УДК 517.95

# ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ДЕЯКИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМ

С. П. Лавренюк

**Lavrenyuk S. P. On the uniqueness of a solution of some degenerated evolutional systems.** In the paper is considered some degenerated evolutional system with second time derivative. There are obtained sufficient conditions of the uniqueness of a weak solution the boundary problem for this system.

У працях [1–4] було вивчено коректність задач для параболічних рівнянь і систем з першою похідною за часом, які вироджуються на початковій гіперплощині. Еволюційні системи з другою похідною за часом, які вироджуються в початковий момент часу і містять, як частковий випадок, гіперболічні рівняння другого порядку, вивчено у працях [5–10].

Метою запропонованої праці є дослідження умов єдиності узагальненого розв'язку задачі в нециліндричних областях для деякого класу еволюційних систем з другою похідною за часом, які вироджуються на початковій гіперплощині в еліптичні системи.

Нехай $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – обмежена область, яка лежить в шарі $\{0 < t < T\}$, і множина $\Omega_\tau = Q \bigcap \{t = \tau\}$ для кожного $\tau \in (0,T)$ така, що $\operatorname{mes} \Omega_\tau > 0$, причому $\Omega_{\tau_1} \subset \Omega_{\tau_2}$, якщо $\tau_1 < \tau_2$; $\overline{\Omega}_0 = \overline{Q} \bigcap \{t = 0\}$; $\overline{\Omega}_T = \overline{Q} \bigcap \{t = T\}$. Позначимо $S = \bigcup\limits_{\tau \in (0,T)} \partial\Omega_\tau$, $\nu_t$ – кут між нормаллю до поверхні $S$ і віссю $t$, $Q_{t_1,t_2} = Q \bigcap \{t_1 < t < t_2\}$. Будемо припускати, що $S \in C^1$, $\nu_t \neq 0$.

Розглянемо в $Q$ систему рівнянь

$$(\Phi(x,t)u_t)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} G_\alpha(x,t) D^\alpha u + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} C_\alpha(x,t) D^\alpha u_t = \sum_{|\alpha|\leqslant p} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t) \qquad (1)$$

з крайовими умовами

$$D^\alpha u|_S = 0, \quad |\alpha| \leqslant l-1, \quad D^\alpha u_t|_S = 0, \quad |\alpha| = l-1, \qquad (2)$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35G15.

де $l \geqslant m$; $m \geqslant 1$; $0 \leqslant p \leqslant m$; $\Phi$, $A_{\alpha\beta}$, $|\alpha| = |\beta| \leqslant m$, $B_{\alpha\beta}$, $|\alpha| = |\beta| \leqslant l$, $G_\alpha$, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, $C_\alpha$, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant l$ – квадратні матриці порядку $N$; $u = \operatorname{colon}(u_1, ..., u_N)$; $F_\alpha = \operatorname{colon}(F_{\alpha_1}, ..., F_{\alpha_N})$, $|\alpha| \leqslant p$; $x = (x_1, ..., x_n)$; $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Будемо припускати, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються такі умови.

**Умова** $(\Phi_0)$. $\Phi \in L^\infty(Q)$; $\varphi(t)|\xi|^2 \leqslant (\Phi(x,t)\xi, \xi) \leqslant \varphi_0\varphi(t)|\xi|^2$ *для майже всіх* $(x,t) \in Q, \forall \xi \in \mathbb{R}^N$, *де* $\varphi(t) \in C([0,T])$; $\varphi(0) = 0$; $\varphi(t) > 0$, $t \in (0,T]$; $\Phi(x,t) = \Phi^*(x,t)$, *для майже всіх* $(x,t) \in Q$; $\varphi_0 = \text{const} > 0$;

**Умова** $(\Phi_1)$. $\Phi_t \in L^\infty(Q_{\varepsilon,T})$ $\forall \varepsilon > 0$; $(\Phi_t(x,t)\xi, \xi) \geqslant \varphi_1(t)|\xi|^2$ *для майже всіх* $(x,t) \in Q$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, *де* $\varphi_1(t) \in C((0,T])$; $\varphi_1(t) \geqslant 0$, $t \in (0,T]$.

**Умова** $(A_0)$. $A_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta t} \in L^\infty(Q)$;

$$\int_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta v, D^\alpha v)dx \geqslant a_0 \int_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 dx, \quad a_0 = \text{const} > 0,$$

$$\text{для майже всіх} \quad t \in (0,T), \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_t); \; A_{\alpha\beta}(x,t) = A_{\beta\alpha}(x,t),$$
$$A_{\alpha\beta}(x,t) = A^*_{\beta\alpha}(x,t) \quad \text{для майже всіх} \quad (x,t) \in Q, \quad |\alpha| = |\beta| \leqslant m.$$

**Умова** $(B_0)$. $B_{\alpha\beta} \in L^\infty(Q)$;

$$\int_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta v, D^\alpha v)dx \geqslant b_0\psi(t) \int_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v|^2 dx, \quad b_0 = \text{const} > 0,$$

$$\text{для майже всіх} \quad t \in (0,T), \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega_t),$$
$$\text{де } \psi \in C([0,T]), \quad \psi(0) \geqslant 0, \quad \psi(t) > 0 \quad \forall t \in (0,T].$$

Тут $\overset{\circ}{H}{}^k(\Omega_t)$ – замикання простору функцій $C_0^\infty(\Omega_t)$ за нормою простору $H^k(\Omega_t)$.

Введемо простір функцій $H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}(Q)$ як замикання множини нескінченно диференційовних функцій в $\overline{Q}$, які дорівнюють нулю в околі $S$, за нормою

$$\|u\|^2 = \int_Q \left( |u_t|^2 \varphi(t) + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 + \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2 \right) dxdt.$$

Зауважимо, що $D^\alpha u = 0$ на $S$ для всіх $|\alpha| \leqslant m-1$, $D^\alpha u_t = 0$ на $S$ для всіх $|\alpha| \leqslant l-1$, якщо $u \in H^{l,1}_{0,\psi,\varphi}(Q)$ і, зокрема, $u(\cdot,t) \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_t)$, $u_t(\cdot,t) \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega_t)$ для майже всіх $t \in (0,T)$.

Розглянемо початкові умови

$$\lim_{t\to+0} u(x,t) = 0, \quad \lim_{t\to+0} \int_{\Omega_t} \varphi(t) u_t^2(x,t)\, dx = 0. \tag{3}$$

**Означення.** *Функція* $u$, *яка задовольняє включення* $u \in H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}(Q) \cap C([0,T]; L^2(\Omega_t))$, $u_t \in C((0,T]; L^2(\Omega_t))$, *рівність*

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-(\Phi(x,t)u_t, v_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u, D^\alpha v) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t, D^\alpha v) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t)D^\alpha u, v) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t, v) - \sum_{|\alpha|\leqslant p} (F_\alpha(x,t), D^\alpha v)\Big] dxdt +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_{t_2}} (\Phi(x,t)u_t, v)dx - \int\limits_{\Omega_{t_1}} (\Phi(x,t)u_t, v)dx = 0$$

*для довільної функції* $v \in H^{l,1}_{0,\mathrm{loc}}(Q)$ *і всіх* $t_1, t_2, 0 < t_1 < t_2 \leqslant T$, *та початкові умови (3) називається узагальненим розв'язком задачі (1)-(3).*

Тут $H^{l,1}_{0,\mathrm{loc}}(Q)$ – множина функцій, які належать простору $H^{l,1}_0(Q_{t_1,t_2})$ для довільних $t_1, t_2$, $0 < t_1 < t_2 \leqslant T$; $H^{l,1}_0(Q_{t_1,t_2})$ – замикання множини нескінченно диференційовних функцій в $\overline{Q}_{t_1,t_2}$, які дорівнють нулю в околі $S_{t_1,t_2} = \bigcup\limits_{t\in(t_1,t_2)} \partial\Omega_t$, за нормою простору $H^{l,1}(Q_{t_1,t_2})$.

Надалі будемо використовувати відомі оцінки Фрідріхса ([11], с. 50)

$$\int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha v|^2 dx \leqslant \gamma_{k,j}(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha v|^2 dx, \quad j = 0, ..., k,$$

які справджуються для функцій $v \in \overset{\circ}{H}{}^k(\Omega_t)$.

Введемо позначення:

$$\alpha_0 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \frac{\varphi_1(t)}{\psi(t)}; \quad \omega(t) = \begin{cases} \psi(t), & \text{якщо} \quad \alpha_0 = 0, \\ \varphi_1(t), & \text{якщо} \quad \alpha_0 > 0. \end{cases};$$

$$\Gamma_k(t) = \sum_{j=1}^k \gamma_{k,j}(t); \; g_0(t) = \sup_{\Omega_t} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} \frac{\|G_\alpha(x,t)\|}{\omega(t)}; \; c_0(t) = \sup_{\Omega_t} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} \frac{\|C_\alpha(x,t)\|}{\omega(t)\psi(t)},$$

де $\|\cdot\|$ – евклідова норма матриці.

**Теорема.** *Нехай коефіцієнти системи (1) задовольняють умови* $(\Phi_0), (\Phi_1), (A_0), (B_0)$ *і, крім того,* $\nu_t \neq 0$, $G_\alpha(1 \leqslant |\alpha| \leqslant m), C_\alpha(1 \leqslant |\alpha| \leqslant l) \in L^\infty(Q_{\varepsilon,T})$, $\forall\varepsilon > 0$; $c_0, g_0 \in L^\infty(0,T)$; $\inf\limits_{[0,T]} \sup\limits_{[0,\tau]} c_0(t) > 0$; *якщо* $\alpha_0 = 0$, *то* $\inf\limits_{[0,T]} \sup\limits_{[0,\tau]} \sqrt{\Gamma_l(t)\gamma_{l,0}(t)c_0(t)} < 2b_0$; *якщо* $\alpha_0 > 0$, *то* $\inf\limits_{[0,T]} \sup\limits_{[0,\tau]} \Gamma_l(t)c_0(t) < 2b_0$. *Тоді задача (1)-(3) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

*Доведення.* Припустимо, що існують два узагальнених розв'язки $u^1(x,t), u^2(x,t)$ задачі (1)-(3). Тоді на підставі означення функція $u(x,t) = u^2(x,t) - u^1(x,t)$ буде задовольняти рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[\frac{1}{2}(\Phi_t(x,t)u_t, u_t) + \frac{\lambda}{2}(\Phi(x,t)u_t, u_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u, D^\alpha u_t) +$$

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t, D^\alpha u_t)+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}(G_\alpha(x,t)D^\alpha u, u_t)+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t, u_t)\Big]e^{-\lambda t}dxdt+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}}(\Phi(x,t_2)u_t,u_t)e^{-\lambda t_2}dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}}(\Phi(x,t_1)u_t,u_t)e^{-\lambda t_1}dx=0 \tag{5}$$

(за $v$ вибрано функцію $u_te^{-\lambda t}$, $\lambda>0$).

Перетворимо і оцінимо кожний доданок в (5) окремо. На підставі умов теореми маємо:

$$\mathcal{I}_1=\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}[(\Phi_t(x,t)u_t,u_t)+\lambda(\Phi(x,t)u_t,u_t)]e^{-\lambda t}dxdt\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\varphi_1(t)|u_t|^2e^{-\lambda t}dxdt;$$

$$\mathcal{I}_2=\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u, D^\alpha u_t)e^{-\lambda t}dxdt=$$
$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u, D^\alpha u)e^{-\lambda t_2}dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u, D^\alpha u)e^{-\lambda t_1}dx+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}((\lambda A_{\alpha\beta}(x,t)-A_{\alpha\beta t}(x,t))D^\beta u, D^\alpha u)e^{-\lambda t}dxdt\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(\lambda a_0-a_1)\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^2e^{-\lambda t}dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u, D^\alpha u)e^{-\lambda t_1}dx;$$

$a_1$ – стала, яка залежить від $\|A_{\alpha\beta t}\|(|\alpha|=|\beta|\leqslant m)$, області $\Omega_T$ і чисел $m,l$;

$$\mathcal{I}_3=\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t, D^\alpha u_t)e^{-\lambda t}dxdt\geqslant b_0\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t|^2e^{-\lambda t}dxdt;$$

$$\mathcal{I}_4=\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}(G_\alpha(x,t)D^\alpha u, u_t)e^{-\lambda t}dxdt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Big[\frac{1}{\delta_1}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}\frac{\|G_\alpha(x,t)\|^2}{\omega(t)}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}|D^\alpha u|^2+\delta_1|u_t|^2\omega(t)\Big]e^{-\lambda t}dxdt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Big[\frac{1}{\delta_1}\varGamma_m(t)g_0(t)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^2+\delta_1\omega(t)|u_t|^2\Big]e^{-\lambda t}dxdt,\quad \delta_1>0;$$

$$\mathcal{I}_5=\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t, u_t)e^{-\lambda t}dxdt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Big[\frac{1}{\delta_2}\varGamma_l(t)c_0(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t|^2+\delta_2\omega(t)|u_t|^2\Big]e^{-\lambda t}dxdt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_5$ і те, що

$$\lim_{t_1 \to +0} \int\limits_{\Omega_{t_1}} \Big[ (\Phi(x,t_1)u_t, u_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta}(x,t_1)D^\beta u, D^\alpha u) \Big] e^{-\lambda t_1} dx = 0,$$

з рівності (5) отримаємо нерівність

$$\int\limits_{Q_{0,t_2}} \Big[ \Big( a_0\lambda - a_1 - \frac{1}{\delta_1}\Gamma_m(t)g_0(t) \Big) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 + \Big( 2b_0 - \frac{1}{\delta_2}\Gamma_l(t)c_0(t) \Big)\psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2 +$$

$$+ \Big( \frac{\varphi_1(t)}{\psi(t)} - (\delta_1 + \delta_2)\frac{\omega(t)}{\psi(t)} \Big)\psi(t)|u_t|^2 \Big] e^{-\lambda t} dxdt \leqslant 0. \tag{6}$$

Нехай $\alpha_0 = 0$. Маємо

$$\int\limits_{\Omega_t} |u_t|^2 dx \leqslant \int\limits_{\Omega_t} \gamma_{l,0}(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2 dx.$$

Виберемо $\delta_2 = \sqrt{\dfrac{\Gamma_l(t)c_0(t)}{\gamma_{l,0}(t)}}$. На підставі умов теореми існує таке $\tau_0 > 0$, що буде виконуватися нерівність

$$2b_0 - \sup_{[0,\tau_0]} \sqrt{\Gamma_l(t)\gamma_{l,0}(t)c_0(t)} = \varepsilon_1 > 0.$$

Якщо тепер вибрати $\delta_1$ і $\lambda$ з умов:

$$\delta_1 \sup_{[0,\tau_0]} \gamma_{l,0}(t) \leqslant \varepsilon_1, \quad a_0\lambda - a_1 - \frac{1}{\delta_1} \sup_{[0,\tau_0]} \Gamma_m(t)g_0(t) \geqslant \frac{a_0}{2},$$

то з нерівності (6) отримаємо, що $u = 0$ майже всюди в $Q_{0,\tau_0}$.

Нехай $\alpha_0 > 0$. Покладемо $\delta_2 = \dfrac{1}{2b_0}\Gamma_l(t)c_0(t)$. Згідно з умовами теореми і в цьому випадку можна вибрати такі числа $\tau_0, \delta_1, \lambda$, що будуть виконуватися нерівності

$$1 - \frac{1}{2b_0} \sup_{[0,\tau_0]} \Gamma_l(t)c_0(t) - \delta_1 \geqslant 0, \quad a_0\lambda - a_1 - \frac{1}{\delta_1} \sup_{[0,\tau_0]} \Gamma_m(t)g_0(t) \geqslant \frac{a_0}{2}.$$

Знову з нерівності (6) отримаємо, що $u = 0$ майже всюди в $Q_{0,\tau_0}$. Оскільки в області $Q_{\tau_0,T}$ система (1) не вироджується, то далі можна показати, що $u = 0$ майже всюди в $Q_{\tau_0,T}$. Це й завершує доведення теореми.

1. Калашников А.С. *Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка*// Вестник МГУ. Сер. математика, механика. – 1971. – N 2,3. – С. 42–48, 3–9.

2. Возняк О.Г., Івасишен С.Д. *Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині*// Доп. НАН України. – 1994. – N 6. – С. 7–11.

3. Возняк О.Г.*Про інтегральне зображення розв'язків параболічних систем з виродженням*// Матеріали міжнародної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С. 42–60.

4. Ивасишен С.Д., Андросова Л.Н. *Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова*// Дифференц. уравн. – 1991. – Т. 27, N 3. – С. 479–487.

5. Барановський Ф.Т. *Задача Коши с видоизмененными начальными данными для обобщенного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу*// Математ. сбор. – 1983.– Т. 120, N 2. – С. 147–163.

6. Бубнов Б.А. *Смешанная задача для одного класса неклассических уравнений*// Док. АН СССР. – 1984. – Т. 275, N 3.– С. 525–528.

7. Бубнов Б.А., Врагов В.Н. *К теории корректных краевых задач для некоторых классов ультрагиперболических уравнений*// Док. АН СССР.– 1982. – Т.264, N 4.– С. 795–800.

8. Лавренюк С.П. // Смешанная задача для вырождающегося уравнения типа колебания пластины// Дифференц. уравн.– 1989.– Т.25, N 8.–С. 1375–1383.

9. Лавренюк С.П. *Змішана задача для однієї слабко виродженої системи*// Доповіді АН України. Матем., природозн., техн. науки.–1993.– N 5. – С. 18–20.

10. Лавренюк С.П. *Смешанная задача для сильно вырождающейся эволюционной системы* // Дифференц. уравн. – 1994. – Т.30, N 8. – С. 1405 – 1411.

11. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.– М.: Мир, 1978. – 336 с.

*Стаття надійшла до редакції 12. 12. 1997*