УДК 512.581.2

ПРО ХАРАКТЕРИЗАЦІЮ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ОБ'ЄКТА В ДЕКАРТОВО ЗАМКНЕНІЙ КАТЕГОРІЇ

Р. Є. Кокорузь

Kokoruz' R. E. On the characterization of the object of integers in cartesian closed category. The axiom of integers is considered in cartesian closed categories. The object of integers in this category is characterized as a universal object in some auxiliary category. The axiom of integers and natural numbers' object in arbitrary elementary topos are equivalent.

У працях П.Джонстона [1] і К.Малвея [2] запропоновані деякі методи побудови об'єкта цілих чисел (ОЦЧ) у топосах з об'єктом натуральних чисел (ОНЧ). К.Зауз в [3] дав аксіоматичне означення ОЦЧ, незалежне від аксіоми ОНЧ. Мета цієї статті – отримати характеризацію об'єкта цілих чисел як універсального об'єкта у деякій спеціальній категорії і виділити клас категорій, в яких такий об'єкт існує.

Нехай $\mathfrak{K}$ – довільна декартово замкнена категорія. Вслід за Заусом, введемо до розгляду таку аксіому.

ZO *Існують об'єкт* $\mathbf{Z}$ *і такі стрілки* $o \in Hom_{\mathfrak{K}}(\mathbf{1}, \mathbf{Z})$ *і* $s \in Aut_{\mathfrak{K}}(\mathbf{Z})$, *що для довільного об'єкта* $A \in |\mathfrak{K}|$ *і довільних стрілок* $x : \mathbf{1} \to A$, $f : A \to B$, *де* f *– ізострілка, існує єдина стрілка* $h : \mathbf{Z} \to A$, *яка робить діаграму*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "o_{\mathbf{Z}}"] \arrow[dr, "x"'] & \mathbf{Z} \arrow[r, "s"] \arrow[d] & \mathbf{Z} \arrow[d] \\ & A \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd} \tag{1}$$

комутативною.

Категорію $\mathfrak{K}$ з аксіомою **ZO** називатимемо категорією з ОЦЧ. Зауважимо, що якщо в категорії $\mathfrak{K}$ виконується аксіома **ZO** , то $Hom_{\mathfrak{K}}(\mathbf{1}, \mathbf{Z}) \neq \emptyset$ і, взагалі, $\mathbf{Z} \ncong \mathbf{1}$. Тому в діаграмі (1) стрілкою $\mathbf{o}$ може бути будь-яка стрілка $\mathbf{1} \to A$. Надалі для зручності зафіксуємо яку-небуть стрілку такого вигляду і позначимо її через $\mathbf{o_Z} : \mathbf{1} \to \mathbf{Z}$.

Теорема 1. *Якщо в категорії* $\mathfrak{K}$ *існує об'єкт цілих чисел, то він єдиний з точністю до ізоморфізму.*

Доведення. З комутативності діаграми (1) випливає, що в категорії $\mathfrak{D}$ діаграм вигляду $\mathbf{1} \xrightarrow{x} A \xrightarrow{f} A$, де $A \in |\mathfrak{K}|$, $f \in Aut_{\mathfrak{K}}(A)$, діаграма $\mathbf{1} \xrightarrow{o_{\mathbf{Z}}} \mathbf{Z} \xrightarrow{s} \mathbf{Z}$ є початковим

1991 *Mathematics Subject Classification.* 18D15, 18B25.

об'єктом. Оскільки у довільній категорії два початкові об'єкти ізоморфні, то $\mathbf{Z}$ – єдиний з точністю до ізоморфізму об'єкт, що володіє такою властивістю.

Теорема 2. *[3]. Нехай $\mathfrak{K}$ – декартово замкнена категорія з ОЦЧ. Тоді для довільної діаграми $A \xrightarrow{h_0} B \xrightarrow{f} B$, де $f : B \to B$ – автоморфізм, існує єдина стрілка $h : A \times \mathbf{Z} \to B$, що робить діаграму*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "{(id_A, o_{\mathbf{Z}} \circ !)}"] \arrow[dr, "h_0"'] & A \times \mathbf{Z} \arrow[r, "id_A \times s"] \arrow[d, "h"] & A \times \mathbf{Z} \arrow[d, "h"] \\
& B \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd} \tag{2}$$

комутативною.

Доведення. Оскільки категорія $\mathfrak{K}$ декартово замкнена, то вона допускає експоненціювання. Нехай морфізм $\hat{h}_0 : \mathbf{1} \to B^A$ експоненційно приєднаний до стрілки $h_0 : A \to B$. Тоді, оскільки $f^A : B^A \to B^A$ – автоморфізм, то для діаграми $\mathbf{1} \xrightarrow{\hat{h}_0} B^A \xrightarrow{f^A} B^A$ існує єдина стрілка $\hat{h} : \mathbf{Z} \to B^A$ така, що діаграма вигляду (1) є комутативною. Тоді експоненційно приєднана до неї стрілка $h : A \times \mathbf{Z} \to B$, яка визначається як композиція $\mathbf{ev} \circ (id_A \times \hat{h}) : A \times \mathbf{Z} \to B$, робить діаграму (2) комутативною, причому h – єдина така стрілка внаслідок бієкції $Hom_{\mathfrak{K}}(\mathbf{Z}, B^A) \cong Hom_{\mathfrak{K}}(A \times \mathbf{Z}, B)$. Теорему доведено.

Зазначимо, що попередня теорема є аналогом теореми Фрейда для натуральночислового об'єкта (див.[4]). Це дозволяє, використовуючи схему, описану в [5, гл. 15], отримати характеризацію ОЦЧ як деякого універсального об'єкта категорії.

Позначимо через $\mathfrak{K}^*$ допоміжну категорію, об'єктами якої є $\mathfrak{K}$-автоморфізми, а $\mathfrak{K}^*$-стрілками з $A^* : A \to A$ в $B^* : B \to B$ є $\mathfrak{K}$-стрілки $h : A \to B$, для яких діаграма

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "A^*"'] & B \arrow[d, "B^*"] \\
A \arrow[r, "h"] & B
\end{tikzcd}$$

є комутативною.

Теорема 3. *Нехай $\mathfrak{K}$ – декартово замкнена категорія.*
*1. $\mathfrak{K} \models$**ZO** тоді і тільки тоді, коли забуваючий функтор з $\mathfrak{K}^*$ в $\mathfrak{K}$, що переводить довільний об'єкт $A^* : A \to A$ з $\mathfrak{K}^*$ в об'єкт A з $\mathfrak{K}$, має спряжений зліва.*
2. ОЦЧ є універсальною стрілкою з фінального об'єкта у цей функтор.

Доведення. 1. Нехай $\mathbf{G} : \mathfrak{K}^* \to \mathfrak{K}$ – стираючий функтор і $\mathbf{G}(A^* : A \to A) = A$. Припустимо, що $\mathbf{G}$ має спряжений зліва $\mathbf{F} : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}^*$. Позначимо автоморфізм $\mathbf{F}(\mathbf{1})$ через $\mathbf{Z}^* : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, а одиницю спряження $\eta_1 : \mathbf{1} \to \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{1}))$ – через $o_{\mathbf{Z}} : \mathbf{1} \to \mathbf{Z}$. Тоді пара $(\mathbf{F}(\mathbf{1}), \eta_1)$ вільна над $\mathbf{1}$. Це означає,що для довільного $\mathfrak{K}^*$-об'єкта A^* і довільної стрілки $x : \mathbf{1} \to \mathbf{G}(A^*)$ існує єдина така стрілка $h : \mathbf{F}(\mathbf{1}) \to A^*$, для якої діаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "{}^*\eta_1"] \arrow[dr, "x"'] & \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{1})) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{G}(h)"] & \mathbf{F}(\mathbf{1}) \arrow[d, "h"] \\
& \mathbf{G}(A^*) \arrow[r] & A^*
\end{tikzcd}$$

є комутативною. Позначимо автоморфізм $\mathbf{F}(\mathbf{1})$ через $\mathbf{Z}^* : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, а одиницю спряження $\eta_\mathbf{1} : \mathbf{1} \to \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{1}))$ – через $o_\mathbf{Z} : \mathbf{1} \to \mathbf{Z}$. Тоді діаграми

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "o"] \arrow[dr, "x"'] & \mathbf{Z} \arrow[d, "h"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{Z} \arrow[r, "\mathbf{Z}^*"] \arrow[d, "h"] & \mathbf{Z} \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "A^*"] & A \end{tikzcd}$$

є комутативними. Отже, $(\mathbf{Z}, \mathbf{F}(\mathbf{1}), \eta_\mathbf{1})$ є об'єктом цілих чисел в $\mathfrak{K}$.

Навпаки, нехай $\mathfrak{K} \models \mathbf{ZO}$. Розглянемо функтор $\mathbf{F} : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}^*$, який переводить $\mathfrak{K}$-об'єкт A в ізострілку $id_A \times s : A \times \mathbf{Z} \to A \times \mathbf{Z}$, а $\mathfrak{K}$-стрілку $f : A \to B$ в стрілку $f \times id_\mathbf{Z} : A \times \mathbf{Z} \to B \times \mathbf{Z}$. Оскільки $\mathfrak{K}$ допускає експоненціювання, то за теоремою 2 для довільного автоморфізму $B^* : B \to B$ і довільної стрілки $h_o : A \to B$ існує єдина стрілка h, для якої діаграма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\langle id_A, o_A \rangle"] \arrow[dr, "h_0"'] & A \times \mathbf{Z} \arrow[r, "id_A \times s"] \arrow[d, "h"] & A \times \mathbf{Z} \arrow[d, "h"] \\ & B \arrow[r, "B^*"] & B \end{tikzcd}$$

є комутативною (тут $o_A = o_\mathbf{Z} \circ !$, де $! : A \to \mathbf{1}$). Тоді є комутативною і діаграма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "h_0"'] & \mathbf{G}(\mathbf{F}(A)) \arrow[d, "h"] \\ & \mathbf{G}(B^*) \end{tikzcd} .$$

Таким чином, виникла ситуація спряження $\mathbf{F} \dashv \mathbf{G}$. Одиницею спряження $\eta_\mathbf{1}$ є стрілка $\langle id_\mathbf{1}, o_\mathbf{Z} \rangle : \mathbf{1} \to \mathbf{1} \times \mathbf{Z}$, від якої, враховуючи природний ізоморфізм $\mathbf{Z} \cong \mathbf{1} \times \mathbf{Z}$, приходимо до стрілки $o_\mathbf{Z} : \mathbf{1} \times \mathbf{Z}$.

2. Як було зазначено вище, пара ($\mathbf{Z} \xrightarrow{s} \mathbf{Z}$, $\mathbf{1} \xrightarrow{o} \mathbf{Z}$) є вільною над $\mathbf{1}$ стосовно $\mathbf{G}$, тобто, вона є універсальною стрілкою з $\mathbf{1}$ в стираючий функтор $\mathbf{G} : \mathfrak{K}^* \to \mathfrak{K}$.

Нагадаємо, що в елементарному топосі $\mathcal{E}$ існує об'єкт натуральних чисел (ОНЧ), якщо в ньому виконується аксіома.

NNO. *Існують об'єкт $\mathbf{N} \in |\mathcal{E}|$ і стрілки $o : \mathbf{1} \to \mathbf{N}, s_0 : \mathbf{N} \rightarrowtail \mathbf{N}$ такі, що для довільного об'єкта $A \in |\mathcal{E}|$ і стрілок $x : \mathbf{1} \to A$ і $f : A \to A$ існує єдина стрілка $h : \mathbf{N} \to A$, для якої діаграма*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "o"] \arrow[dr, "x"'] & \mathbf{N} \arrow[r, tail, "s_0"] \arrow[d] & \mathbf{N} \arrow[d] \\ & A \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

є комутативною.

Лема 1. *Нехай $(\mathbf{N}, o, s_0)$ – об'єкт натуральних чисел в топосі $\mathcal{E}$. Тоді*
1. $\mathbf{N} \cong \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1}$;
2. існує ізострілка $\phi : \mathbf{N} \cong \mathbf{1} + s_0(\mathbf{N})$;
3. $s_0(\mathbf{N}) \cong \mathbf{N}$.

Доведення цієї леми можна знайти в [1] або [5].

Теорема 4. $\mathcal{E} \models$ **NNO** *тоді і тільки тоді, коли* $\mathcal{E} \models$**ZO**.

Доведення. Необхідність. Нехай $(\mathbf{N}, o, s_0)$ – об'єкт натуральних чисел у топосі $\mathcal{E}$, і нехай $\eta : \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ – ізострілка, існування якої забезпечене лемою 1. Позначимо $\theta = \eta^{-1} : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1}$ і розглянемо стрілку $s = \theta + \eta : \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N} \to \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N}$. Оскільки θ і η – ізострілки, то s – ізострілка (вона мономорфна і епіморфна, в чому легко переконатись). За стрілку η можна взяти стрілку $o_{\mathbf{N}} + s_0$, якщо врахувати умови 2, 3 леми 1. Отже, діаграма $\mathbf{1} \xrightarrow{i_1} \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N} \xrightarrow{i_2 \circ \eta} \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N}$ задовольняє аксіому **NNO** (i_1,i_2 – вкладення в першу і другу компоненти відповідно). Тоді для довільної діаграми $\mathbf{1} \xrightarrow{x} A \xrightarrow{f} A$, де $f \in Aut_{\mathcal{E}}(A)$, існує єдина стрілка $h_1 : \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N} \to A$, для якої діаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "x"'] & \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N} \arrow[r, "i_2 \circ \eta"] \arrow[d, "h_1"] & \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N} \arrow[d, "h_1"] \\
 & A \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

є комутативною. Аналогічно, існує єдина стрілка $h_2 : \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1} \to A$, для якої діаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "x"'] & \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1} \arrow[r, "\theta + id_1"] \arrow[d, "h_2"] & \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1} \arrow[d, "h_2"] \\
 & A \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

є комутативною. Тоді відображення h, яке є амальгамою стрілок h_1 і h_2, робить діаграму

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "x"'] & \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N} \arrow[r, "\theta + \eta"] \arrow[d, "h"] & \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N} \arrow[d, "h"] \\
 & A \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

комутативною. Оскільки h_1 і h_2 визначаються однозначно, то h – єдина стрілка, яка робить цю діаграму комутативною. Отже, в топосі $\mathcal{E}$ об'єкт $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N}$ разом зі стрілками $i_2 : \mathbf{1} \to \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N}$ і $s = \theta + \eta$ є об'єктом цілих чисел.

Доведення другої частини теореми опирається на допоміжні твердження; ми формулюємо їх у вигляді чотирьох лем, у кожній з яких $\mathcal{E}$ позначає довільний елементарний топос.

Лема 2. *Кожний комутативний квадрат*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"] & B \arrow[d, "\alpha"] \\
C \arrow[r, "g"] & D
\end{tikzcd}$$

де $f : A \to B$ *і* $g : C \to D$ *– ізострілки в топосі* $\mathcal{E}$, *є універсальним.*

Доведення. За стрілками g і α побудуємо декартовий квадрат

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] & & \\ & K \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\alpha^*"] & B \arrow[d, "\alpha"] \\ & C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

Оскільки в топосі зворотні образи зберігають моно- і епістрілки, а g – ізострілка, то g^* – також ізострілка. За умовою $\alpha \circ f = g \circ \beta$. Тому існує єдина стрілка $k : A \to K$, яка робить всю діаграму комутативною. Оскільки $g^* \circ k = f$, то $k = g^{*-1} \circ f$ – ізострілка, тобто $A \cong K$, а звідси випливає, що зовнішній периметр діаграми є універсальним квадратом.

Лема 3. *[5, гл.7]. Якщо квадрат*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & B \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

є універсальним, то існує стрілка $h : f(A) \to g(C)$, для якої правий квадрат діаграми

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "f^*"] \arrow[d, "u"] & f(A) \arrow[r, tail, "\mathrm{im} f"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, two heads, "g^*"] & g(C) \arrow[r, tail, "\mathrm{im} g"] & D \end{tikzcd}$$

також універсальний (тут всі стрілки з топоса $\mathcal{E}$).

Лема 4. *[3, тв.3] Нехай $(\mathbf{Z}, o_{\mathbf{Z}}, s)$ – об'єкт цілих чисел у топосі $\mathcal{E}$. Тоді існує стрілка $a : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ (операція додавання на $\mathbf{Z}$), для якої $a \circ \langle id_{\mathbf{Z}}, o_{\mathbf{Z}} \rangle = id_{\mathbf{Z}}$, $a \circ (id_{\mathbf{Z}} \times s) = s \circ a$.*

Лема 5. *[4] $\mathcal{E} \models$**NNO** тоді і тільки тоді, коли існує монострілка $f : A \rightarrowtail A$ і елемент $x : \mathbf{1} \to A$ такі, що квадрат*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, tail, "f"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "x"] & A \end{tikzcd}$$

є універсальним.

Тепер, нехай $(\mathbf{Z}, o_{\mathbf{Z}}, s)$ – об'єкт цілих чисел в топосі $\mathcal{E}$. Тоді за аксіомою **ZO** існує єдина стрілка $h : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, для якої комутативні діаграми:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "o_{\mathbf{Z}}"] \arrow[dr, "o_{\mathbf{Z}}"'] & \mathbf{Z} \arrow[d, "h"] \\ & \mathbf{Z} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{Z} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"] & \mathbf{Z} \arrow[d, "h"] \\ \mathbf{Z} \arrow[r, "s \circ s"] & \mathbf{Z} \end{tikzcd}$$

З леми 4 випливає, що $a \circ \Delta \circ s = a \circ \langle s, s \rangle = s \circ s \circ a \circ \Delta$, тобто $h = a \circ \Delta$, Неважко бачити, що $a \circ \Delta$ – монострілка. За лемою 5 достатньо показати, що існує елемент $x : \mathbf{1} \to \mathbf{Z}$, для якого $h(\mathbf{Z})$ і x є диз'юнктивними.

Нехай $\mathbf{Z} \xrightarrow{h^*} A \xrightarrow{\mathrm{im}h} \mathbf{Z}$ — епі-монорозклад стрілки $h : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$. Оскільки за лемою 2 зовнішній периметр діаграми

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z} \arrow[r, two heads, "h^*"] \arrow[d, "s"] & A \arrow[r, tail, "\mathrm{im}h"] \arrow[d, "\hat{s}"] & \mathbf{Z} \arrow[d, "s\circ s"] \\
\mathbf{Z} \arrow[r, two heads, "h^*"] & A \arrow[r, tail, "\mathrm{im}h"] & \mathbf{Z}
\end{tikzcd}$$

є універсальним квадратом, то внаслідок леми 3 існує стрілка $\hat{s} : A \to A$, для якої правий і лівий квадрати також універсальні. Зауважимо ще, що $\hat{s}$ – ізострілка. Легко бачити, що h^* – ізоморфізм, тому трійка $(A, h^* \circ o_{\mathbf{Z}}, \hat{s})$ задовольняє аксіому $\mathbf{ZO}$ і $A \cong \mathbf{Z}$.

Розглянемо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "o_{\mathbf{Z}}"] \arrow[dr, "i_1"'] & \mathbf{Z} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "g"] & \mathbf{Z} \arrow[d, "g"] \\
 & \mathbf{1} \sqcup \mathbf{1} \arrow[r, "\sigma"] & \mathbf{1} \sqcup \mathbf{1}
\end{tikzcd} .$$

Тут $i_1 : \mathbf{1} \to \mathbf{1} \sqcup \mathbf{1}$ – ін'єкція в першу компоненту, σ – перестановка компонент, $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{1} \sqcup \mathbf{1}$ – єдина стрілка, що робить цю діаграму комутативною. Нехай $f : K \rightarrowtail \mathbf{Z}$ – стрілка, що отримується підйомом стрілки $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ вздовж стрілки $[\top, \bot] \circ g : \mathbf{Z} \to \Omega$. Тоді

$$\chi_f = [\top, \bot] \circ g = [\top, \bot] \circ \sigma \circ \sigma \circ g = [\top, \bot] \circ g \circ s \circ s = \chi_f \circ s \circ s.$$

Отже, χ_f є характеристичною стрілкою підоб'єкта $A \rightarrowtail \mathbf{Z}$ і $f = \mathrm{im}h$.

У діаграмі

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r, tail] \arrow[d, tail, "!"] & K \arrow[r] \arrow[d, tail, "f"] & \mathbf{1} \arrow[d, "\top"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "s\circ o_{\mathbf{Z}}"] & \mathbf{Z} \arrow[r, "\chi_f"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

правий квадрат універсальний за означенням χ_f. Завдяки тому, що $\bot : \mathbf{1} \to \Omega$ є характеристичною стрілкою підоб'єкта $! : \mathbf{0} \rightarrowtail \mathbf{1}$ і $g \circ s \circ o_{\mathbf{Z}} = \sigma \circ g \circ o_{\mathbf{Z}} = \sigma \circ i_1 = i_2$, отримуємо рівність $\chi_f \circ s \circ o_{\mathbf{Z}} = [\top, \bot] \circ i_2 = \bot$; тому зовнішній квадрат у вищезгаданій діаграмі універсальний. Звідси випливає, що лівий квадрат також універсальний, тому підоб'єкти $f : K \rightarrowtail \mathbf{Z}$ і $s \circ o_{\mathbf{Z}} : \mathbf{1} \to \mathbf{Z}$ диз'юнктивні. Остаточно, отримуємо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathbf{0} \arrow[r, "!"] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[d, "s\circ o_{\mathbf{Z}}"] \\
\mathbf{Z} \arrow[r, two heads, "h^*"] & A \arrow[r, tail, "\mathrm{im}h"] & \mathbf{Z},
\end{tikzcd}$$

де обидва малі квадрати універсальні і, тим більше, універсальним є зовнішній квадрат. Це завершує доведення теореми.

1. Джонстон Р. Теория топосов. – М.;1986.
2. Mulvey C. *Intuitionistic algebra and representation of rings* // Mem. of Amer. Akad. of Sci. – 1983. – Vol.148, N 1. – P.3–56.
3. Szasz C. *Das objekt "Ganze Zahlen" in einem elementaren topos* // Analele sti. Univ. Lasi Sec. Math. – 1985. – Vol.1a, N 7. – P.88–89.
4. Freid P. *Aspects of topoi* // Bull. Austr. Math. Soc. – 1972. – Vol.7, N 1. – P.1–76.
5. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. – М.;1983.

Стаття надійшла до редколегії 06.03.1998