УДК 517.95

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ ПЕРШОЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ІЗ СИНГУЛЯРНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ

В. М. Флюд

Flyud V. M. Asymtotic expansion of a solution of the first boundary value problem with singular coefficient for the heat equation. Mathematical model of heat propagation in a strong non-homogeneous rod is considered. The full asymptotic expansion of a solution of the boundary value problem for singular perturbed heat equation is constructed.

У праці [1] була запропонована математична модель локально неоднорідного середовища, в рамках якої можна досліджувати явища, властиві лише композитним матеріалам. Зокрема, в задачах на власні значення описані ефекти т.з. локальних та глобальних коливань Е. Санчез-Паленсії [2-5]. У статті згадана вище модель застосована для дослідження еволюційного процесу — задачі розповсюдження тепла в композитному стержні.

Розглянемо стержень, розташований на осі OX з кінцями в точках $b_- < 0$ і $b_+ > 0$. Стержень виготовлений з двох матеріалів з різними властивостями, а саме: на інтервалі $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (вважаємо, що довжина стержня $b_+ - b_-$ є досить великою в порівнянні з ε, де ε – додатний параметр) стержень виготовлений з матеріалу, в якого добуток густини і питомоі теплоємності є значно більший, ніж в інших точках стержня і є функцією змінноі x. Задано початковий розподіл температури в стержні, а на кінцях підтримується нульова температура.

Нехай: $\Omega_\varepsilon^- = \{(t,x) :\ 0 < t < T,\ \ b_- < x < -\varepsilon\}$, $\omega_\varepsilon = \{(t,x) :\ 0 < t < T,\ \ -\varepsilon < x < \varepsilon\}$, $\Omega_\varepsilon^+ = \{(t,x) :\ 0 < t < T,\ \ \varepsilon < x < b_+\}$. Тоді $\Omega = \Omega_\varepsilon^- \cup \omega_\varepsilon \cup \Omega_\varepsilon^+$. Математичною моделлю даноі задачі є мішана задача

$$\left(\rho(x) + \varepsilon^{-m}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} = f(t,x) \ \text{ в } \ \Omega, \tag{1}$$

$$u_\varepsilon(0,x) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$u_\varepsilon(t,b_-) = u_\varepsilon(t,b_+) = 0, \tag{3}$$

де $m \geqslant 3$, $\chi(\xi)$ – характеристична функція інтервалу (-1,1), $a = \text{const}$, $\rho(x) = \rho_0 = \text{const}$ для $x \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, $f(t,x) \equiv f(x)$ для $x \in \omega_\varepsilon$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35B25, 35K20.

Припустимо, що функції $\rho(x)$, $f(t,x)$, $\varphi(x)$ є достатньо гладкими для правильності проведених нижче викладок (гладкість цих функцій визначається порядком асимптотичного розвинення розв'язку досліджуваної задачі), а початкова і крайові умови (2), (3) узгоджені в кутових точках $(b_-,0)$ і $(0,b_+)$. Розв'язок задачі (1)-(3) шукатимемо в класі функцій двічі неперервно диференційовних за x і раз за t в Ω. Варто зауважити, що крім умов (2), (3) розв'язок u_ε задовольняє умови спряження на відрізках прямих $x=\pm\varepsilon$

$$u_\varepsilon(t,\pm\varepsilon-0)=u_\varepsilon(t,\pm\varepsilon+0), \qquad \frac{\partial u_\varepsilon(t,\pm\varepsilon-0)}{\partial x}=\frac{\partial u_\varepsilon(t,\pm\varepsilon+0)}{\partial x}. \tag{4}$$

Нехай N – фіксоване натуральне число. Асимптотичне розвинення розв'язку мішаної задачі (1)-(3) для $m=3$ при зроблених вище припущеннях будуватимемо у вигляді

$$u_\varepsilon(t,x)\sim\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{N}\varepsilon^{\frac{k}{2}}v_k^\pm(\tau,x)+\sum\limits_{k=0}^{N}\varepsilon^{\frac{k}{2}}V_k^\pm(t,x)+R_N^\pm(t,x;\varepsilon) & \text{в}\quad \Omega_\varepsilon^\pm,\\ \sum\limits_{k=0}^{N+4}\varepsilon^{\frac{k}{2}}w_k(\tau,\xi)+\sum\limits_{k=0}^{N+6}\varepsilon^{\frac{k}{2}}(h_k^-(t,\zeta_-)+h_k^+(t,\zeta_+))+r_N(t,x;\varepsilon) & \text{в}\quad \omega_\varepsilon,\end{cases} \tag{5}$$

де $\tau=\varepsilon t$, $\xi=\frac{x}{\varepsilon}$, $\zeta_+=\dfrac{1-\xi}{\varepsilon^{\frac12}}=\dfrac{\varepsilon-x}{\varepsilon^{\frac32}}$, $\zeta_-=\dfrac{1+\xi}{\varepsilon^{\frac12}}=\dfrac{\varepsilon+x}{\varepsilon^{\frac32}}$. Опишемо ітераційний процес знаходження функцій з (5).

Підставивши замість функції u_ε її вигляд (5) у відповідній області в (1), (2), (3), (4), стандартним способом теорії сингулярних збурень [1] отримаємо задачі у відповідних областях для визначення функцій асимптотичного наближення (випишемо їх у порядку проведення рекурентного процесу).

Функції $w_k(\tau,\xi)$ є розв'язками другої мішаної задачі для рівняння теплопровідності в ω_ε :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w_k}{\partial\tau}-a^2\dfrac{\partial^2 w_k}{\partial\xi^2}=f_{k-4}(\xi)-\sum\limits_{s=0}^{k-6}\rho_s(\xi)\dfrac{\partial w_{k-s-6}}{\partial\tau},\\ w_k(0,\xi)=\varphi_k(\xi),\\ \dfrac{\partial w_k(\tau,\pm1)}{\partial\xi}=\sum\limits_{s=0}^{[\frac{k}{2}]-1}\dfrac{(\pm1)^s}{s!}\dfrac{\partial^{s+1}v_{k-2s-2}^\pm(\tau,0)}{\partial x^{s+1}}, \quad k=\overline{0,N+4};\end{cases} \tag{6}$$

де $\varphi_k(\xi)\equiv\begin{cases}0, & \text{для}\quad k=2i+1,\\ \dfrac{\xi^i}{i!}\dfrac{d^i\varphi(0)}{dx^i}, & \text{для}\quad k=2i,\end{cases}$ $\quad f_k(\xi)\equiv\begin{cases}0, & \text{для}\quad k=2i+1,\\ \dfrac{\xi^i}{i!}\dfrac{d^if(0)}{dx^i}, & \text{для}\quad k=2i.\end{cases}$

Тут і надалі приймаємо, що сума, в якої верхній індекс сумування менший за нижній, а також функції з від'ємними індексами тотожно рівні нулеві.

Для визначення функцій $v_k^\pm(\tau,x)$ отримали крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку (τ виступає як параметр)

$$\begin{cases}a^2\dfrac{\partial^2 v_k^\pm}{\partial x^2}=\rho(x)\dfrac{\partial v_{k-2}^\pm}{\partial\tau},\\ v_k^\pm(\tau,b_\pm)=0,\\ v_k^\pm(\tau,0)=w_k(\tau,\pm1)-\sum\limits_{s=1}^{[\frac{k}{2}]}\dfrac{(\pm1)^s}{s!}\dfrac{\partial^s v_{k-2s}^\pm(\tau,0)}{\partial x^s}, \quad k=\overline{0,N}.\end{cases} \tag{7}$$

Функції $h_k^\pm(t,\zeta_\pm)$ ліквідують нев'язку, яку вносять функції $V_k^\pm$ у другу умову спряження (4) і мають характер функцій примежевого шару в околі границь $x=\pm\varepsilon$ області ω_ε

відповідно. Вони визначаються із задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_k^{\pm}}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 h_k^{\pm}}{\partial \zeta_{\pm}^2} = -\rho_0 \dfrac{\partial h_{k-6}^{\pm}}{\partial t}, \\ h_k^{\pm}(0, \zeta_{\pm}) = 0, \\ \dfrac{\partial h_k^{\pm}(t,0)}{\partial \zeta_{\pm}} = \mp \displaystyle\sum_{s=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]-1} \frac{(\pm 1)^s}{s!} \frac{\partial^{s+1} V_{k-2s-3}^{\pm}(t,0)}{\partial x^{s+1}}, \quad k = \overline{0, N+6}. \end{cases} \tag{8}$$

Функції $V_k^{\pm}(t,x)$ визначаються як розв'язки першої мішаної задачі для рівняння теплопровідності

$$\begin{cases} \rho(x) \dfrac{\partial V_k^{\pm}}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 V_k^{\pm}}{\partial x^2} = f(t,x)\delta_k^0, \\ V_k^{\pm}(0,x) = \varphi(x)\delta_k^0 - v_k^{\pm}(0,x), \\ V_k^{\pm}(t, b_{\pm}) = 0, \\ V_k^{\pm}(t,0) = h_k^{\pm}(t,0) - \displaystyle\sum_{s=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(\pm 1)^s}{s!} \frac{\partial^s V_{k-2s}^{\pm}(t,0)}{\partial x^s}, \quad k = \overline{0, N}, \end{cases} \tag{9}$$

де δ_k^0 – символ Кронекера;

Для залишкових членів $R_N^{\pm}(t,x;\varepsilon)$ асимптотичного розвинення (5) в областях Ω_ε^- і Ω_ε^+ відповідно отримуємо задачі

$$\rho(x) \frac{\partial R_N^{\pm}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 R_N^{\pm}}{\partial x^2} = -\varepsilon^{\frac{N+1}{2}} \rho(x) \left(\frac{\partial v_{N-1}^{\pm}}{\partial \tau} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial v_N^{\pm}}{\partial \tau} \right), \tag{10}$$

$$\begin{cases} R_N^{\pm}(0,x;\varepsilon) = 0, \quad R_N^{\pm}(t, b_{\pm}; \varepsilon) = 0, \\ R_N^{\pm}(t, \pm\varepsilon; \varepsilon) = -\varepsilon^{\frac{N+1}{2}} \displaystyle\sum_{k=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} \frac{(\pm 1)^k}{k!} \left\{ \frac{\partial^k v_{N+1-2k}^{\pm}(\tau, \theta_{1,N+1-2k}^{\pm})}{\partial x^k} + \right. \\ \qquad\qquad \left. \dfrac{\partial^k V_{N+1-2k}^{\pm}(t, \theta_{2,N+1-2k}^{\pm})}{\partial x^k} \right\} - \\ \qquad \varepsilon^{\frac{N+2}{2}} \displaystyle\sum_{k=1}^{\left[\frac{N+2}{2}\right]} \frac{(\pm 1)^k}{k!} \left\{ \frac{\partial^k v_{N+2-2k}^{\pm}(\tau, \theta_{3,N+2-2k}^{\pm})}{\partial x^k} \frac{\partial^k V_{N+2-2k}^{\pm}(t, \theta_{4,N+2-2k}^{\pm})}{\partial x^k} \right\} + \\ \qquad \displaystyle\sum_{k=N+1}^{N+6} \varepsilon^{\frac{k}{2}} h_k^{\pm}(t,0) + \sum_{k=0}^{N+6} \varepsilon^{\frac{k}{2}} h_k^{\mp}(t, 2\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) + \sum_{k=N+1}^{N+4} \varepsilon^{\frac{k}{2}} w(\tau, 1), \end{cases} \tag{11}$$

де $\theta_{1,N+1-2k}^{\pm}$, $\theta_{2,N+1-2k}^{\pm}$, $\theta_{3,N+2-2k}^{\pm}$, $\theta_{4,N+2-2k}^{\pm}$, – точки з ліво- і правостороннього ε-околу початку координат відповідно.

Залишковий член $r_N(t,x;\varepsilon)$ асимптотичного розвинення (5) в області ω_ε є розв'язком другої мішаної задачі для рівняння теплопровідності

$$(\rho_0+\varepsilon^{-3})\frac{\partial r_N}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 r_N}{\partial x^2}=\varepsilon^{\frac{N+1}{2}}f_{N+1}(\sigma_{N+1})+\varepsilon^{\frac{N+2}{2}}f_{N+2}(\sigma_{N+2})-$$
$$-\rho_0\sum_{k=N+1}^{N+6}\varepsilon^{\frac{k}{2}}\left(\frac{\partial w_{k-2}}{\partial\tau}+\frac{\partial h_k^+}{\partial t}+\frac{\partial h_k^-}{\partial t}\right),\quad(12)$$

$$\begin{cases} r_N(0,x;\varepsilon)=\varepsilon^{\frac{N+5}{2}}\varphi_{N+5}(\sigma_{N+5})+\varepsilon^{\frac{N+6}{2}}\varphi_{N+6}(\sigma_{N+6}),\\ \dfrac{\partial r_N(t,\pm\varepsilon;\varepsilon)}{\partial x}=\varepsilon^{\frac{N+3}{2}}\displaystyle\sum_{k=2}^{\left[\frac{N+3}{2}\right]}\frac{(\pm1)^k}{k!}\frac{\partial^{k+1}v^{\pm}_{N+3-2k}(\tau,\theta^{\pm}_{1,N+3-2k})}{\partial x^{k+1}}+\\ \varepsilon^{\frac{N+4}{2}}\displaystyle\sum_{k=2}^{\left[\frac{N+4}{2}\right]}\frac{(\pm1)^k}{k!}\left(\frac{\partial^{k+1}v^{\pm}_{N+4-2k}(\tau,\theta^{\pm}_{2,N+4-2k})}{\partial x^{k+1}}+\right.\\ \left.\dfrac{\partial^{k+1}V^{\pm}_{N+4-2k}(t,\theta^{\pm}_{3,N+4-2k})}{\partial x^{k+1}}\right)+\\ \varepsilon^{\frac{N+5}{2}}\displaystyle\sum_{k=3}^{\left[\frac{N+5}{2}\right]}\frac{(\pm1)^k}{k!}\frac{\partial^{k+1}V^{\pm}_{N+5-2k}(t,\theta^{\pm}_{4,N+5-2k})}{\partial x^{k+1}}\mp\\ \varepsilon^{-\frac{3}{2}}\displaystyle\sum_{k=0}^{N+6}\varepsilon^{\frac{k}{2}}\frac{\partial h_k^{\mp}(t,2\varepsilon^{-\frac{1}{2}})}{\partial\zeta_{\mp}}, \end{cases}\quad(13)$$

де $\theta^{\pm}_{1,N+3-2k}$, $\theta^{\pm}_{2,N+4-2k}$, $\theta^{\pm}_{3,N+4-2k}$, $\theta^{\pm}_{4,N+5-2k}$ – точки з ліво- і правостороннього ε-околу початку координат відповідно; σ_{N+1}, σ_{N+2}, σ_{N+5}, σ_{N+6} – точки з інтервалу $\left(-\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Роз'язок задачі (8) має вигляд [2]:

$$h_k^{\pm}(t,\zeta_{\pm})=\pm\frac{a}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]-1}\frac{(\pm1)^s}{s!}\int_0^t\frac{e^{-\frac{\zeta_{\pm}^2}{4a^2(t-\mu)}}}{\sqrt{t-\mu}}\cdot\frac{\partial^{s+1}V^{\pm}_{k-2s-3}(\mu,0)}{\partial x^{s+1}}d\mu-$$
$$-\frac{\rho_0}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\mu}{\sqrt{t-\mu}}\int_0^{\infty}\left[e^{-\frac{(\zeta_{\pm}-\nu)^2}{4a^2(t-\mu)}}-e^{-\frac{(\zeta_{\pm}+\nu)^2}{4a^2(t-\mu)}}\right]\frac{\partial h^{\pm}_{k-6}(\mu,\nu)}{\partial\mu}d\nu,\quad k=\overline{0,N+6}.\quad(14)$$

Беручи до уваги гладкість функцій ρ, f, φ і обмеженість $w_k(\tau,\xi)$, $v_k^{\pm}(\tau,x)$, $V_k^{\pm}(t,x)$ і їх похідних як розв'язків задач (6), (7), (9) відповідно, з (14) неважко отримати, що $h_k^{\pm}(t,\zeta_{\pm})$ і їх похідні є функціями порядку $O(\varepsilon^{\frac{N+1}{2}})$.

Застосовуючи принцип максимуму, для розв'язків задач (10),(11) і (12),(13) отримуємо оцінки:

$$|R_N^{\pm}(t,x;\varepsilon)|\leqslant C^{\pm}\varepsilon^{\frac{N+1}{2}},\qquad |r_N(t,x;\varepsilon)|\leqslant c\varepsilon^{\frac{N+1}{2}},\quad(15)$$

де $C^{\pm}$ і c – незалежні від ε додатні сталі.

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

Теорема. *Нехай функції $\rho(x)$, $f(t,x)$, $\varphi(x)$ є достатньо гладкими функціями в Ω. Тоді для достатньо малого значення параметра ε розв'язок u_ε задачі (1)-(3) з умовами спряження (4) допускає асимптотичне розвинення (5), де функції $w_k(\tau,\xi)$, $v_k^\pm(\tau,x)$, $h_k^\pm(t,\zeta_\pm)$, $V_k^\pm(t,x)$ - розв'язки задач (6), (7), (8), (9) відповідно, для залишкових членів $R_N^\pm(t,x;\varepsilon)$ та $r_N(t,x;\varepsilon)$ правильні оцінки (15).*

Зауваження. Міркування, наведені вище, залишаються правильними у випадку мішаної задачі для рівняння (1) з крайовими умовами (3) і початковою умовою

$$u_\varepsilon(0,x) = \varphi(x) + \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

де ψ є достатньо гладкою функцією, носієм якої є інтервал $(-1,1)$. Асимптотичне розвинення такої задачі має вигляд (5). Функції w_k, v_k, $h_k^\pm$, $V_k^\pm$, за винятком w_0, визначаються як розв'язки задач (6), (7), (8), (9) відповідно. Функція w_0 є розв'язком однорідного рівняння і крайових умов (6) при початковій умові $w_0(0,\xi) = \varphi(0) + \psi(\xi)$. Для $R_N^\pm(t,x;\varepsilon)$ та $r_N(t,x;\varepsilon)$ правильні оцінки (15).

1. Olejnik O.A. *Homogenization problems in elasticity.Spectrum of singularily perturbed operators*// Non-classical continuum mechanics. Lecture Notes series. Cambridge University Press. – 1987. – 122. – P.188-205.
2. Sanchez-Palensia E. *Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses*// Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics. Berlin: Springer-Verlag. – 1984. – P.346-368.
3. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А., Соболева Т.С. *О собственных колебаниях струны с присоединенной массой* // Сиб. мат. журн. – 1988. – Т.29, N5. – С.71-91.
4. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А. *Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями* // Труды Математ. ин–та им. В.А.Стеклова.— 1990.— Т.192.— С.42–60.
5. Головатый Ю.Д. *Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами: эффект локальних колебаний* // Труды Московского мат. о–ва.— 1992.— Т.54.— С.29–72.
6. Вишик М. И., Люстерник Л. А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром*// Успехи матем. н..– 1957.–Т. 12, Вып. 5.–С.3-122.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука. 1966.

Стаття надійшла до редколегії 2.06.1998