УДК 531

# ПРО УМОВИ СТІЙКОСТІ РУХУ ЗА ДВОМА МІРАМИ ПРУЖНИХ ТІЛ В ЛІНЕАРИЗОВАНОМУ ФОРМУЛЮВАННІ ЗАДАЧІ

П. П. Доманський

**Domanskyj P.P. On the conditions of two measures stability of movement of elastic bodies in linearized problem setting.** The sufficient conditions for stability of the zero-solution under two special measures for the stability movement linearized equations of isotropic elastic solids under power loading with kinematic, dynamic and mixed boundary conditions are established. The analysis of the stability conditions is illustrated on the solids of Murnagan material as well as standard materials of the first and second orders.

1.**Вихідні співвідношення.** Розглянемо однорідне ізотропне пружне тіло $K$. Задамо фіксовану $\gamma_0$-конфігурацію цього тіла (область $X_0$ , обмежену поверхнею $\partial X_0$ ), яку назвемо відліковою. Місце частинки $k \in K$ в цій конфігурації задається радіус-вектором $\vec{r}_0$– неперервною і потрібне число разів диференційовною вектор-функцією $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, де $\{\xi^i\}$– лагранжеві координати. За $\{\xi^i\}$ $(i = \overline{1,3})$ приймаємо координати місця частинки $k \in K$ у відліковій $\gamma_0$-конфігурації в єдиній для всіх конфігурацій прямокутній декартовій системі координат

$$\vec{r}_0 = \xi^1 \vec{\ni}_1^0 + \xi^2 \vec{\ni}_2^0 + \xi^3 \vec{\ni}_3^0 \equiv \xi^i \vec{\ni}_i^0.$$

З моменту часу $\tau = \tau_0$ (початковий момент часу) на тіло починають діяти зовнішні масові і поверхневі сили. Внаслідок цього у момент часу $\tau$ тіло займе в просторі конфігурацію $\gamma_\tau$, яку називаємо актуальною. Положення частинки $k \in K$ в $\gamma_\tau$-конфігурації визначається радіус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3; \tau) = \vec{r}_0 + \vec{u}_0$, де $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3; \tau) \equiv \vec{u}_0(\vec{r}_0; \tau)$– вектор переміщення із $\gamma_0$ в $\gamma_\tau$-конфігурацію.

Напружений стан $\gamma_\tau$-конфігурації будемо характеризувати тензором напружень Піоли-Кірхгофа

$$\hat{P}_0 = \hat{P}_0\left(\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{r}\right) = \frac{dU_0}{d\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{r}},$$

де $\hat{P}_0(\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{r})$– тензорна функція, що характеризує зв'язок між тензором напружень і градієнтом місця; $U_0$– густина потенціальної енергії деформації; $\overrightarrow{\nabla}_0 = \vec{\ni}_0^{\,i} \frac{\partial}{\partial \xi^i}$– набла - оператор Гамільтона в $\gamma_0$-конфігурації; $\{\vec{\ni}_0^{\,i}\}$– база, біортогональна до бази $\{\vec{\ni}_i^0\}$; " $\otimes$ " - операція тензорного (зовнішнього) добутку.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35B35, 73C99.

Поряд з актуальною $\gamma_\tau$-конфігурацією, яку вважаємо базовою (незбуреною), розглядаємо ще одну актуальну $\gamma_\tau^*$-конфігурацію, яку назвемо збуреною. Приймаємо, що збурення викликані збуренням (варіацією) початкових умов в $\gamma_\tau$-конфігурації. Місце частинки $k \in K$ і тензор напружень Піоли-Кірхгофа в $\gamma_\tau^*$-конфігурації будемо позначати

$$\vec{r}_* = \vec{r}_*(\xi^1, \xi^2, \xi^3; \tau) = \vec{r}_0 + \vec{u}_*, \qquad \hat{P}_* = \hat{P}_0(\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{r}_*),$$

де $\vec{u}_* = \vec{u}_*(\xi^1, \xi^2, \xi^3; \tau)$– вектор переміщення з $\gamma_0$ в $\gamma_*$-конфігурацію.

Приймаємо, що

$$\vec{u}_* = \vec{u}_0 + \vec{u}, \qquad \hat{P}_* = \hat{P}_0 + \hat{P}.$$

Величини $\hat{P}$ і $\vec{u}$ назвемо збуренням (варіацією) тензора напружень Піоли-Кірхгофа і вектора переміщення в $\gamma_\tau$-конфігурації відповідно.

Вважаючи, що напружено-деформівний стан $\gamma_\tau$-конфігурації є відомим, у праці [1] отримано рівняння стосовно збурень

$$\overrightarrow{\nabla}_0 \cdot \hat{P} + \rho_0 \left(\vec{f}_* - \vec{f}_0\right) = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}, \tag{1}$$

яке є рівнянням стійкості руху пружного тіла $K$. Тут $\vec{f}_0$ – вектор масових сил, віднесений до одиниці маси, $\vec{f}_*$ – його значення в $\gamma_\tau$-конфігурації, $\rho_0$ – густина розподілу маси стосовно $\gamma_0$-конфігурації.

Надалі масові сили будемо вважати "мертвими". Тоді $\vec{f}_* = \vec{f}_0$ і рівняння стійкості руху (1) набуде вигляду

$$\overrightarrow{\nabla}_0 \cdot \hat{P} = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}. \tag{2}$$

На межі $\partial X_0$ будемо розглядати [2] або кінематичні граничні умови вигляду

$$\vec{u}|_{\partial X_0} = 0, \tag{3}$$

або динамічні граничні умови

$$\vec{n}_0 \cdot \hat{P}\Big|_{\partial X_0} = \left(\vec{q}_* \frac{d\Sigma_*}{d\Sigma_0} - \vec{q}\frac{d\Sigma}{d\Sigma_0}\right)\Big|_{\partial X_0}, \tag{4}$$

або умови змішаного вигляду

$$\vec{\ni}_i^{\,0} \cdot \vec{u}\Big|_{\partial X_0} = 0, \qquad \vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \left(\vec{n}_0 \cdot \hat{P}\right)\Big|_{\partial X_0} = \vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \left(\vec{q}_* \frac{d\Sigma_*}{d\Sigma_0} - \vec{q}\frac{d\Sigma}{d\Sigma_0}\right)\Big|_{\partial X_0}. \tag{5}$$

Тут $\vec{q}$ – вектор поверхневих сил, віднесений до одиниці площі $\gamma_\tau$-конфігурації; $\vec{q}_*$ – його значення в $\gamma_\tau^*$-конфігурації; $d\Sigma_0$, $d\Sigma$, $d\Sigma_*$ – площі елементарноі площадки в $\gamma_0$, $\gamma_\tau$, $\gamma_\tau^*$-конфігураціях відповідно; $\vec{n}_0$ – вектор зовнішньоі нормалі до поверхні $\partial X_0$. У формулах (5) індекс $i$ приймає одне або два значення із множини $\{1, 2, 3\}$, а індекс $j$ приймає два або одне значення із цієї ж множини, причому $i \neq j$.

Крім умов вигляду (3), (4) або (5) будемо розглядати також випадок, коли на різних ділянках поверхні $\partial X_0$ задаються відмінні граничні умови. Точніше, якщо $\partial X_0 = \partial X_u \cup \partial X_p \cup \partial X_{up}$ , то на $\partial X_u$ задаються умови (3), на $\partial X_p$ – умови вигляду (4), а на $\partial X_{up}$ – умови вигляду (5).

Зауважимо, що коли поверхневе навантаження є "мертвим", то $\vec{q}_* d\Sigma_* = \vec{q} d\Sigma$ і тому праві частини в умовах (4) і (5) дорівнюють нулеві.

Початкові умови в усіх задачах мають вигляд

$$\vec{u}|_{\tau=\tau_0} = \vec{\varphi}(\vec{r}_0), \qquad \left.\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right|_{\tau=\tau_0} = \vec{\psi}(\vec{r}_0), \tag{6}$$

де $\vec{\varphi}$, $\vec{\psi}$ – збурення векторів переміщення і швидкості в початковий момент часу.

Записані співвідношення стійкості руху пружних тіл (2), (4), (5) є, взагалі кажучи, геометрично і фізично нелінійними. Якщо лінеаризувати їх в околі базової конфігурації, тобто наближено прийняти, що

$$\hat{P} = \hat{P}_0 \left(\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{r}_*\right) - \hat{P}_0 \left(\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{r}\right) \approx \hat{P}_0^\bullet \left(\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0\right),$$

$$\vec{q}_* \frac{d\Sigma_*}{d\Sigma_0} - \vec{q}\frac{d\Sigma}{d\Sigma_0} \approx \vec{Q}_0^\bullet \left(\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0, \vec{q}\right),$$

де $\hat{P}_0^\bullet$, $\vec{Q}_0^\bullet$ – лінійні стосовно аргумента $\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$ функції, то одержимо відповідні лінеаризовані співвідношення стійкості руху при великих (скінченних) початкових деформаціях

$$\overrightarrow{\nabla}_0 \cdot \hat{P}_0^\bullet = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}, \tag{7}$$

$$\vec{u}|_{\partial X_0} = 0, \tag{8}$$

$$\vec{n}_0 \cdot \hat{P}_0^\bullet \Big|_{\partial X_0} = \vec{Q}_0^\bullet \Big|_{\partial X_0}, \tag{9}$$

$$\vec{\ni}_i^{\,0} \cdot \vec{u} \Big|_{\partial X_0} = 0, \qquad \vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \left(\vec{n}_0 \cdot \hat{P}_0^\bullet\right)\Big|_{\partial X_0} = \vec{\ni}_j^{\,0} \vec{Q}_0^\bullet \Big|_{\partial X_0}. \tag{10}$$

Надалі вважаємо, що поверхневе навантаження і збурення початкових умов в $\gamma_\tau$-конфігурації є такими, що розв'язок рівняння (7) при кожному з варіантів сформульованих граничних умов і початковими умовами (6) існує і напружено-деформівний стан тіла $K$ визначається однозначно.

У тих випадках, коли певні компоненти тензора деформації базового розв'язку є малими, то можливі відповідні спрощення (7), (9), (10) з метою отримання варіантів лінеаризованих співвідношень стійкості руху при малих початкових деформаціях.

**2. Достатні умови стійкості руху.** Рівняння (7) при будь-якому із варіантів граничних умов, що розглядаються, має розв'язок $\vec{u} \equiv 0$. При дослідженні стійкості цього розв'язку виберемо за міру відхилення базового розв'язку від збуреного функціонали

$$d_0 \left[h(\cdot;\tau)\right] = \iiint\limits_{X_0} \left[\varkappa \vec{u}^2 + \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right)^2 + \left|\hat{P}_0^\bullet \cdot\cdot\, \vec{u} \otimes \overrightarrow{\nabla}_0\right|\right] dV_0, \tag{11}$$

$$d \left[h(\cdot;\tau)\right] = \iiint\limits_{X_0} \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right)^2 + \left|\hat{P}_0^\bullet \cdot\cdot\, \vec{u} \otimes \overrightarrow{\nabla}_0\right|\right] dV_0, \tag{12}$$

визначені на функціях

$$h(\vec{r}_0,\tau)=\left(\vec{u}(\vec{r}_0;\tau),\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}(\vec{r}_0;\tau)\right),$$

де $\vec{u}$ – розв'язки сформульованих крайових задач для рівняння (7), $\varkappa$ – розмірна стала. Очевидно, що $d_0[0]=d[0]=0$.

**Означення.** *Розв'язок $\vec{u}(\vec{r}_0;\tau)\equiv 0$ називаємо стійким за мірами (11), (12), якщо*

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta(\varepsilon)>0)\,(\forall h)\,(\forall\tau\geqslant\tau_0)\,[d_0[h(\cdot;\tau_0)]<\delta\implies d[h(\cdot;\tau)]<\varepsilon].$$

Розглянемо функціонал

$$V\left[h(\cdot,\tau)\right]=\iiint\limits_{X_0}\left[\rho_0\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\right)^2+\hat{P}_0^\bullet\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overleftrightarrow{\nabla}_0\right]dV_0.$$

Легко бачити, що функціонали $d$ і $V$ є неперервними в момент часу $\tau=\tau_0$ за мірою $d_0$ при $d_0=0$ .

Обчислимо $\dfrac{dV}{d\tau}$:

$$\frac{dV}{d\tau}=\iiint\limits_{X_0}\left[2\rho_0\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2}+\hat{P}_0^\bullet\cdot\cdot\,\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\otimes\overleftrightarrow{\nabla}_0+\frac{\partial\hat{P}_0^\bullet}{\partial\tau}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overleftrightarrow{\nabla}_0\right]dV_0. \tag{13}$$

Перетворимо третій доданок підінтегрального виразу (13). Оскільки $\hat{P}_0^\bullet$ – лінійна тензорна функція стосовно аргумента $\overleftrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}$, то її можна подати у вигляді

$$\hat{P}_0^\bullet(\overleftrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u},\overleftrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0)=A^{ijst}\frac{\partial u_i}{\partial\xi^j}\vec{\ni}_s^{\,0}\otimes\vec{\ni}_t^{\,0}, \tag{14}$$

де $A^{ijst}$– величини, що залежать від градієнта базового розв'язку $\overleftrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0$. В залежності від характеру навантаження вони можуть залежати від часу, а можуть і не залежати. Із (14) знаходимо

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{P}_0^\bullet}{\partial\tau}&=\frac{\partial A^{ijst}}{\partial\tau}\frac{\partial u_i}{\partial\xi^j}\vec{\ni}_s^{\,0}\otimes\vec{\ni}_t^{\,0}+A^{ijst}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial u_i}{\partial\xi^j}\right)\vec{\ni}_s^{\,0}\otimes\vec{\ni}_t^{\,0}=\\&=\hat{L}(\overleftrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u})+\hat{P}_0^\bullet\left(\overleftrightarrow{\nabla}_0\otimes\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau},\overleftrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0\right).\end{aligned} \tag{15}$$

Тут

$$\hat{L}(\overleftrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u})=\frac{\partial A^{ijst}}{\partial\tau}\frac{\partial u_i}{\partial\xi^j}\vec{\ni}_s^{\,0}\otimes\vec{\ni}_t^{\,0}=\hat{P}_0^\bullet(\overleftrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u},\frac{\partial}{\partial\tau}(\overleftrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0))\;-$$

лінійна тензорна функція, яка дорівнює нулеві у випадку, якщо градієнт $\overleftrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0$ не залежить від часу.

Із (15) випливає, що

$$\frac{\partial\hat{P}_0^\bullet}{\partial\tau}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overleftrightarrow{\nabla}_0=\hat{L}(\overleftrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u})\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overleftrightarrow{\nabla}_0+\hat{P}_0^\bullet\left(\overleftrightarrow{\nabla}_0\otimes\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau},\overleftrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0\right)\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overleftrightarrow{\nabla}_0. \tag{16}$$

Як відомо [4], для тензора $\hat{P}_0^\bullet$ характерна властивість взаємності. Тобто

$$\hat{P}_0^{\bullet}\left(\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau},\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0\right)\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0=\hat{P}_0^{\bullet}\left(\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u},\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0\right)\cdot\cdot\,\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0. \tag{17}$$

Якщо підставити (16) і (17) в (13) і використати формулу Гауса - Остроградського, то одержимо

$$\begin{aligned}\frac{dV}{d\tau}&=\iiint\limits_{X_0}\left[2\rho_0\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2}+2\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\cdot\,\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0+\hat{L}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0\right]dV_0=\\
&=\iiint\limits_{X_0}\left[2\rho_0\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2}+2\overrightarrow{\nabla}_0\cdot\left(\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\right)-2\left(\overrightarrow{\nabla}_0\cdot\hat{P}_0^{\bullet}\right)\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}+\hat{L}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0\right]dV_0= \quad (18)\\
&=\iiint\limits_{X_0}\left[2\left(\rho_0\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2}-\overrightarrow{\nabla}_0\cdot\hat{P}_0^{\bullet}\right)\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}+\hat{L}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0\right]dV_0+2\iint\limits_{\partial X_0}\vec{n}_0\cdot\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}dS.\end{aligned}$$

Функціонал $V$ запишемо у вигляді

$$V\left[h(\cdot,\tau)\right]=d\left[h(\cdot,\tau)\right]+\iiint\limits_{X_0}\left[\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0-\left|\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0\right|\right]dV_0. \tag{19}$$

Із (19) випливає, що коли виконується нерівність

$$W(\vec{u})=\iint\limits_{X_0}\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0dV_0\geqslant 0, \tag{20}$$

то $V$ є знаковизначеним додатним за мірою $d$.

Якщо використати теорему про стійкість руху за двома мірами систем з розподіленими параметрами [3], то із (18) і умови (20) знаковизначеності функціонала $V$ за $d$ приходимо до таких теорем.

**Теорема 1.** *Якщо при силовому поверхневому навантаженні тіла $K$ виконується нерівність (20) і нерівність*

$$\iiint\limits_{X_0}\hat{L}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0\;dV_0\leqslant 0, \tag{21}$$

*то розв'язок $\vec{u}\equiv 0$ рівняння (7) при граничних умовах (8) є стійким за мірами (11), (12). Якщо ж при цьому градієнт базового розв'язку не залежить від часу, то достатньою умовою стійкості є виконання лише нерівності (20).*

**Теорема 2.** *Якщо при силовому поверхневому навантаженні тіла $K$ виконується нерівність (20) і нерівність*

$$\iiint\limits_{X_0}\hat{L}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0dV_0+2\iint\limits_{\partial X_0}\vec{Q}_0^{\bullet}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}dS\leqslant 0, \tag{22}$$

*то розв'язок $\vec{u}\equiv 0$ рівняння (7) при граничних умовах (9) є стійким за мірами (11), (12). Якщо ж при цьому поверхневе навантаження $\vec{q}$ є "мертвим", то нерівність (22) слід замінити нерівністю (21).*

*Якщо градієнт базового розв'язку не залежить від часу, то замість нерівності (22) слід розглядати нерівність*

$$\iint\limits_{\partial X_0} \vec{Q}_0^\bullet \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} dS \leqslant 0.$$

*Для стійкості розв'язку у випадку "мертвого" поверхневого навантаження і за умови, що градієнт базового розв'язку не залежить від часу, достатньо виконання лише нерівності (20).*

**Теорема 3.** *Якщо при силовому поверхневому навантаженні тіла $K$ виконується нерівність (20) і нерівність*

$$\iiint\limits_{X_0} \hat{L} \cdot\cdot\ \vec{u} \otimes \overleftarrow{\nabla}_0 dV_0 + 2 \iint\limits_{\partial X_0} \sum_j \left(\vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \vec{Q}_0^\bullet\right) \left(\vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right) dS \leqslant 0, \tag{23}$$

*то розв'язок $\vec{u} \equiv 0$ рівняння (7) при граничних умовах (10) є стійким за мірами (11), (12). Якщо ж при цьому поверхневе навантаження є "мертвим", то нерівність (23) слід замінити нерівністю (21).*

*Якщо градієнт базового розв'язку не залежить від часу, то замість нерівності (23) слід розглядати нерівність*

$$\iint\limits_{\partial X_0} \sum_j \left(\vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \vec{Q}_0^\bullet\right) \left(\vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right) dS \leqslant 0.$$

*Для стійкості розв'язку у випадку "мертвого" поверхневого навантаження і за умови, що градієнт базового розв'язку не залежить від часу, достатньо виконання лише нерівності (20).*

**Теорема 4.** *Для стійкості розв'язку $\vec{u} \equiv 0$ рівняння (7) при граничних умовах*

$$\begin{gathered} \vec{u}|_{\partial X_u} = 0, \qquad \vec{n}_0 \cdot \hat{P}_0^\bullet\Big|_{\partial X_p} = \vec{Q}_0^\bullet\Big|_{\partial X_p}, \\ \vec{\ni}_i^{\,0} \cdot \vec{u}\Big|_{\partial X_{up}} = 0, \qquad \vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \left(\vec{n}_0 \cdot \hat{P}_0^\bullet\right)\Big|_{\partial X_{up}} = \vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \vec{Q}_0^\bullet\Big|_{\partial X_{up}}. \end{gathered}$$

*достатньо, щоб при силовому поверхневому навантаженні виконувалася нерівність (20) і нерівність*

$$\iiint\limits_{X_0} \hat{L} \cdot\cdot\ \vec{u} \otimes \overleftarrow{\nabla}_0 dV_0 + 2 \iint\limits_{\partial X_p} \vec{Q}_0^\bullet \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} dS + 2 \iint\limits_{\partial X_{up}} \sum_j \left(\vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \vec{Q}_0^\bullet\right) \left(\vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right) dS \leqslant 0. \tag{24}$$

*Якщо поверхневе навантаження є "мертвим", то нерівність (24) слід замінити нерівністю (21).*

*Якщо градієнт базового розв'язку не залежить від часу, то замість нерівності (24) слід розглядати нерівність*

$$\iint\limits_{\partial X_p} \vec{Q}_0^\bullet \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} dS + \iint\limits_{\partial X_{up}} \sum_j \left(\vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \vec{Q}_0^\bullet\right) \left(\vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right) dS \leqslant 0.$$

*У випадку "мертвого" поверхневого навантаження і за умови, що градієнт базового розв'язку не залежить від часу, достатньою умовою стійкості є виконання лише нерівності (20).*

**3. Стійкість циліндричного тіла з матеріалу Мурнагана.** Нехай циліндричне тіло квадрованого поперечного перерізу $D$ висоти $b$ перебуває під дією рівномірно розподіленого по граничних поперечних перерізах "мертвого" осьового стискуючого навантаження інтенсивності $N_0$. Вісь тіла сумістимо з віссю $O\xi^3$ $(0 \leqslant \xi^3 \leqslant b)$. Бокову поверхню вважаємо вільною від силових навантажень.

Граничні умови задамо у вигляді

$$\vec{\ni}_1^{\,0} \cdot \vec{u}\Big|_{\xi^3=0,b} = 0, \quad \vec{\ni}_2^{\,0} \cdot \vec{u}\Big|_{\xi^3=0,b} = 0, \quad \vec{\ni}_3^{\,0} \cdot \hat{P}_0^{\bullet}\Big|_{\xi^3=0,b} = 0, \quad \hat{P}_0^{\bullet}\Big|_{\partial D\times[0,b]} = 0. \tag{25}$$

На підставі одержаних результатів знайдемо достатні умови стійкості циліндричного тіла з матеріалу Мурнагана.

Густина потенціальної енергії деформації $U_0$ матеріалу Мурнагана задається формулою [4]

$$U_0 = \frac{1}{4}\left[\left(-3\lambda - 2\mu + \frac{9}{2}l + \frac{n}{2}\right) I_1(\hat{G}) + \frac{1}{2}\left(\lambda + 2\mu - 3l - 2m\right) I_1^2(\hat{G}) + \right.$$
$$\left. + \left(-2\mu + 3m - \frac{n}{2}\right) I_2(\hat{G}) - m I_1(\hat{G}) I_2(\hat{G}) + \frac{1}{6}\left(l + 2m\right) I_1^3(\hat{G}) + \frac{n}{2}\left(I_3(\hat{G}) - 1\right)\right].$$

Тут $\lambda$, $\mu$ – сталі Ляме; $l$, $m$, $n$ – сталі Мурнагана; $\hat{G} = \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^{\,T}$ – міра деформації Коші-Гріна; $I_k(\hat{G})$ – алгебраїчні інваріанти тензора $\hat{G}$ (індексом "T" позначено транспонований тензор).

Якщо знайти похідну від $U_0$ за градієнтом місця $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}$, то з точністю до членів другого порядку стосовно градієнта $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0$ одержимо

$$\hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}) = \hat{T}(\vec{u}_0) + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot \hat{T}(\vec{u}_0) + \frac{1}{2}\left[\lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^{\,T} + \right.$$
$$\left. + (n - 2m + 2l)\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0\right)^2 + (2m - n)\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)\right] \hat{I} +$$
$$(2m - n)\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \hat{\varepsilon}\,(\vec{u}_0) + n\hat{\varepsilon}^2\,(\vec{u}_0) + \mu \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^{\,T} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0, \tag{26}$$

де

$$\hat{T}(\vec{u}_0) = \lambda \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \hat{I} + 2\mu\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0), \qquad \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0) = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^{\,T}\right) -$$

тензор напружень Коші і тензор деформації лінійної теорії пружності, $\hat{I}$ – одиничний тензор.

Із (26) отримуємо

$$\hat{P}_0^{\bullet}(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0) = \left(\hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0\right) \cdot \hat{T}(\vec{u}) + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \hat{T}(\vec{u}_0) +$$
$$+ \left[\lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot\ \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + (n - 2m)\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u} - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot\ \hat{\varepsilon}(\vec{u})\right) + \right.$$
$$\left. + 2l\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\right)\right] \hat{I} + (2m - n)\left[\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \hat{\varepsilon}(\vec{u}) + \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)\right] +$$

$$+\mu\left[\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0^{\;T}\cdot\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}+\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}^{\,T}\cdot\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0\right]+n\left[\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)\cdot\hat{\varepsilon}(\vec{u})+\hat{\varepsilon}(\vec{u})\cdot\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)\right].$$

Позначимо

$$\vec{u}=u_k\vec{\ni}_0^{\,k},\,\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0=a^{mn}\vec{\ni}_m^{\,0}\otimes\vec{\ni}_n^{\,0},\hat{T}(\vec{u}_0)=t^{mn}\vec{\ni}_m^{\,0}\otimes\vec{\ni}_n^{\,0},\,\vec{\nabla}_0\cdot\vec{u}_0=a,\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)=\varepsilon^{mn}\vec{\ni}_m^{\,0}\otimes\vec{\ni}_n^{\,0}.$$

Після перетворень квадратичну форму $\hat{\Phi}(\vec{u})=\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\vec{\nabla}_0$ для матеріалу Мурнагана можна привести до вигляду

$$\hat{\Phi}(\vec{u})=M^{kips}\frac{\partial u_k}{\partial\xi^i}\frac{\partial u_p}{\partial\xi^s},\tag{27}$$

де

$$\begin{aligned}M^{kips}&=\delta^{ik}\left[\lambda\left(\delta^{ps}+a^{sp}\right)+(2m-n)\left(\varepsilon^{sp}-a\delta^{ps}\right)+2la\delta^{ps}\right]+\\&+\delta^{ps}\left[\lambda a^{ki}+\frac{2m-n}{2}\left(a^{ki}+a^{ik}\right)\right]+\delta^{kp}\left[\mu\left(\delta^{is}+a^{si}+a^{is}\right)+\frac{2m-n}{2}a\delta^{is}+\frac{n}{2}\varepsilon^{si}\right]+\\&+\delta^{ip}\left[\mu\left(\delta^{ks}+a^{sk}\right)+\frac{2m-n}{2}a\delta^{ks}+\frac{n}{2}\varepsilon^{sk}\right]+\delta^{is}\left(t^{kp}+\frac{n}{2}\varepsilon^{kp}\right)+\delta^{ks}\left(\mu a^{ip}+\frac{n}{2}\varepsilon^{ip}\right),\end{aligned}$$

$\delta^{ij}$ – символи Кронекера.

За базовий розв'язок виберемо, як це робиться в літературі [4], розв'язок відповідної задачі, сформульованої в рамках статичної лінійної теорії пружності

$$\vec{u}_0=\frac{N_0}{ES}\left[\nu\left(\xi^1\vec{\ni}_1^{\,0}+\xi^2\vec{\ni}_2^{\,0}\right)-\xi^3\vec{\ni}_3^{\,0}\right].\tag{28}$$

Тут $S$ – площа області $D$ в $\gamma_0$-конфігурації; $\nu=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ – коефіцієнт Пуассона; $E=2\mu(1+\nu)$ – модуль пружності.

Із (28) знаходимо

$$\begin{aligned}&\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0=\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0^{T}=\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)=\frac{N_0}{ES}\left[\nu\left(\vec{\ni}_1^{\,0}\otimes\vec{\ni}_1^{\,0}+\vec{\ni}_2^{\,0}\otimes\vec{\ni}_2^{\,0}\right)-\vec{\ni}_3^{\,0}\otimes\vec{\ni}_3^{\,0}\right],\\&\vec{\nabla}_0\cdot\vec{u}_0=(2\nu-1)\frac{N_0}{ES},\qquad\hat{T}(\vec{u}_0)=-\frac{N_0}{S}\,\vec{\ni}_3^{\,0}\otimes\vec{\ni}_3^{\,0}.\end{aligned}\tag{29}$$

Для базових параметрів (29) квадратична форма (27) набуває вигляду

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{u})&=A_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi^1}\right)^2+2A_2\frac{\partial u_1}{\partial\xi^1}\frac{\partial u_2}{\partial\xi^2}+2A_3\frac{\partial u_1}{\partial\xi^1}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+A_4\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi^2}\right)^2+2A_4\frac{\partial u_1}{\partial\xi^2}\frac{\partial u_2}{\partial\xi^1}+\\&+A_5\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}\right)^2+2A_6\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^1}+A_4\left(\frac{\partial u_2}{\partial\xi^1}\right)^2+A_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial\xi^2}\right)^2+2A_3\frac{\partial u_2}{\partial\xi^2}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+\\&+A_5\left(\frac{\partial u_2}{\partial\xi^3}\right)^2+2A_6\frac{\partial u_2}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^2}+A_7\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^1}\right)^2+A_7\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^2}\right)^2+A_8\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)^2.\end{aligned}\tag{30}$$

Тут

$$A_1=\lambda+2\mu+2(\lambda+2\mu+2m+2l)\frac{\nu N_0}{ES}-\frac{2lN_0}{ES},\quad A_2=\lambda+2(\lambda+2l)\frac{\nu N_0}{ES}+$$

$$+(2m-n-2l)\frac{N_0}{ES}, \quad A_3=\lambda+(\lambda-2m+n+4l)\frac{\nu Q}{ES}-(\lambda+2l)\frac{N_0}{ES},$$
$$A_4=\mu+2(\mu+m)\frac{\nu N_0}{ES}-\frac{2m-n}{2}\frac{N_0}{ES}, \quad A_5=\mu+\left(2m-\frac{n}{2}\right)\frac{\nu N_0}{ES}-(2\mu+m)\frac{N_0}{ES},$$
$$A_6=\mu+\left(\mu+2m-\frac{n}{2}\right)\frac{\nu N_0}{ES}-(\mu+m)\frac{N_0}{ES}, \quad A_7=\mu+\left(2\mu+2m-\frac{n}{2}\right)\frac{\nu N_0}{ES}-$$
$$-m\frac{N_0}{ES}-\frac{N_0}{S}, \quad A_8=\lambda+2\mu-2(\lambda+l+2\mu+2m)\frac{N_0}{ES}+\frac{4l\nu N_0}{ES}-\frac{N_0}{S}.$$

Оскільки параметри базового розв'язку (29) не залежать від часу і силове навантаження є "мертвим", то, як випливає з теореми 4, достатньою умовою стійкості є виконання нерівності

$$W(\vec{u})=\iiint\limits_{X_0}\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0 dV_0=\iint\limits_{D}d\xi^1 d\xi^2\int\limits_0^b\Phi(\vec{u})d\xi^3\geqslant 0.$$

Для оцінки критичного навантаження використаємо апріорне задання вектора $\vec{u}$

$$u_1=0, \qquad u_2=f(\xi^3,\tau), \qquad u_3=-\xi^2 f'_{\xi^3}(\xi^3,\tau). \tag{31}$$

Це відповідає заданню бокового зміщення в напрямку осі $O\xi^2$ і повороту незмінного поперечного перерізу навколо осі $O\xi^1$. Для такого задання збурення вектора переміщення квадратична форма (30) запишеться

$$\hat{\Phi}(\vec{u})=(A_5-2A_6+A_7)\left(f'\right)^2+A_8\left(\xi^2\right)^2\left(f''\right)^2,$$

а граничні умови (25) стосовно функції $f(\xi^3,\tau)$ наберуть вигляду

$$f(0,\tau)=f(b,\tau)=0, \qquad f''(0,\tau)=f''(b,\tau)=0. \tag{32}$$

Функціонал $W(\vec{u})$ тепер набуває вигляду

$$W(\vec{u})=\int\limits_0^b\left[(A_5-2A_6+A_7)S\left(f'\right)^2+A_8 J\left(f''\right)^2\right]d\xi^3, \tag{33}$$

де

$$J=\iint\limits_D\left(\xi^2\right)^2 d\xi^1 d\xi^2$$

момент інерції області $D$ відносно осі $O\xi^1$.

Можна показати [5], що при умовах закріплення (32)

$$\int\limits_0^b\left(f''\right)^2 d\xi^3\geqslant\frac{\pi^2}{b^2}\int\limits_0^b\left(f'\right)^2 d\xi^3. \tag{34}$$

Якщо врахувати нерівність (34), то із (33) отримаємо оцінку

$$W(\vec{u}) \geqslant \int\limits_0^b \left[\frac{\pi^2 J A_8}{b^2} + S(A_5 - 2A_6 + A_7)\right] (f')^2 d\xi^3.$$

З умови $W(\vec{u}) \geqslant 0$ випливає, що

$$\pi^2 J A_8 + b^2 S(A_5 - 2A_6 + A_7) \geqslant 0.$$

Розв'язавши цю нерівність щодо $N_0$ , одержимо

$$N_0 \leqslant N_E \frac{1 + \frac{2\nu^2}{1-\nu-2\nu^2}}{1 + \left(1 + \frac{2(\lambda+2\mu+2m+l)-4\nu l}{E}\right) \frac{\pi^2 J}{Sb^2}} = \alpha N_E. \tag{35}$$

Тут

$$N_E = \pi^2 EJ/b^2$$

– Ейлерове значення критичної сили.

Для порівняння задамо поле вектора $\vec{u}$ співвідношеннями

$$u_1 = \nu \xi^1 \xi^2 f''(\xi^3, \tau), \qquad u_2 = \frac{1}{2}\nu \left[(\xi')^2 - (\xi')^2\right] f'' + f, \qquad u_3 = -\xi^2 f'. \tag{36}$$

Це формули для переміщень в задачі Сен-Венана про чистий згин. Для подання (36) квадратична форма (30) запишеться

$$\Phi(\vec{u}) = \left[2\nu^2(A_1 + A_2) - 4\nu A_3 + A_8\right] (\xi^2)^2 (f'')^2 + (A_5 - 2A_6 + A_7)(f')^2 +$$
$$+ \frac{\nu^2}{4} A_5 \left[(\xi^2)^2 - (\xi^1)^2\right]^2 (f''')^2 + \nu(A_5 - A_6) \left[(\xi^2)^2 - (\xi^1)^2\right] f' f'''.$$

Зберігши тут лише перші два доданки, за умов закріплення (32) з нерівності $W(\vec{u}) \geqslant 0$ отримаємо

$$\pi^2 J \left[2\nu^2(A_1 + A_2) - 4\nu A_3 + A_8\right] + b^2(A_5 - 2A_6 + A_7)S \geqslant 0.$$

Розв'язок цієї нерівності має вигляд

$$N_0 \leqslant \frac{N_E}{1 + (1+\gamma)\frac{\pi^2 J}{Sb^2}} = \beta N_E, \tag{37}$$

де

$$\gamma = \frac{2(\lambda + 2\mu + 2m + l) - 4\nu(\lambda + 3l) + 2\nu^2(2\lambda - 6m + 3n + 12l) - 8\nu^3(\lambda + \mu + m + 2l)}{E}.$$

Якщо у формулах (35) і (37) сталі Мурнагана $l$, $m$, $n$ прийняти рівними нулеві, то одержимо значення критичних параметрів для стандартного матеріалу другого порядку. Відповідні коефіцієнти пропорційності позначимо $\alpha_1$ і $\beta_1$. Результати числових розрахунків коефіцієнтів $\alpha_1$ і $\beta_1$ в залежності від матеріалу і від геометричних характеристик

циліндричного тіла, в поперечному перерізі якого є квадрат зі стороною $a$, наведено в таблиці 1. Значення сталих Ляме для відповідних матеріалів наведено в монографії [4].

**4. Стійкість циліндричного тіла з напівлінійного матеріалу Джона.** Густина потенціальної енергії деформації для напівлінійного матеріалу Джона (стандартний матеріал першого порядку) задається у вигляді [4,6]

$$U_0 = \frac{1}{2}\lambda I_1^2\left(\hat{U}-\hat{I}\right)+\mu I_1\left(\left(\hat{U}-\hat{I}\right)^2\right).$$

Тут тензор $\hat{U}=\hat{G}^{\frac{1}{2}}$ носить назву лівої міри спотворення.

Якщо виконати диференціювання $U_0$ за градієнтом $\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{r}$, то одержимо

$$\hat{P}_0=\left[\left(\lambda I_1\left(\hat{U}-\hat{I}\right)-2\mu\right)\hat{U}^{-1}+2\mu\hat{I}\right]\cdot\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{r}.$$

Надалі обмежимося випадком лінійних перетворень $\gamma_0$-конфігурації в актуальні конфігурації $\gamma_\tau$, при яких зберігаються головні напрямки. При таких перетвореннях тензор $\hat{P}_0$ є симетричним і триедр $\vec{\ni}_s^{\,0}$ визначає його головні напрямки

$$\hat{P}_0=\sum_{s=1}^{3}P_s\vec{\ni}_s^{\,0}\otimes\vec{\ni}_s^{\,0}=\left(\lambda I_1\left(\hat{U}-\hat{I}\right)-2\mu\right)\hat{I}+2\mu\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{r},\quad P_s=\lambda I_1\left(\hat{U}-\hat{I}\right)-2\mu+2\mu v_s. \quad (38)$$

У монографії [4] показано, що за таких умов

$$\hat{P}_0^{\bullet}=\lambda\overrightarrow{\nabla}_0\cdot\vec{u}\hat{I}+\mu\left(\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}+\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0\right)+\frac{1}{2}\sum_{s,k=1}^{3}\alpha_{sk}\frac{\partial u_s}{\partial\xi^k}\left(\vec{\ni}_k^{\,0}\otimes\vec{\ni}_s^{\,0}-\vec{\ni}_s^{\,0}\otimes\vec{\ni}_k^{\,0}\right), \quad (39)$$

де

$$\alpha_{sk}=(P_s+P_k)/(v_s+v_k).$$

Можна показати, що для напівлінійного матеріалу Джона квадратична форма $\Psi(\vec{u})=\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0$ має вигляд

$$\Psi(\vec{u})=\sum_{s,k,m,n=1}^{3}D^{skmn}\frac{\partial u_s}{\partial\xi^k}\frac{\partial u_m}{\partial\xi^n}, \quad (40)$$

де

$$D^{skmn}=\lambda\delta^{sk}\delta^{mn}+\left(\mu+\frac{\alpha_{sk}}{2}\right)\delta^{ms}\delta^{nk}+\left(\mu-\frac{\alpha_{sk}}{2}\right)\delta^{sn}\delta^{km}.$$

Варто відзначити, що вираз (39) для тензора $\hat{P}_0^{\bullet}$ відрізняється від виразу для тензора напружень Коші $\hat{T}$ лінійної теорії пружності тільки наявністю доданків, що характеризуються ротором вектора $\vec{u}$.

Розглянемо задачу стійкості, яка сформульована в попередньому пункті. Згідно з (29) і (38)

$$P_1=P_2=0,\quad P_3=-\frac{N_0}{S},\quad v_1=v_2=1+\frac{\nu N_0}{ES},\quad v_3=1-\frac{N_0}{ES}. \quad (41)$$

Для параметрів (41) квадратична форма (40) приводиться до вигляду

$$\Psi(\vec{u})=(\lambda+2\mu)\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi^1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial\xi^2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)^2\right]+2\lambda\left[\frac{\partial u_1}{\partial\xi^1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)+\frac{\partial u_2}{\partial\xi^2}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right]+$$

$$+\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi^2}+\frac{\partial u_2}{\partial \xi^1}\right)^2+(\mu-k)\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi^3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi^3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi^1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi^2}\right)^2\right]+$$
$$+2(\mu+k)\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi^3}\frac{\partial u_3}{\partial \xi^1}+\frac{\partial u_2}{\partial \xi^3}\frac{\partial u_3}{\partial \xi^2}\right), \qquad (42)$$

де

$$k=\frac{N_0 E}{2(2SE-(1-\nu)N_0)}.$$

Для апріорного задання вектора $\vec{u}$ у вигляді (31) квадратична форма (42) запишеться

$$\Psi(\vec{u})=(\lambda+2\mu)\left(\xi^2\right)^2\left(f''\right)^2-4k\left(f'\right)^2.$$

Якщо використати нерівність (34), то одержуємо таку оцінку для функціоналу $W(\vec{u})$

$$W(\vec{u})\geqslant\int\limits_0^b\left[\frac{\pi^2}{b^2}(\lambda+2\mu)J-4kS\right]\left(f'\right)^2 d\xi^3.$$

З умови $W(\vec{u})\geqslant 0$ випливає, що $\pi^2(\lambda+2\mu)J-4b^2kS\geqslant 0$, або

$$N_0\leqslant N_E\frac{1+\frac{2\nu^2}{1-\nu-2\nu^2}}{1+\left(1-\frac{\nu-3\nu^2}{1-\nu-2\nu^2}\right)\frac{\pi^2 J}{2Sb^2}}=\alpha_2 N_E. \qquad (43)$$

Задамо поле вектора $\vec{u}$ співвідношеннями (36). Квадратична форма (42) у цьому випадку має вигляд

$$\Psi(\vec{u})=\left[\lambda+2\mu-4\nu\lambda+4\nu^2(\lambda+\mu)\right]\left(\xi^2\right)^2\left(f''\right)^2-4k\left(f'\right)^2+$$
$$+\frac{\nu^2}{4}(\mu-k)\left[\left(\xi^1\right)^2+\left(\xi^2\right)^2\right]^2\left(f'''\right)^2-2k\nu\left(\left(\xi^2\right)^2-\left(\xi^2\right)^2\right)f'f'''.$$

Збережемо тут лише перші два доданки. Тоді з умови $W(\vec{u})\geqslant 0$ одержимо нерівність

$$N_0\leqslant\frac{N_E}{1+(1-\nu)\frac{\pi^2 J}{2b^2 S}}=\beta_2 N_E. \qquad (44)$$

У таблиці 2 наведено результати числових розрахунків для коефіцієнтів $\alpha_2$ і $\beta_2$, які задаються формулами (43), (44).

З даних, наведених в таблицях 1 і 2, можна зробити висновок, що при апріорному заданні вектора $\vec{u}$ у вигляді (36) критичне значення параметра навантаження практично збігається із значенням критичної сили Ейлера для всіх тестованих матеріалів. При заданні вектора $\vec{u}$ у вигляді (31) критичні значення параметра навантаження одержуються дещо вищими від критичної сили Ейлера. Це пояснюється тим, що апріорне задання еквівалентне накладанню в'язей, які обмежують деформівність стержня.

| b/a | 10 | | 20 | |
|---|---|---|---|---|
| *Коефіцієнт* *Матеріал* | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\alpha_1$ | $\beta_1$ |
| Сталь Hecla 17 | 1,261 | 0,976 | 1,289 | 0,994 |
| Оргскло | 1,48 | 0,975 | 1,517 | 0,994 |
| Вольфрам | 1,174 | 0,975 | 1,199 | 0,994 |
| Мідь | 1,524 | 0,975 | 1,563 | 0,994 |

Таблиця 1

| b/a | 10 | | 20 | |
|---|---|---|---|---|
| *Коефіцієнт* *Матеріал* | $\alpha_2$ | $\beta_2$ | $\alpha_2$ | $\beta_2$ |
| Сталь Hecla 17 | 1,294 | 0,977 | 1,289 | 0,999 |
| Оргскло | 1,524 | 0,977 | 1,529 | 0,999 |
| Вольфрам | 1,272 | 0,977 | 1,276 | 0,999 |
| Мідь | 1,57 | 0,977 | 1,575 | 0,999 |

Таблиця 2


1. Доманський П.П. *Метод розкладу за тензорними функціями в побудові рівнянь стійкості руху пружних циліндричних тіл* // Доп. НАН України. – 1997. – N 6. – С. 53 - 59.

2. Ильюшин А.А. Механика сплошной сред . – М.: Изд - во Моск. ун - та, 1978. – 287 с.

3. Мовчан А.А. *Устойчивость процессов по двум метрикам* // ПММ. – 1960. – Т. XXIX. – С. 3 - 20.

4. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.

5. Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. - Новосибирск: Наука, 1987. – 153 с.

6. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.


*Стаття надійшла до редколегії 24.04.1998*