УДК 517.576.

ПРО МАКСИМАЛЬНИЙ ЧЛЕН ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ З КОМПЛЕКСНИМИ ПОКАЗНИКАМИ І МОНОТОННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

М. Р. Луцишин

Lutsyshyn M.R. On the maximal term of the entire Dirichlet series with complex exponents and monotonic coefficients. Let $F(z)$ be an entire function represented by a Dirichlet series. We establish the condition under which the relation $F(z) = (1+o(1))\mu(z)$ as $|z| \to +\infty$ $(z \in \gamma)$ holds outside of a sufficiently small set E, $\iint_E \frac{dxdy}{|z|^2} < +\infty$, $z = x + iy$, where $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln|\mu(tz)|}{t} = +\infty\}$ and $\mu(z)$ is the maximal term of the Dirichlet series.

Для цілих функцій $F(z)$, зображуваних абсолютно збіжними в $\mathbb{C}$ рядами Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \tag{1}$$

де $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$ $(n \geqslant 0)$ у праці [1] встановлено, що умова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mu_{n+1} - \mu_n} < +\infty, \tag{2}$$

де (μ_n) – послідовність $\left(\ln \dfrac{1}{|a_n|}\right)$ перенумерована за зростанням, є достатньою і необхідною для того, щоб для кожної функції вигляду (1) з фіксованою послідовністю (μ_n) співвідношення

$$M(x,F) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\} \sim m(x,F) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\} \sim$$
$$\sim \mu(x,F) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\{|a_n|e^{x\lambda_n} : n \geqslant 0\} \tag{3}$$

виконувалось при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної логарифмічної міри, тобто такої, що $\int\limits_{E\cap[1;+\infty)} d\ln x < +\infty$. При цьому припускається, що

$$\lambda_n < \sup\{\lambda_j : j \geqslant 0\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Delta \leqslant +\infty \quad (n \geqslant 0). \tag{4}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

З точки зору внутрішніх властивостей ряду вигляду (1) співвідношення (3), зокрема, означають, що максимальний член $\mu(x, F)$ домінує в (1) над іншими членами ряду. У даній замітці встановимо подібну властивість для абсолютно збіжних в $\mathbb{C}$ рядів вигляду (1) з комплексними показниками (λ_n), $\lambda_n \in \mathbb{C}$, які визначають цілі функції. Позначимо через H клас таких функцій і для $F \in H$ визначимо

$$\mu_F(z) = \max\{|a_n|e^{\mathrm{Re}(z\lambda_n)} : n \geqslant 0\},\ \ \nu_F(z) = \max\{n : |a_n|e^{\mathrm{Re}(z\lambda_n)} = \mu_F(z)\},$$
$$\check{\mu}_F(z) = \mu_F(z)e^{\mathrm{iIm}(z\lambda_{\nu_F(z)})},$$

а також визначимо множину $K_F = \{z : \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t}\ln\mu_F(tz) = +\infty\}$. Зауважимо, що $z \in K_F$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $\alpha > 0$, $\alpha z \in K_F$. Крім цього $z \in K_F$ лише в тому випадку, якщо $\sup\{\mathrm{Re}(z\lambda_n) : n \geqslant 0\} = +\infty$. Нехай (μ_n) – така послідовність, як і вище. Справедливе твердження.

Теорема 1. *Якщо для цілої функції $F \in H$ виконується умова* (2), *то для кожної множини K такої, що $\overline{K} \subset K_F$ співвідношення*

$$F(z) = (1 + o(1))\,\check{\mu}_F(z) \tag{5}$$

справджується при $z \to \infty$ $(z \in K \setminus E)$ рівномірно по $z \in K$, де $E \subset \mathbb{C}$ – деяка множина така, що

$$\tau(E \cap \{z : |z| \geqslant 1\}) < +\infty,\ \tau(E) \overset{\mathrm{def}}{=} \int \frac{d\tau_1(z)}{|z|^2},$$

τ_1 – міра Лебега на площині.

Доведення. Йдучи за [1], визначимо

$$\delta(l,j) = (j - l + 1)^{-1-\varepsilon}\sum_{m=l}^{j}(\mu_{m+1} - \mu_m)^{-1}, 0 < \varepsilon < 1,$$

$$\delta_k = \max\{\delta(l,j) : 0 \leqslant l \leqslant k-1 \leqslant j < +\infty\}\,(k \geqslant 1), \delta_0 = \delta_1.$$

Тоді, якщо збіжний ряд (2), то (див.[1]) знайдеться послідовність $c_k \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$, $c_0 = 0$, така, що $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\varepsilon_k < +\infty$, $0 \leqslant \varepsilon_k \overset{\mathrm{def}}{=} c_k\delta_k < \dfrac{1}{2}$ $(k \geqslant 0)$. Відзначимо також, що (див.[1])

$$\sum_{n\neq\nu}\exp\{-c_\nu|\mu_n - \mu_j|\} = o(1) \tag{6}$$

при $\nu \to +\infty$.

Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $\mu_n = -\ln|a_n|$ $(n \geqslant 0)$. Нехай $z_\theta = e^{i\theta}$, $\theta \in [0; 2\pi]$ – фіксоване число таке, що $z_0 \in K_F$. Розглянемо ряд

$$f(\sigma) = f_\theta(\sigma) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{\sigma\mu_n}, \qquad b_n = \exp\{\mathrm{Re}(z_\theta \cdot \lambda_n)\}.$$

Покажемо, що центральний індекс

$$\nu(\sigma, f) \overset{\mathrm{def}}{=} \max\{n : b_n e^{\sigma\mu_n} = \mu(\sigma, f)\} \to +\infty$$

при $\sigma \to -0$. Справді, при $\sigma = -\frac{1}{t}$, $t > 0$, $b_n e^{\sigma\mu_n} = \left(|a_n| e^{\mathrm{Re}(te^{i\theta}\cdot\lambda_n)}\right)^{1/t} \to 0$ $(n \to +\infty)$, тому для кожного $\sigma < 0$ маємо $\nu(\sigma, f) < +\infty$. Оскільки $\sup\{b_n : n \geqslant 0\} = +\infty$ і $\varliminf_{\sigma\to-0} \mu(\sigma, f) \geqslant \varliminf_{\sigma\to-0} b_n e^{\sigma\mu_n} = b_n (n \geqslant 0)$, то $\mu(\sigma, f) \uparrow +\infty$ $(\sigma \to -0)$, а, отже, $\nu(\sigma, f) \to +\infty \quad (\sigma \to -0)$.

Нехай (σ_n) – послідовність точок стрибка $\nu(\sigma, f)$, тобто, якщо $\sigma \in [\sigma_n, \sigma_{n+1})$, то $\nu(\sigma, f) = n$. Якщо ж $\nu(\sigma_{n+1} - 0, f) = n$ та $\nu(\sigma_{n+1}, f) = n + p$, то вважаємо $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+2} = \ldots = \sigma_{n+p} < \sigma_{n+p+1}$. Зауважимо, що $\sigma_n \to -0 \quad (n \to +\infty)$.

Якщо тепер $\sigma \in [\sigma_n, \sigma_{n+1})$, то рівності

$$\nu(\sigma(1 \pm \varepsilon_{\nu(\sigma,f)}), f) = \nu(\sigma, f) \tag{7}$$

виконуються одночасно для тих σ, що належать $\left[\frac{\sigma_n}{1+\varepsilon_n}, \frac{\sigma_{n+1}}{1-\varepsilon_n}\right)$. Тобто, для всіх $\sigma \in (-\infty; 0) \setminus E(\theta)$ $\left(E(\theta) \overset{def}{=} \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left([\sigma_n; \frac{\sigma_n}{1+\varepsilon_n}) \cup [\frac{\sigma_{n+1}}{1-\varepsilon_n}, \sigma_{n+1})\right)\right)$ правильні рівності (7). Для логарифмічної міри множини $E(\theta)$, отже, маємо

$$l_0\text{-meas}\, E(\theta) \overset{def}{=} \int\limits_{E(\theta)\cap[-1;0)} d \ln \frac{1}{|\sigma|} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln(1+\varepsilon_n) + \ln(\frac{1}{1-\varepsilon_n})\right) \leqslant$$

$$\leqslant 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n \overset{def}{=} A < +\infty, \tag{8}$$

тобто оцінка зверху логарифмічної міри множини $E(\theta)$ від θ не залежить. Нехай $E_1(\theta)$ – множина, яка є образом множини $E(\theta)$ при відображенні $t = -\frac{1}{\sigma}$. Логарифмічна міра цієї множини на $[1; +\infty)$, очевидно, пов'язана з логарифмічною мірою множини $E(\theta)$ на $[-1; 0)$ рівністю

$$l_{n-\mathrm{meas} E_1(\theta)} \overset{def}{=} \int\limits_{E_1(\theta)\cap[1;+\infty)} d \ln t = \int\limits_{E(\theta)\cap[-1;0)} d \ln \frac{1}{|\sigma|} = l_0\text{-meas}\, E(\theta) \leqslant A. \tag{9}$$

Якщо тепер $E_1 = \bigcup_{0\leqslant\theta<2\pi} \{te^{i\theta} : t \in E_1(\theta), t \geqslant 1\}$, то з (8) і (9) маємо

$$\tau(E_1) = \iint\limits_{E_1} \frac{d\nu(z)}{|z|^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int\limits_{[1;+\infty)\cap E_1(\theta)} \frac{dt}{t} \leqslant 2\pi A < +\infty.$$

Оскільки для $z = te^{i\theta} \notin E_1$ маємо $t \notin E_1(\theta)$ або $\sigma = -\frac{1}{t} \notin E(\theta)$, то із рівностей (7) за означенням максимального члена $\mu(\sigma, f)$ для всіх $n \geqslant 0$ при $\nu = \nu(\sigma, f)$ маємо

$$b_n e^{\sigma(1\pm\varepsilon_\nu)\mu_n} \leqslant \mu\left(\sigma(1 \pm \varepsilon_\nu), f\right) = b_\nu e^{\sigma(1\pm\varepsilon_\nu)\mu_\nu}.$$

Звідси, вибираючи оптимально знак, послідовно одержуємо

$$b_n e^{\sigma\mu_n} \leqslant \mu(\sigma, f) e^{-|\sigma|\varepsilon_\nu |\mu_n - \mu_\nu|}$$

і, отже, для всіх $n \geqslant 0$ і $t \notin E_1(\theta)$

$$|a_n| e^{t\mathrm{Re}(\lambda_n e^{i\theta})} \leqslant \mu_F(te^{i\theta}) e^{-\varepsilon_\nu |\mu_n - \mu_\nu|}.$$

Тобто, для всіх $z \in K_F \setminus E_1$

$$\sum_{n\neq\nu} |a_n| e^{\mathrm{Re}(z\lambda_n)} \leqslant \mu_F(z) \sum_{n\neq\nu} e^{-\varepsilon_\nu |\mu_n - \mu_\nu|},$$

де $\nu = \nu(-\frac{1}{|z|}, f_\theta)$. Звідси, із співвідношення (6) негайно одержуємо твердження теореми 1 у випадку $\nu \to +\infty$. Залишилось показати, що $\nu(-\frac{1}{|z|}, f_\theta) \to +\infty\, (z \to \infty, z \in K)$, або, що те ж саме, $\nu_F(z) = \max\{n : |a_n| e^{\mathrm{Re}\,(z\lambda_n)} = \mu_F(z)\} \to +\infty\, (z \to +\infty, z \in K)$.

Завершує доведення застосування такої леми.

Лема. *Нехай $F \in H$ – функція вигляду* (1). *Якщо послідовність $n_j \uparrow +\infty$ така, що $\lambda_n \to \infty$ $(n = n_j \to +\infty), a_n \neq 0$ $(n = n_j)$ і $\varphi_n = \arg\lambda_n \to \varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ $(n = n_j \to +\infty)$, то $[-\varphi_0 - \frac{\pi}{2}; -\varphi_0 + \frac{\pi}{2}] \subset \overline{K}_F$. При цьому для кожного $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ виконується*

$$\frac{1}{t} \ln \mu_F(te^{i\theta}) \to +\infty, \quad \nu_F(te^{i\theta}) \to +\infty$$

при $t \to +\infty$ рівномірно за $\theta \in [-\varphi_0 - \delta; -\varphi_0 + \delta]$.

Доведення леми негайно отримуємо із наступного. Оскільки $\ln |a_k| \leqslant c < +\infty$ $(k \geqslant 0)$, то при $n = n_j$ маємо

$$c + \nu_F(te^{i\theta}) \geqslant \frac{1}{t} \ln \mu_F(te^{i\theta}) \geqslant \frac{1}{t} \ln |a_n| + |\lambda_n| \cos(\theta + \varphi_n) \geqslant \frac{1}{t} \ln |a_n| + |\lambda_n| \cos\delta.$$

Тому, $c + \inf\{\nu_F(te^{i\theta}) : |\theta + \varphi_0| \leqslant \delta < \frac{\pi}{2}\} \geqslant \inf\{\frac{1}{t} \ln \mu_F(te^{i\theta}) : |\theta + \varphi_0| \leqslant \delta\} \geqslant$ $\geqslant \frac{1}{t} \ln |a_n| + |\lambda_n| \cos\delta$. Звідси, оскільки $|\lambda_{n_j}| \to +\infty$, отримуємо твердження леми, а з нею і теореми 1.

Зауваження. З леми випливає, що у випадку $0 < \beta - \alpha < \pi$, де $\beta = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}^{\,*} \arg\lambda_n$, $\alpha = \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}^{*} \arg\lambda_n$, (при цьому $\lim^*$ означає, що границя береться вздовж підпослідовностей $\lambda_{n_j} \to +\infty$) маємо

$$I \overset{\mathrm{def}}{=} \left(-\beta - \frac{\pi}{2}; -\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \subset K_F,\ \overline{I} = \overline{K}_F.$$

Непокращуваність умов теореми 1 (необхідність (2)) в класі всіх цілих рядів Діріхле вигляду (1) з фіксованою послідовністю $\mu_n = \ln \frac{1}{|a_n|} \uparrow +\infty$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\mu_n} < +\infty$ негайно отримуємо із цитованого вище результату із статті [1].

Зауважимо, що у випадку $\sup\{|\lambda_j|\,|\, j \geqslant 0\} < +\infty$ виконується $K_F = \emptyset$.

1. Скаскив О.Б. *О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей* // Матем. заметки. – 1994. – Т.56, N5. – С. 117–128.

Стаття надійшла до редколегії 01.04.1998