s} = 0, \quad (x,s) \in \Omega[\widetilde{x}_{p+1}, s_0]$, що разом з (12) і доводить основну лему.

Оцінимо $|C_{k,l_1,l_2}|$ зверху. Нехай δ_1', δ_1'' дорівнюють числу δ_1, визначеному в лемі 8, застосованій до $\wp_1(z), \wp_2(z)$ відповідно,

$$\delta_2 = |m\omega + m_1\omega_1 + m_2\omega_2|,\ m, m_2 \in \mathbb{Z},\ m_1 = 1, \ldots, 9. \tag{30}$$

Покладемо в лемі 8

$$\delta = \frac{1}{4}\min(\delta_1', \delta_1'', \delta_2, \rho). \tag{31}$$

Нехай $a = \frac{2\omega+\omega_1}{4} \in Y_1$, де Y_1 визначене в лемі 8, застосованій до $\wp_1(z)$. Виберемо ε_1 з умови $V(\varepsilon_1, a) = \{z : |z-a| < \varepsilon_1\} \subset Y_1$. Для $\alpha_\varkappa = \left(1 - \frac{\varkappa+1}{\lambda q}\right)a, \quad \varkappa = 0, 1, \ldots, (q-1)$, з леми 8 отримаємо

$$|\wp_1(\alpha_\varkappa) - \wp_1(\alpha_t)| > C_{10}(\lambda q)^{-1}, \quad \varkappa \neq t. \tag{32}$$

Тепер оцінимо знизу потрібні нам величини вигляду

$$|\wp_2(2y\omega_1 + \alpha_\varkappa) - \wp_2(2y'\omega_1 + \alpha_\varkappa)|, \quad y \neq y'.$$

Для цього використаємо лему 8, застосовану до $\wp_2(z)$. Нехай Y_1', Z_1' відповідають областям Y_1, Z_1 в лемі 8. Серед точок $2y\omega_1 + \alpha_\varkappa$, $y = 0, \pm1, \cdots \pm (x_1 - 1)$, виберемо ті, для яких існують такі $y_t, l, h \in \mathbb{Z}$, що $2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa + 2l\omega + 2h\omega_2 \in Y_1'$. Нехай існують такі $y, m, k \in \mathbb{Z}$, що $2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa = m\omega + k\omega_2 + 2\theta\delta$, $|\theta| < 1$. Покладемо

$$2(y+v)\omega_1 + \alpha_\varkappa = u_v\omega + w_v\omega_2 + \mu_v, \quad v = 1, \ldots, 9.$$

Тоді $\quad 2v\omega_1 = (u_v - m)\omega + (w_v - k)\omega_2 + \mu_v - 2\theta\delta$. З (30) і (31) отримаємо

$$|\mu_v| \geqslant |2v\omega_1 - (u_v - m)\omega - (w_v - k)\omega_2| - 2\delta > 2\delta.$$

Остання рівність показує, що з кожних дев'яти точок $2y\omega 1 + \alpha\varkappa$, $y = l, \ldots, l+8$, лише одна не належить області $Z_0'(\delta)$. Серед областей $Z_i'(\delta)$, $i = 1, \ldots, 8$, існує хоча б одна (нехай $Z_1'(\delta)$), якій належать не менше $\frac{1}{9}(2x_1 - 1)$ точок вигляду $2y\omega_1 + \alpha_\varkappa + 2m\omega + 2k\omega_2$, $y = 0, \pm1, \cdots \pm(x_1 - 1)$. Виберемо серед них рівно q і позначимо відповідні їм точки вигляду $2y\omega_1 + \alpha_\varkappa$ через $2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa$, $t = 0, \ldots, q-1$, $|y_t| < x_1$. Нехай

$$2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa = 2m_t\omega + 2k_t\omega_2 + \mu_t, \quad 2y_t'\omega_1 + \alpha_\varkappa = 2m_t'\omega + 2k_t'\omega_2 + \mu_t'.$$

З леми 8 і (1) отримаємо

$$|\wp_2(2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa) - \wp_2(2y_t'\omega_1 + \alpha_\varkappa)| > C_{11}|\mu_t - \mu_t'| > C_{12}\exp(-\lambda^6 N^2), \quad y \neq y'. \tag{33}$$

Згідно з лемою 9, (32) і (33),

$$\left|\frac{\Delta_{l_1,\varkappa}}{\Delta}\right| < \exp(\lambda^{3,5} N \ln N), \quad \left|\frac{\Delta_{l_2,y_t}(\varkappa)}{\Delta(\varkappa)}\right| < C_{13}^q (C_{12}\exp(-\lambda^6 N^2))^q < \exp(\lambda^{8,4} N^3),$$
$$\left|\frac{\Delta_{k,x}(y_t,\varkappa)}{\Delta(y_t,\varkappa)}\right| < C_{14}^{q_0} q_0^{q_0} < \exp(\lambda^5 N \ln N). \tag{34}$$

Оцінимо зверху $|f(2x\omega + 2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa)|$. Нехай $p_0 \in \mathcal{N}$, $\lambda^2 \leqslant 2^{p_0} < 2\lambda^2$, R_1, T, T_1, T_2 відповідає p_0 в (19) і (20). Тоді з (25) випливає

$$|F(z)|_{|z| \leqslant R_1} < \exp(-\lambda^{8,4} N^3). \tag{35}$$

Оскільки $V(\varepsilon_1, 2x\omega + 2y_t\omega_1) \subset \{z : |z| \leqslant R_1\}$, то оцінка (35) залишається правильною і для $z \in V(\varepsilon_1, 2x\omega + 2y_t\omega_1)$. З леми 5 випливає, що для тих самих z виконується нерівність

$$|\sigma_1^{2q}(z)\sigma_2^{2q}(z)| > \exp(-\lambda^{8,35}N^3). \tag{36}$$

З (21), (35) і (36) отримаємо

$$|f(z)|_{V(\varepsilon_1, 2x\omega+2y_t\omega_1)} < \exp\left(-\frac{\lambda^{8,35}}{2}N^3\right). \tag{37}$$

Використавши (34) і (37), з леми 2 матимемо

$$|C_{k,l_1,l_2}| < \exp\left(-\frac{\lambda^{8,5}}{3}N^3\right). \tag{38}$$

Оскільки $C_{k,l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{k,l_1,l_2,\tau}\xi_0^{u_0(\tau)} \cdot \ldots \cdot \xi_4^{u_4(\tau)}$, то їх можна розглядати як значення многочленів з $\mathbb{Z}[v_0, \ldots, v_4]$ у точці $(\xi_0, \ldots, \xi_4)$, довжини яких не перевищують $n \max |C_{k,l_1,l_2,\tau}|$, а степінь за змінною v_i не перевищує $n_i - 1$. З леми 3 для $C_{k,l_1,l_2} \neq 0$ отримаємо $|C_{k,l_1,l_2}| > \exp(-\lambda^7 N^3)$, що суперечить (38). Тому всі C_{k,l_1,l_2} дорівнюють нулю. Враховуючи, що серед $C_{k,l_1,l_2,\tau}$ є число відмінне від нуля, то серед C_{k,l_1,l_2} також є число відмінне від нуля. Отримана суперечність показує, що (3) не виконується. Вибравши $\Lambda \geqslant \lambda^9$, отримаємо, що виконується (2), тобто теорема правильна.

1. Schneider T. *Trascenden. periodisher Functionen. 2*// J. reine und angew. Math. – 1934. – 172, N 1. – P. 65–79.

2. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. – М.: 1982. – 311 с.

3. Reyssat E. *Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exp*// Bull. Soc. Math. France. – 1980. – N 1. – P.47–79.

4. Холявка Я.М. О совместных приближениях инвариантов эллиптической функции алгебраическими числами. – Диофантовы приближения, ч.2, Изд. МГУ, 1986. – С. 114-121.

5. Masser D. *Elliptic functions and transcendence*// Lect. Notes Math. – 1975. – Vol.437. – P.1–143.

6. Фельдман Н.И. *Эллиптический аналог одного неравенства А.О.Гельфонда*// Труды Моск. мат. о-ва. – 1968. – Т. 18. – С. 65-76.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997