УДК 512.553

СПЕКТР РОЗШАРОВАНИХ ДОБУТКІВ КІЛЕЦЬ

Р. В. Вовк

Vovk R.V. Spectrum of fiber products of rings. Torsion theory over fibre products of associative rings and spectrum as set of prime torsion theories are investigated. Connection between a spectrum of fibre product of rings and spectra of the appropriate multipliers is studied.

Дослідження розшарованих добутків об'єктів різних категорій займає вагоме місце в топології, алгебраїчній K-теорії, алгебраїчній геометрії, в теорії асоціативних кілець тощо. Ряд праць присвячено вивченню розшарованих добутків комутативних і некомутативних кілець [3-7], [10], [14], [15], проективних і ін'єктивних модулів над розшарованими добутками кілець [11], [18]. Разом з тим важливим є вивчення спектру розшарованого добутку кілець. Поряд із загальноприйнятим розумінням спектру в комутативному випадку існує відмінність при розгляді спектру некомутативних кілець. Існує ряд статтей, в яких досліджується спектр як множина всіх первинних ідеалів кільця. Загальновідомим є також поняття первинного скруту і вивчення спектру кільця як множини первинних скрутів, відомого ще в літературі як спектру Попеску. Дана праця присвячена дослідженню спектру розшарованого добутку кілець саме в такому розумінні. Основним результатом є теорема 9, яка показує структуру спектру розшарованого добутку кілець.

1. Основні терміни і позначення. Всі кільця вважатимемо асоціативними з одиницею, всі модулі – унітарні ліві модулі. Нехай $\mathcal{C}$ абелева категорія, $\alpha_1 : C_1 \to C_0$ і $\alpha_2 : C_2 \to C_0$ морфізми в $\mathcal{C}$. Розшарованим добутком морфізмів α_1 і α_2, або, іншими словами об'єктів C_1 і C_2 над C_0, є об'єкт C із $\mathcal{C}$ разом з такими морфізмами $\pi_1 : C \to C_1$ і $\pi_2 : C \to C_2$, що виконуються умови:

1) $\alpha_1\pi_1 = \alpha_2\pi_2$;

2) для кожного об'єкта X і будь-яких морфізмів $\xi_1 : X \to C_1$ і $\xi_2 : X \to C_2$, таких, що $\alpha_1\xi_1 = \alpha_2\xi_2$, існує і єдиний такий морфізм $\gamma : X \to C$, що $\pi_1\gamma = \xi_1$ і $\pi_2\gamma = \xi_2$. Діаграма

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & C_1 \arrow[d, "\alpha_1"] \\ C_2 \arrow[r, "\alpha_2"'] & C_0 \end{tikzcd}$$

називається діаграмою розшарованого добутку або універсальним квадратом. Розшарований добуток визначається однозначно, з точністю до ізоморфізму (див. [16]) і позначатимемо його через $C_1 \times_{C_0} C_2$.

Дуальним до розшарованого добутку є поняття корозшарованого добутку, який також визначається однозначно, з точністю до ізоморфізму (див. [16]). Корозшарований добуток позначатимемо $C_1 \sqcup_{C_0} C_2$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 13B30, 13D30.

У категорії $A\text{-}Mod$ розшарований добуток задається більш конкретно:

$$C_1 \times_{C_0} C_2 = \{(x,y) \in C_1 \times C_2 \mid \alpha_1(x) = \alpha_2(y) \in C_0\}.$$

Для корозшарованого добутку має місце зображення:

$$C_1 \sqcup_{C_0} C_2 = (C_1 \oplus C_2)/C', \text{ де } C' = \{(\beta_1(x), -\beta_2(x)) \mid x \in C_0\}.$$

У категорії асоціативних кілець Rings розшаровані і корозшаровані добутки також існують і задаються цілком аналогічним чином.

Нехай A_1, A_2, A_0 – кільця і задано гомоморфізми $f_1 : A_1 \to A_0$, $f_2 : A_2 \to A_0$. Побудуємо розшарований добуток A кілець A_1 і A_2 над A_0, який задається універсальним квадратом

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"'] & A_0 \end{tikzcd}.$$

Надалі будемо вважати, що f_2 і p_1 сюр'єктивні гомоморфізми. Використовуватимемо такі позначення:

$$\begin{aligned} P_1 &= Hom_A(A_1, -) : A\text{-}Mod \to A_1\text{-}Mod, \\ P_2 &= Hom_A(A_2, -) : A\text{-}Mod \to A_2\text{-}Mod, \\ F_1 &= Hom_{A_1}(A_0, -) : A_1\text{-}Mod \to A_0\text{-}Mod, \\ F_2 &= Hom_{A_2}(A_0, -) : A_2\text{-}Mod \to A_0\text{-}Mod. \end{aligned}$$

Деталі можна знайти в [9], [11].

Побудуємо розшарований добуток категорій $A_1\text{-}Mod$ і $A_2\text{-}Mod$. Позначимо через $\mathcal{C}$ категорію, об'єктами якої є трійки (M_1, M_2, α), де $M_1 \in A_1\text{-}Mod$, $M_2 \in A_2\text{-}Mod$ і $\alpha : F_2M_2 \to F_1M_1$ є A_0-ізоморфізмом. Морфізмами з об'єкта (M_1, M_2, α) в об'єкт (M_1', M_2', α') в категорії $\mathcal{C}$ є такі пари (σ_1, σ_2), де $\sigma_1 : M_1 \to M_1'$ – A_1-гомоморфізм і $\sigma_2 : M_2 \to M_2'$ – A_2-гомоморфізм, що діаграма

$$\begin{tikzcd} F_1M_1 \arrow[r, "F_1\sigma_1"] & F_1M_1' \\ F_2M_2 \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "F_2\sigma_2"'] & F_2M_2' \arrow[u, "\alpha'"'] \end{tikzcd}$$

є комутативною.

Категорія $\mathcal{C}$ є адитивною зі скінченними добутками (див., наприклад, [1], [8]).

Для кожного об'єкта $(M_1, M_2, \alpha) \in \mathcal{C}$ можна побудувати діаграму

$$\begin{tikzcd} M & M_1 \arrow[l, "\pi_1"'] \\ M_2 \arrow[u, "\pi_2"] & M_0 \arrow[l, "\varphi_2"] \arrow[u, "\varphi_1\alpha"'] \end{tikzcd},$$

яка є коуніверсальним квадратом в категорії $A\text{-}Mod$, де $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ і $M_0 = F_2M_2$. Отриманий модуль $M \in A\text{-}Mod$ є корозшарованим добутком модулів M_1 та M_2 над M_0.

Для кожного об'єкта $(M_1, M_2, \alpha) \in \mathcal{C}$ покладемо $M = T(M_1, M_2, \alpha)$. Тоді $T : \mathcal{C} \to A - Mod$ є функтором, який індукує еквівалентність між повною підкатегорією категорії $\mathcal{C}$, яка породжена об'єктами $(E_1, E_2, \alpha) \in \mathcal{C}$, де E_1 і E_2 – ін'єктивні A_1- і A_2-модулі, і повною підкатегорією категорії A-Mod, яка породжена ін'єктивними A-модулями (див. [11]).

Гратку всіх скрутів, визначених в категорії A-Mod, будемо позначати через A-$Tors$. Якщо τ і σ скрути в категорії A-Mod такі, що виконуються еквівалентні умови: 1) кожний τ-періодичний лівий A-модуль є σ-періодичним; 2) кожний σ-напівпростий лівий A-модуль є τ-напівпростим, писатимемо $\tau \leqslant \sigma$. Для будь-якого скруту τ в категорії A-Mod можна стверджувати, що $\xi \leqslant \tau \leqslant \chi$, де ξ – тривіальний скрут, а χ – невласний скрут.

Нагадаємо, що два ін'єктивних A-модулі E_1 і E_2 є еквівалентними, якщо кожен з них вкладається в прямий добуток копій іншого. Еквівалентні модулі є котвірними одного і того ж скруту.

Нехай S непорожня підмножина в A-$Tors$. Для кожного елемента $\tau \in S$ візьмемо модуль E_τ, який є ін'єктивним котвірним даного скруту τ. Тоді $E = \prod\limits_{\tau \in S} E_\tau$ є ін'єктивним лівим A-модулем. Скрут, копороджений модулем E, позначатимемо через $\bigwedge S$.

Якщо $\tau \in S$, то кожний τ-напівпростий лівий A-модуль вкладається в прямий добуток копій ін'єктивного модуля E_τ і, отже, в прямий добуток копій модуля E. Тому кожний такий модуль є також $\bigwedge S$-напівпростим. Звідси робимо висновок, що $\wedge S \leqslant \tau$ для кожного скруту $\tau \in S$.

Легко бачити, що $\bigwedge S$ є точною нижньою межею для S, де S – непорожня підмножина в A-$Tors$. Точну верхню межу множини S позначатимемо через $\bigvee S$. Це буде скрут $\bigwedge S'$, де S' – множина всіх тих скрутів σ в A-$Tors$, що $\tau \leqslant \sigma$ для кожного елемента $\tau \in S$. Відповідно до наведених вище позначень покладемо $\bigvee \varnothing = \xi$ і $\bigwedge \varnothing = \chi$. Таким чином, сім'я всіх скрутів A-$Tors$ є повною граткою.

Нагадаємо, що гомоморфізмом (антигомоморфізмом) граток $\mathcal{L}$ і $\mathcal{L}_1$ є відображення $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_1$ таке, що для будь-яких $a, b \in \mathcal{L}$ виконується

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \quad (f(a \vee b) = f(a) \wedge f(b)),$$

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \quad (f(a \wedge b) = f(a) \vee f(b)).$$

Відомо, що $a \leqslant b$ тоді і тільки тоді, коли $a = a \wedge b$, і, отже, гратковий гомоморфізм зберігає порядок. Аналогічно антигомоморфізм обертає порядок. Бієктивний гомоморфізм (антигомоморфізм) граток є ізоморфізмом (антиізоморфізмом).

Зрозуміло, що кожний кільцевий гомоморфізм $f : R \to S$ повинен індукувати певну відповідність між гратками скрутів R-$Tors$ і S-$Tors$. Така відповідність вивчалась у тому випадку, коли f є плоским епіморфізмом у категорії кілець. Вона випливає з результатів А. І. Кашу про поведінку скрутів в ситуації спряження між категоріями R-Mod та S-Mod. Деяку інформацію з цього наведено в [13] та [18].

2. Відповідність між скрутами в категоріях модулів, визначена гомоморфізмом кілець. У цьому параграфі ми ставимо за мету побудувати гомоморфізм граток $\widetilde{f}^{-1} : S\text{-}Tors \longrightarrow R\text{-}Tors$, який повинен відображати лівий спектр кільця S в лівий спектр кільця R. Нас будуть також цікавити ті властивості скрутів, які зберігаються при дії гомоморфізму $\widetilde{f}^{-1}$.

Наведемо спочатку формальне означення дії граткового гомоморфізму $\widetilde{f}^{-1}$ і переконаємося в його коректності. Після цього пояснимо мотиви, які викликають таке позначення цього гомоморфізму.

Нехай $\sigma \in S$-$Tors$ і M – деякий ін'єктивний котвірний скруту σ. Будемо розглядати M як R-модуль, структура якого на M задається за допомогою гомоморфізму f. Тоді через $\widetilde{f}^{-1}(\sigma)$ позначимо скрут в категорії R-Mod, копороджений ін'єктивною оболонкою $E({}_RM)$

модуля ${}_RM$. Нам потрібно переконатися, що дія $\widetilde{f}^{-1}$ не залежить від конкретного вибору ін'єктивного котвірного модуля M скруту σ. Іншими словами, нам необхідно встановити, що еквівалентні ін'єктивні S-модулі ${}_SM$ і ${}_SN$ в категорії S-Mod мають еквівалентні образи $E({}_RM)$ і $E({}_RN)$ в категорії R-Mod. Цей факт випливає з такої леми.

Лема 1. *Якщо $E_1 \geqslant E_2$ – ін'єктивні модулі в категорії S-Mod, то $E({}_RE_1) \geqslant E({}_RE_2)$ в категорії R-Mod.*

Доведення. Нехай ін'єктивний S-модуль E_1 є підмодулем ін'єктивного S-модуля $({}_SE_2)^I$, де I – деяка множина індексів. Тоді $(E({}_RE_2))^I$, розглядуваний як R-модуль, є ін'єктивним. Крім цього, $E({}_RE_1) \subseteq (E({}_RE_2))^I$, оскільки ${}_RE_1 \subseteq (E({}_RE_2))^I$. Отже, $E({}_RE_1) \geqslant E({}_RE_2)$. Лемуа доведено.

Лема 2. *Відображення $\widetilde{f}^{-1}$: S-$Tors \longrightarrow R$-$Tors$ є гомоморфізмом повних граток.*

Доведення. Нехай $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ – деяка сім'я скрутів у категорії S-Mod. Для кожного $i \in I$ виберемо деякий ін'єктивний котвірний E_i скруту σ_i. Тоді згідно з означенням ін'єктивним котвірним скруту $\sigma = \bigwedge\limits_{i\in I} \sigma_i$ буде модуль $\prod\limits_{i\in I} E_{\sigma_i}$. Отже, скрут $\widetilde{f}^{-1}(\sigma)$ копороджується ін'єктивним модулем $E({}_R(\prod\limits_{i\in I} E_i)) = (\prod\limits_{i\in I} E({}_RE_i))$. Тому $\widetilde{f}^{-1}(\bigwedge\limits_{i\in I} \sigma_i) = \bigwedge\limits_{i\in I} \widetilde{f}^{-1}(\sigma_i)$, бо скрут $\bigwedge \widetilde{f}^{-1}(\sigma_i)$ копороджується ін'єктивним модулем $\prod\limits_{i\in I} E({}_RE_i)$. Ін'єктивний котвірний модуль скруту $\bigvee \sigma_i$ будується таким чином. Нехай V – множина всіх скрутів з S-$Tors$, які не менші за всі скрути σ_i, $i \in I$. Для кожного $\tau \in V$ нехай E_τ деякий ін'єктивний котвірний скруту τ. Тоді ін'єктивним котвірним скруту $\bigvee\limits_{i\in I} \sigma_i$ буде модуль $\prod\limits_{\tau\in V} E_\tau$. Отже, $\bigvee\limits_{i\in I} \sigma_i = \bigwedge\limits_{\tau\in V} \tau$. Оскільки $\bigvee \sigma_i \geqslant \sigma_i$, то $\widetilde{f}^{-1}(\bigvee\limits_{i\in I} \sigma_i) \geqslant \widetilde{f}^{-1}(\sigma_i)$ для кожного $i \in I$. Звідси одержуємо нерівність $\widetilde{f}^{-1}(\bigvee\limits_{i\in I} \sigma_i) \geqslant \bigvee\limits_{i\in I} \widetilde{f}^{-1}(\sigma_i)$.

Встановимо тепер протилежну нерівність до цієї. Ми маємо, що

$$\widetilde{f}^{-1}(\bigvee_{i\in I} \sigma_i) = \widetilde{f}^{-1}(\bigwedge_{\tau\in V} \tau) = \bigwedge_{\tau\in V} f^{-1}(\tau).$$

Отже, ін'єктивним котвірним для скруту $\widetilde{f}^{-1}(\bigvee\limits_{i\in I} \sigma_i)$ буде модуль $\prod\limits_{\tau\in V} E({}_RE_\tau)$. Далі знайдемо ін'єктивний котвірний для скруту $\bigvee\limits_{i\in I} \widetilde{f}^{-1}(\sigma_i)$. Розглянемо множину W всіх скрутів з R-$Tors$, що не є меншими за всі $\widetilde{f}^{-1}(\sigma_i)$, $i \in I$. Оскільки $\widetilde{f}^{-1}(\sigma_i) \leqslant \widetilde{f}^{-1}(\tau)$ для будь-яких $i \in I$ і $\tau \in V$, то $\widetilde{f}^{-1}(V) \subseteq W$. Якщо насправді $\widetilde{f}^{-1}(V) = W$, то скрут $\bigvee \widetilde{f}^{-1}(\sigma_i)$ має цей самий котвірний $\prod\limits_{\tau\in V} E({}_RE_\tau)$ і ми одержимо потрібну рівність. Припустимо тепер, що $W \neq \widetilde{f}^{-1}(V)$. Тоді існує скрут $\tau_0 \in W \setminus \widetilde{f}^{-1}(V)$. такий, що $\tau_0 \geqslant \widetilde{f}^{-1}(\sigma_i)$ для кожного $i \in I$ і τ_0 не можна одержати як $\widetilde{f}^{-1}(\tau)$ для кожного $\tau \in V$. Нехай E_0 ін'єктивний котвірний для скруту τ_0. Переведемо E_0 в S-модуль подіявши функтором $Hom_R(S,-)$ і одержимо S-модуль $Hom_R(S, E_0)$, який є ін'єктивним S-модулем. Цей модуль задає скрут σ_0 в S-$Tors$. Як відомо, функтор $Hom_R(S,-)$ зберігає порядок між ін'єктивними модулями, і тому $\sigma_0 \geqslant \sigma_i$ для кожного $i \in I$. Тепер модуль $E_0' = Hom_R(S, E_0)$ розглянемо як R-модуль і нехай τ_0' скрут, ін'єктивним котвірним якого є $E({}_RE_0')$. Покажемо, що $\tau_0' = \tau_0$. Для цього досить встановити, що $E({}_RE_0') \leqslant E_0$ і $E_0 \leqslant E({}_RE_0')$. Розглянемо відображення

$$E({}_RE_0') = E\big({}_R(Hom_R(S, E_0))\big) \xrightarrow{\xi} \prod_S E_0,$$

яке кожному R-гомоморфізму $\alpha : S \longrightarrow E_0$ ставить у відповідність елемент $(\alpha(s))_{s\in S}$. Очевидно, що ξ є гомоморфізмом R-модулів. Воно ін'єктивне, оскільки з рівності $(\alpha(s))_{s\in S} = (\alpha'(s))_{s\in S}$ випливає, що $\alpha = \alpha'$. Ми одержали вкладення $E_0' \longrightarrow \prod_S E_0$, яке говорить, що $E_0' \geqslant E_0$. Лему доведено.

Нехай Λ – частково упорядкована множина. Нагадаємо, що функція ρ, визначена в категорії A-Mod із значеннями в Λ називається радикальною, якщо для кожної точної послідовності $0 \to N \to M$ в категорії A-Mod виконується $\rho(M) \leqslant \rho(N)$. Якщо Λ є граткою і $\rho : A\text{-}Mod \to \Lambda$ є радикальною функцією, то для кожного $\lambda \in \Lambda$ можна визначити іншу радикальну функцію $\rho' : A\text{-}Mod \to \Lambda$ за правилом $\rho' : M \mapsto \rho(M) \wedge \lambda$.

Якщо задано радикальну функцію $\rho : R\text{-}Mod \to \Lambda$, де Λ – частково упорядкована множина, то лівий A-модуль M називається ρ-первинним, якщо $\rho(M) = \rho(N)$ для будь-якого ненульового підмодуля N в M.

Функція $\chi(\_)$ є радикальною функцією, визначеною в A-Mod із значеннями в A-$Tors$. При цьому, кожному A-модулю M ставиться у відповідність скрут, копороджений ін'єктивною оболонкою $E(M)$. Модуль $M \in A\text{-}Mod$ є $\chi(\_)$-первинним тоді і тільки тоді, коли $\chi(M) = \chi(N)$ для будь-якого підмодуля N в M. Тобто ін'єктивні оболонки $E(M)$ і $E(N)$ копороджують один і той самий скрут. Кожний кокритичний лівий A-модуль є $\chi(\_)$-первинним.

Лема 3. *Нехай $f : A \to B$ – гомоморфізм кілець. Якщо модуль $M \in B\text{-}Mod$ є $\chi(\_)$-первинним, то він є $\chi(\_)$-первинним і як A-модуль.*

Доведення. Нехай модуль $M \in B\text{-}Mod$ є $\chi(\_)$-первинним. Тоді ін'єктивна оболонка $E(M)$ копороджує деякий скрут $\tau \in B\text{-}Tors$. Розглянемо $E(M)$ як A-модуль і знайдемо його ін'єктивну оболонку $\widetilde{E}(E(M))$. Позначимо через σ скрут, копороджений ін'єктивним модулем $\widetilde{E}(E(M))$.

Нехай $L \in A\text{-}Mod$ – будь-який ненульовий підмодуль A-модуля $E(M)$. Оскільки M є суттєвим в $E(M)$, то перетин $L' = L \cap M$ є ненульовим. Розглянемо B-модуль $BL' \subset {}_BM$. З того, що B-модуль M є $\chi(\_)$-первинним, отримуємо $\chi(BL') = \chi(M)$, тобто ін'єктивні модулі $E(BL')$ і $E(M)$ копороджують один скрут τ. Це означає, що існує деяка множина Ω така, що $E(M) \subset (E(BL'))^{\Omega}$. Розглядаючи ці котвірні як A-модулі, можна записати, що між їхніми ін'єктивними оболонками існує таке включення $\widetilde{E}(E(M)) \subset \widetilde{E}((E(BL'))^{\Omega})$.

Враховуючи те, що модуль M є суттєвим в $E(M)$ і $E(M)$ є суттєвим в $\widetilde{E}(E(M))$, M є суттєвим підмодулем ін'єктивного модуля $\widetilde{E}(E(M))$, а це означає, що останній є ін'єктивною оболонкою для модуля M, тобто справджується рівність $\widetilde{E}(M) = \widetilde{E}(E(M))$. Аналогічно $\widetilde{E}(L) = \widetilde{E}(E(L))$. Таким чином, ми можемо записати

$$\widetilde{E}(M) \subset \widetilde{E}((E(BL'))^{\Omega}) = (\widetilde{E}(E(BL')))^{\Omega} \subset (\widetilde{E}(E(L)))^{\Omega} = (\widetilde{E}(L))^{\Omega}.$$

Включення $\widetilde{E}(L) \subset \widetilde{E}(M)$ є очевидним.

Таким чином, ми отримали, що ін'єктивні A-модулі $\widetilde{E}(L)$ і $\widetilde{E}(M)$ є еквівалентними. Це означає, що $\chi(L) = \chi(M)$ і тому A-модуль M є $\chi(\_)$-первинним. Лему доведено.

Нагадаємо, що скрут $\tau \subset A\text{-}Tors$ є первинним тоді і тільки тоді, коли $\tau = \chi(M)$ для деякого τ-кокритичного модуля M.

Нехай дано гомоморфізм кілець $f : A \to B$, первинний скрут $\tau \in B\text{-}Tors$ і τ-кокритичний модуль $M \in B\text{-}Mod$, тобто $E(M)$ копороджує скрут τ. Тоді через $\widetilde{f}^{-1}(\tau)$ позначатимемо скрут, копороджений ін'єктивною оболонкою $\widetilde{E}(E(M))$ в категорії $A\text{-}Mod$.

Лема 4. *Нехай $f : A \to B$ – гомоморфізм кілець. Якщо скрут $\tau \in B\text{-}Tors$ є первинним, то скрут $\widetilde{f}^{-1}(\tau) \in A\text{-}Tors$ також є первинним.*

Доведення. Нехай τ – первинний скрут в категорії $B\text{-}Mod$. Тоді існує деякий кокритичний B-модуль M, такий, що $\tau = \chi(M)$, тобто, іншими словами, ін'єктивна оболонка $E(M)$ копороджує скрут τ. B-модуль $E(M)$ можна разглядати як A-модуль. Позначимо через $\widetilde{E}(E(M))$ ін'єктивну оболонку модуля $E(M)$ в категорії $A\text{-}Mod$. Модуль M є суттєвим підмодулем в $E(M)$, який є суттєвим в $\widetilde{E}(E(M))$, тому можна стверджувати, що $\widetilde{E}({}_AM) = \widetilde{E}(E(M))$.

Розглянемо скрут $\sigma \in A\text{-}Tors$, копороджений ін'єктивним модулем $\widetilde{E}({}_AM)$. Покажемо, що модуль M є σ-кокритичним. Для цього досить переконатися, що M є σ-напівпростим (це випливає безпосередньо з означення) і кожний ненульовий підмодуль $N \subset M$ є σ-щільний в M. Для перевірки останнього розглянемо фактор-модуль M/N. Припустимо, що $Hom_A(M/N, \widetilde{E}({}_AM)) \neq 0$. Тоді існує ненульовий гомоморфізм $g : M/N \to \widetilde{E}({}_AM)$. Оскільки модуль $E(M)$ є суттєвим в $\widetilde{E}({}_AM)$, перетин $K = g(M/N) \cap E(M)$ є ненульовим. Тоді $g^{-1}(K) = K'/N$ для деякого підмодуля $K' \subset M$. Тому $g(K'/N) \subset E(M)$ і $g(K'/N) \neq 0$. Враховуючи те, що модуль M є B-модулем, отримуємо, що K' і N є теж B-модулями і $g : K'/N \to E(M)$ є B-гомоморфізмом.

Таким чином, ми отримали, що існує ненульовий гомоморфізм $g \in Hom_B(K'/N, E(M))$, але це неможливо, бо модуль M є τ-кокритичним, і кожний його підмодуль, а тому і K', є τ-кокритичним. Звідси отримуємо, що модуль N є τ-щільним, тобто K'/N є τ-періодичним, а це означає, що $Hom_B(K'/N, E(M)) = 0$. Отримана суперечність доводить, що $Hom_A(M/N, \widetilde{E}(M)) = 0$; це означає, що A-модуль M/N є σ-періодичним, тобто N – σ-щільний в M і M є σ-кокритичним A-модулем. Тому, згідно з означенням, скрут $\sigma \in A\text{-}Tors$ є первинним. Лему доведено.

Теорема 5. *Нехай $f : A \to B$ – епіморфізм кілець, $M \in A\text{-}Mod$. Ін'єктивна оболонка $E(M)$ копороджує первинний скрут $\tau \in A\text{-}Tors$ тоді і тільки тоді, коли ін'єктивний B-модуль $Hom_A(B, E(M))$ копороджує первинний скрут $\sigma \in B\text{-}Tors$. Крім цього, $\tau = \widetilde{f}^{-1}(\sigma)$.*

Доведеня. Розглянемо модуль $E_1 = Hom_A(B, E(M)) \in B\text{-}Mod$.

Оскільки функтор $Hom_A(B, -)$ зберігає ін'єктивність, модуль E_1 є ін'єктивним. З того, що гомоморфізм $f : A \to B$ є сюр'єктивним, випливає існування мономорфізму $h : Hom_A(B, E(M)) \to E(M)$. Даний гомоморфізм отримується в результаті дії функтора $Hom_A(-, E(M))$ на послідовність $Kerf \to A \to B \to 0$. Точність зліва даного функтора, який є контраваріантним, забезпечує ін'єктивність гомоморфізму h.

Нехай τ – первинний скрут у категорії $A\text{-}Mod$ і M – довільний τ-кокритичний A-модуль. Такий модуль обов'язково існує і його ін'єктивна оболонка $E(M)$ копороджує скрут τ.

Нехай σ – скрут, копороджений модулем E_1. Нехай N – довільний підмодуль в E_1. Розглянемо фактор-модуль E_1/M і множину гомоморфізмів $Hom_B(E_1/M, E_1)$. Припустимо, що існує ненульовий гомоморфізм $g : E_1/N \to E_1$. Тоді

$$h \circ g : E_1/N \to E(M) \text{ і } (h \circ g)(E_1/N) \neq 0.$$

Оскільки модуль M є суттєвим в $E(M)$, то $L = (h \circ g)(E_1/N) \cap M \neq 0$. Тоді отримаємо модуль $L'/N = (h \circ g)^{(-1)}(L)$, який є підмодулем в E_1/N. Крім цього, маємо вкладення $E_1/N \to E(M)/N$, тому можемо знайти ненульовий модуль $L'' = L' \cap M$. Таким чином, ми отримали фактор-модуль $L''/N \subset M/N$ і ненульовий гомоморфізм $h \circ g : L''/N \to E(M)$. Але це неможливо, бо модуль M є τ-кокритичним і для будь-якого підмодуля $N \subset M$ фактор-модуль M/N є τ-періодичним. Таким чином, кожний підмодуль K в M/N повинен бути τ-періодичним, тобто $Hom_A(K, E(M)) = 0$. Отже, ми отримали, що кожний підмодуль в E_1 є σ-щільним. Те, що модуль E_1 є σ-напівпростим, випливає безпосередньо з означення. Тому, можна сказати, що модуль E_1 є σ-кокритичним, а це означає, що скрут σ є первинним.

Навпаки, нехай модуль $E_1 = Hom_A(B, E(M)) \in B\text{-}Mod$ копороджує первинний скрут $\sigma \in B\text{-}Tors$. Модуль E_1 є ще й A-модулем, і його ін'єктивна оболонка $E(E_1)$ копороджує деякий скрут $\tau' \in A\text{-}Tors$. За лемою 4 скрут $\tau' = f^{-1}(\sigma)$ є первинним. З того, що модуль $E(E_1)$ є ін'єктивним A-модулем і існує мономорфізм $h : Hom_A(B, E(M)) \to E(M)$, отримуємо існування такого мономорфізму $\xi : E(M) \to E(E_1)$, що діаграма

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r] \arrow[d] & E(M) \arrow[dl, "\xi"] \\ E(E_1) & \end{tikzcd}$$

є комутативною.

Так само можна побудувати комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r] \arrow[d] & E(E_1) \arrow[dl, "\eta"] \\ E(M) & \end{tikzcd},$$

де η є мономорфізмом.

Існування мономорфізмів ξ і η вказує на те, що ін'єктивні модулі $E(E_1)$ і $E(M)$ є еквівалентними, тобто вони копороджують один і той же скрут. Тому отримуємо, що $\tau = \tau_1$. Теорему доведено.

3. Структура спектру розшарованого добутку кілець. Множину всіх первинних скрутів у гратці $A\text{-}Tors$ позначатимемо через $A\text{-}Sp$ і назвемо її спектром кільця A.

Лема 6. *Нехай $f : A \to B$ – гомоморфізм кілець, $M \in A\text{-}Mod$, M – τ-кокритичний для деякого $\tau \in A\text{-}Sp$. Якщо $M \in B\text{-}Mod$, то існує скрут $\sigma \in B\text{-}Sp$, такий, що M є σ-кокритичним, і $\tau = \widetilde{f}^{-1}(\sigma)$.*

Доведення. Нехай M – τ-кокритичний A-модуль. Тоді M є τ-напівпростим і будь-який підмодуль $N \subset M$ є τ-щільним в M, тобто $Hom_A(M/N, E(M)) = 0$.

Розглянемо ін'єктивну оболонку $\widetilde{E}(M)$ модуля M як B-модуля. Очевидно, що кожний A-підмодуль $N \subset M$ є B-підмодулем. Нехай σ – скрут, копороджений ін'єктивним модулем $\widetilde{E}(M)$. Покажемо, що скрут σ є первинним.

Припустимо, що $Hom_B(M/N, \widetilde{E}(M)) \neq 0$. Нехай таким ненульовим гомоморфізмом буде $g : M/N \to \widetilde{E}(M)$. Оскільки модуль M є суттєвим в $\widetilde{E}(M)$, то $g(M/N) \cap M = L \neq 0$. Тому існує B-модуль L', такий, що $L'/N \subset M/N$ і $g(M/N) = L$. Таким чином, отримаємо, що існує ненульовий гомоморфізм $g : L'/N \to \widetilde{E}(M)$. B-модуль $\widetilde{E}(M)$ є одночасно і A-модулем, і його ін'єктивна оболонка $E(\widetilde{E}(M)) \in A\text{-}Mod$ містить підмодуль M, який є суттєвим в $\widetilde{E}(M)$, а тому і в $E(\widetilde{E}(M))$. Отже, $E(\widetilde{E}(M)) = E(M)$. Звідси отримуємо $\widetilde{E}(M) \subseteq E(M)$. Таким чином, ми маємо, що гомоморфізм g діє із L'/N в $E(M)$, що є неможливо. Отримана суперечність доводить σ-періодичність фактор-модуля M/N, тобто

σ-щільність будь-якого підмодуля N в M. Те, що модуль M є σ-напівпростим очевидно. Отже, B-модуль M є σ-кокритичним, і згідно з означенням скрут σ є первинним. Лему доведено.

Для описання структури спектру розшарованого добутку кілець встановимо такий факт.

Лема 7. *Нехай $f : A \to B$ – епіморфізм кілець, $\tau \subset A\text{-}Sp$. Якщо $Kerf \not\subseteq Ann_A M$ для кожного τ-кокритичного A-модуля M, то скрут, копороджений модулем $Hom_A(B, E(KerfM))$, є невласним.*

Доведення. Нехай τ – первинний скрут в категорії $A\text{-}Mod$ і M – будь-який τ-кокритичний лівий A-модуль. Тоді $KerfM \neq 0$. Оскільки $KerfM$ є підмодулем в M, то $KerfM$ є τ-кокритичним і $\chi(KerfM) = \chi(M)$. З того, що гомоморфізм f є сюр'єктивним випливає

$$Hom_A(B, E(KerfM)) = Ann_{E(KerfM)} Kerf = \{m \in E(KerfM) | Kerfm = 0\}$$

(див.[11]). Оскільки модуль $KerfM$ є суттєвим в $E(KerfM)$, то

$$Ann_{E(KerfM)} Kerf \cap KerfM = L \neq 0.$$

Для будь-якого $l \in L$ маємо, що $Kerfl = 0$. Модуль L є підмодулем в M, тому він є τ-кокритичним і $KerfL = 0$, тобто $Kerf \subseteq Ann_A L$. Це суперечить умові леми, тому $L = 0$. Звідси отримуємо, що $Ann_{E(KerfM)} Kerf = 0$. Таким чином, скрут, копороджений ін'єктивним модулем $Hom_A(B, E(KerfM))$, є невласним. Лему доведено.

Введемо наступні позначення:

$$S_0 = \{\Phi^{-1}(\tau_0) \mid \tau_0 \in C\text{-}Sp\};$$

$$S_1 = \{p_1^{-1}(\tau_1) \mid \tau_1 \in A_1\text{-}Sp \;\; i \;\; Kerf_1 \not\subseteq Ann_{A_1} M \; i \; \chi(M) = \tau_1, \text{ де } M \in A_1\text{-}Mod\ \};$$

$$S_2 = \{p_2^{-1}(\tau_2) \mid \tau_2 \in Imp_2\text{-}Sp \;\; i \;\; Kerf_2 \not\subseteq Ann_{Imp_2} M \; i \;\; \chi(M) = \tau_1,$$
$$\text{де } M \in Imp_2\text{-}Mod\ \},$$

Теорема 8. *Нехай $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ - розшарований добуток кілець, заданий універсальним квадратом.*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p_1} & A_1 \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ A_2 & \xrightarrow[f_2]{} & A_0 \end{array},$$

де p_1 – епіморфізм, $C = f_1(A_1) \cap f_2(A_2)$ – підкільце в A_0, $\Phi = f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2$ – гомоморфізм кілець $A \to A_0$. Якщо S – множина всіх власних первинних скрутів в категорії $A\text{-}Mod$, тоді $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$.

Доведення. Розглянемо ядро гомоморфізму Φ. Відповідно до зображення розшарованих добутків в категорії модулів можна записати, що

$$Ker\Phi = (Kerf_1, Kerf_2) = (Kerf_1, 0) \oplus (0, Kerf_2) = Kerp_2 \oplus Kerp_1.$$

Нехай $\tau \in S$ і M – будь-який τ-кокритичний A-модуль. Якщо $Ker\Phi \subseteq Ann_A M$, тоді для будь-яких $c \in C \subseteq A_0$ і $m \in M$ покладемо $c \cdot m = \Phi^{-1}(c)m$. Задане таким чином множення є коректним, оскільки якщо існують такі елементи $a_1, a_2 \in A$, що $\Phi(a_1) = \Phi(a_2) = c$, то

$a_1 - a_2 \in Ker\Phi$ і $(a_1 - a_2) \cdot m = 0$, тобто $a_1 m = a_2 m$. Існування прообразу $\Phi^{-1}(c)$ для кожного елемента $c \in C$ випливає з того, що обмеження гомоморфізму Φ на підкільце C є епіморфізмом. Таким чином M є C-модулем. За теоремою 5 існує скрут $\sigma \in C\text{-}Sp$, такий, що модуль M є σ-кокритичним і $\tau = (\Phi|_C)^{-1}(\sigma)$.

Якщо $Ker\Phi \not\subseteq Ann_A M$, тоді можливі такі випадки.

1) $Kerp_1 \subseteq Ann_A M$ і $Kerp_2 \not\subseteq Ann_A M$. У цьому випадку, оскільки p_1 є епіморфізмом, отримуємо ситуацію, подібну до описаної вище, і можемо знайти скрут $\sigma_1 \in A_1\text{-}Sp$, такий, що $p_1^{-1}(\sigma_1) = \tau \in S$.

2) $Kerp_1 \not\subseteq Ann_A M$ і $Kerp_2 \subseteq Ann_A M$. У цьому випадку так само можна знайти скрут $\sigma_2 \in Imp_2\text{-}Sp$, такий, що $p_2^{-1}(\sigma_2) = \tau \in S$.

3) $Kerp_1 \not\subseteq Ann_A M$ і $Kerp_2 \not\subseteq Ann_A M$. Тоді $Kerp_1 M \neq 0$ і $Kerp_2 M \neq 0$. Використовуючи зображення розшарованого добутку кілець, можна записати, що

$$A_1 \times_{A_0} A_2 = \{(a_1, a_2)A_1 \times A_2 \mid f_1(a_1) = f_2(a_2)\}$$

$$\text{і} \quad A_1 \times_{A_0} Imp_2 = \{(a_1, a_2)A_1 \times Imp_2 \mid f_1(a_1) = f_2(a_2)\}.$$

Наведені розшаровані добутки кілець є рівними. Справді, включення

$$A_1 \times_{A_0} Imp_2 \subseteq A_1 \times_{A_0} A_2$$

виконується, оскільки $Imp_2 \subseteq A_2$. Покажемо справедливість оберненого включення. Нехай $(a_1, a_2) \in A_1 \times_{A_0} A_2$; тоді з комутативності діаграми рзшарованого добутку отримаємо, що $f_1 p_1(a_1, a_2) = f_2 p_2(a_1, a_2)$. Гомоморфізми p_1 і p_2 є проекціями на першу і другу компоненту відповідно, тому $f_1(a_1) = f_2(a_2)$, де $a_2 \in Imp_2$. Таким чином, ми отримали рівність

$$A = A_1 \times_{A_0} A_2 = A_1 \times_{A_0} Imp_2.$$

За лемою 7 скрути τ_1 і τ_2 копороджені модулями

$$Hom_A(A_1, E(Kerp_1 M)) \text{ і } Hom_A(Imp_2, E(Kerp_2 M))$$

є невласними скрутами з $A_1\text{-}Tors$ і $Imp_2\text{-}Tors$.

Оскільки скрут τ є первинним і модуль M є τ-кокритичним, то скрут τ копороджується також модулями $E(Kerp_1 M), E(Kerp_2 M)$ і $E(Kerp_1 M \cap Kerp_2 M)$. Нехай $\tau_0 \in A_0\text{-}Tors$ – скрут, копороджений модулем $F_2 P_2(E(Kerp_1 M \cap Kerp_2 M))$. Тоді розшарований добуток скрутів $\tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2$ дорівнює скруту τ.

Розшарований добуток невласних скрутів τ_1 і τ_2 є невласним. Тому скрут τ є невласним. Підсумовуючи сказане, отримуємо, що кожний власний скрут в категорії $A\text{-}Mod$ належить одній із множин S_0, S_1 або S_2. Те, що $S_1 \subseteq S$, $S_2 \subseteq S$ і $S_0 \subseteq S$ прямо випливає із леми 4. Теорему доведено.

1. Басс Х. Алгебраическая K-теория. – М.: Мир, 1973.
2. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. – М.: Мир, 1972. – 259с.
3. Вовк Р.В. *Абсолютно σ-чистые модули над расслоенным произведением колец* // VI симпозиум по теории колец, алгебр и модулей, Львов, 1990, Тезисы сообщений, С.33.
4. Вовк Р.В., Комарницький М.Я. *Розшаровані добутки деяких некомутативних нетерових кілець* // Алгебра і топологія, Тематичний збірник наукових праць, Київ, 1993. – С.26–32.

5. Вовк Р.В. *Розшаровані добутки скрутів* // Математичні студії. – 1997. – Т.7, N2. – С.113-124.
6. Вовк Р.В. *Кільця дробів розшарованого добутку кілець* // Вісник Львівського університету, серія механіко-математична. – 1997. – В.47. – С.5-16.
7. Вовк Р.В. *Про відносно нетерові модулі над розшарованим добутком кілець* // Міжнародна алгебраїчна конференція присвячена пам'яті Л.М.Глускіна, (Слов'янськ, 25-29 серпня). - 1997. - С.79.
8. Милнор Дж. Введение в алгебраическую K-теорию. – М.: Мир, 1974.
9. Anderson F., Fuller K. Rings and categories of modules. – Berlin: Springer-Verlag, 1974. – 339p.
10. Facchini A. *Fibre product and Morita duality for commutative rings* // Rend. Sem. Math. Univ. Padova. – 1981. – V. 67, P.143 – 156.
11. Facchini A., Vamos P. *Injective modules over pullbacks* // J. London Math. Soc. – 1985. – V.31,N.2. – P.425 – 438.
12. Gabriel P. *Des catégories abéliennes* // Bull. Soc. Math. France. – 1962. – V. 90. – P.323 – 448.
13. Golan J.S. Torsion theories. – New York: J. Willey & Sons, 1986. – 651p.
14. Ogoma T. *Fibre products of Noetherian rings and their applications* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1985. –V. 97. – P.231 – 241.
15. Ogoma T. *Fibre products of Noetherian rings* // Advanced Studies in Pure Mathematics 11. – 1987. – P.173 – 182.
16. Stenström B. Rings of quotients. – Berlin: Springer-Verlag. – 1975. – 309p.
17. Vovk R.V. *On a spectrum of fibre product of rings* // Representation theory and computer algebra, (Kyiv, March 18-23), – 1997. – P.46.
18. Wiseman A.N. *Proective modules over pullback rings* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1985. – V. 97. – P.399 – 406.

Стаття надійшла до редколегії 31.03.1998