УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ ЗА ЧАСОМ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

М. М. Симотюк, Н. М. Задорожна

Symotyuk M.M., Zadorozhna N.M. Nonlocal boundary value problem for nonlinear differential equations with fractional time derivative with variable coefficients. The existence and uniqueness of a classical solution of nonlocal boundary value problem for nonlinear differential equation with regularized Liouville-Reimann fractional time derivative with variable coefficients are established.

У праці досліджено нелокальну крайову задачу для нелінійного диференціального рівняння з дробовою похідною за часом зі змінними за t коефіцієнтами. Встановлено достатні умови існування та єдиності класичного $2\pi-$періодичного за просторовою змінною розв'язку розглядуваної задачі. Метод доведення базується на зведенні задачі до знаходження єдиної нерухомої точки деякого інтегрального оператора у відповідному функціональному просторі.

Подібні задачі для нелінійних гіперболічних рівнянь вивчено в працях [1], [2].

В області $D = [0,T] \times \Omega$, де Ω – коло, отримане ототожненням протилежних кінців відрізка $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}$, розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j(t) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-j} P_{m_{n-j}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) + \tag{1}$$

$$+a_\alpha(t) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha} P_{m_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) = \varepsilon F(t,x,u(t,x)) + f(t,x), \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$\frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}|_{t=0} - \nu \frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}|_{t=T} = \phi_j(x), \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

де $m_i \in \mathbb{N}, i = \overline{0,n}, \quad m_\alpha \in \mathbb{N}, m_n - 2 \geqslant m_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant m_0 \geqslant m_\alpha, P_{m_i}(\frac{\partial}{\partial x}), i = \overline{0,n}$, $P_{m_\alpha}(\frac{\partial}{\partial x})$ – диференціальні оператори зі сталими коефіцієнтами порядку $m_i, \quad i = \overline{0,n}, \quad$ і m_α відповідно,

$$|P_{m_n}(ik)| > \mu |k|^{m_n}, \quad |P_{m_{n-j}}(ik)| \leqslant \mu_j |k|^{m_{n-j}}, \quad |P_{m_\alpha}(ik)| \leqslant \mu_\alpha |k|^{m_\alpha},$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35G30, 35S15.

$\mu > 0, \mu_j > 0, j = \overline{1,n}, \mu_\alpha > 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \frac{1}{a_0(t)}, \quad a_i(t), i = \overline{1,n}, \quad a_\alpha(t)-$ неперервні функції на $[0,T]$, $F(t,x,u)$ визначена, неперервна за змінною t і досить гладка за x та u в області $D_1 = \{(t,x,u) : (t,x) \in D, u \in \bar{S}(u^0,\rho)\}$, де $\bar{S}(u^0,\rho) = \{u(t,x) \in C^{(n-1,m_n)}(D) : \|u - u^0\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)} \leqslant \rho\}$, $u^0 = u^0(t,x)$ – розв'язок незбуреної задачі (1), (2) (коли $\varepsilon = 0$); функції $F(t,x,u), f(t,x), \phi_j(x), j = \overline{1,n}, \quad 2\pi-$ періодичні за змінною x і розвиваються в рівномірно і абсолютно збіжні ряди Фур'є;

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha v(t,x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v(\tau,x)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau - t^{-\alpha}v(0,x)\right), \quad 0 < \alpha < 1, -$$

регуляризована дробова похідна [4].

Теорема. *Якщо* $|\nu| < 1/3$,

$$\rho = 3|\varepsilon| a m_n T\left(p + \tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\right)(M + M_{22} + (2M_{23} + M_3)\|u^0\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)} +$$
$$+ M_{33}\|u^0\|^2_{C^{(n-1,m_n)}(D)}) \leqslant 1, \tag{3}$$
$$T \leqslant (1/3 - |\nu|)(1 + a(1+m_n)(p + \tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2})(|\varepsilon|(L + L_{22} + (\rho + \|u^0\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)})\times$$
$$\times(2M_{33} + 2L_{23} + L_3) + (\rho + \|u^0\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)})^2 L_{33} + 2M_{23} + M_3) + n + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}))^{-1}, \tag{4}$$

де

$$a = \max\left\{\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{1}{a_0(t)}\right|, \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{a_j(t)}{a_0(t)}\right|\right\}, \max_{t\in[0,T]}\left|\frac{a_\alpha(t)}{a_0(t)}\right|\right\},$$
$$p = \max\left\{\left|\frac{1}{P_{m_n}(0)}\right|, \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\left|\frac{P_{m_{n-j}}(0)}{P_{m_n}(0)}\right|\right\}, \left|\frac{P_{m_\alpha}(0)}{P_{m_n}(0)}\right|\right\}, \tilde{\mu} = \max\left\{\frac{1}{\mu}, \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\frac{\mu_j}{\mu}\right\}, \frac{\mu_\alpha}{\mu}\right\},$$

причому функції $F(t,x,u), f(t,x), \phi_j(x), j = \overline{1,n}$, *задовольняють таким умовам:*

(a) f *неперервна в* D *і часткова похідна* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *неперервна за змінною* t *і при фіксованому* $t \in [0,T]$ *кусково-неперервна за змінною* x *на* $\mathbb{R}$;

(b) $\phi_j \in C^{m_n}(\mathbb{R}), j = \overline{1,n}$, *а похідна* $\frac{d^{m_n+1}\phi_j(x)}{dx^{m_n+1}}$ *кусково-неперервна на* $\mathbb{R}$;

(c) $F \in C^{(0,2,2)}(D_1)$ *і для всіх* $(t,x,u),(t,x,v)$ *з* D_1

$$|F(t,x,u)| \leqslant M, \quad |F_i(t,x,u)| \leqslant M_i, \quad |F_{ij}(t,x,u)| \leqslant M_{ij}, \quad i,j \in \{2,3\},$$
$$|F(t,x,u) - F(t,x,v)| \leqslant L|u-v|, \quad |F_i(t,x,u) - F_i(t,x,v)| \leqslant L_i|u-v|,$$
$$|F_{ij}(t,x,u) - F_{ij}(t,x,v)| \leqslant L_{ij}|u-v|, \quad i,j \in \{2,3\},$$

(тут F_{ij} *- мішана похідна 2-го порядку функції* F *за* $i-$*овим та* $j-$*овим аргументами), то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) в просторі* $C^{(n,m_n)}(D)$, *для якого правильна*

оцінка

$$\|u(t,x)\|_{C^{(n,m_n)}(D)} \leqslant \rho + \|u^0(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)} +$$
$$+a\Bigg(\Bigg(p+\tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\Bigg)\Bigg(\max_{(t,x)\in D}|f(t,x)| + |\varepsilon|M + \Bigg(2\Bigg(n+\frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\Bigg)+$$
$$+|\varepsilon|(2M_{23}+M_3)\big)(\rho+\|u^0(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)}) + |\varepsilon|m_n M_{22}+$$
$$+|\varepsilon|M_{33}(\rho+\|u^0(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)})^2\Bigg) + 1/2\tilde{\mu}m_n\Bigg(\sum_{|k|>0}\beta_k^2+\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\Bigg)\Bigg), \tag{5}$$

де сталі $\beta_k, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, *визначаються нижче.*

Доведення. Розв'язок розглядуваної задачі шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geqslant 0} u_k(t)\exp(ikx). \tag{6}$$

Підставивши ряд (6) у рівняння (1) та умови (2), для визначення коефіцієнтів $u_k(t), k \in \mathbb{Z}$, одержуємо таку крайову задачу для звичайного диференціального рівняння з дробовою похідною

$$L\left(\frac{d}{dt}, ik\right)u_k(t) = \varepsilon F_k(t,\{u_m(t)\}) + f_k(t), \tag{7}$$

$$u_k^{(j-1)}(0) - \nu u_k^{(j-1)}(T) = \phi_{j,k}, \quad j=\overline{1,n}, \tag{8}$$

де

$$F_k(t,\{u_m(t)\}) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} F\left(t,x,\sum_{|m|\geqslant 0}u_m(t)\exp(imx)\right)\exp(-ikx)dx,$$

$f_k(t), \quad \phi_{j,k}, \quad j=\overline{1,n}, \quad k\in\mathbb{Z},$ – коефіцієнти Фур'є функцій $f(t,x)$ і $\phi_j(x), \quad j=\overline{1,n}$, відповідно.

Ввівши позначення

$$y_1(k,t) = u_k(t),\ y_2(k,t) = \frac{d}{dt}u_k(t),\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,y_n(k,t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}u_k(t), \tag{9}$$

зведемо рівняння (7) до такої системи звичайних диференціальних рівнянь з дробовою похідною:

$$\frac{d}{dt}y_1(k,t) = y_2(k,t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d}{dt}y_{n-1}(k,t) = y_n(k,t),$$
$$\frac{d}{dt}y_n(k,t) = \frac{1}{a_0(t)}\frac{1}{P_{m_n}(ik)}\left(f_k(t)+\varepsilon F_k(t,\{y_1(m,t)\})\right) - \sum_{j=1}^{n}\frac{a_j(t)}{a_0(t)}\frac{P_{m_{n-j}}(ik)}{P_{m_n}(ik)}\times$$
$$\times y_{n-j+1}(k,t) - \frac{a_\alpha(t)}{a_0(t)}\frac{P_{m_\alpha}(ik)}{P_{m_n}(ik)}\Gamma^{-1}(1-\alpha)\int_0^t\frac{y_2(k,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau. \tag{10}$$

При цьому умови (8) для функції $u_k(t)$ переходять в такі умови для функцій $y_j(k,t)$, $j=\overline{1,n}$:

$$y_j(k,0)-\nu y_j(k,T)=\phi_{j,k}, \quad j=\overline{1,n}. \tag{11}$$

Інтегруючи систему (10) і використовуючи умови (8) та заміну (9), приходимо до системи інтегро-функціональних рівнянь

$$\begin{aligned}
&u_k(t)=\phi_{1,k}+\nu u_k(T)+\int_0^t \frac{d}{d\tau}u_k(\tau)d\tau,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}u_k(t)=\phi_{n-1,k}+\nu u_k^{(n-2)}(T)+\int_0^t \frac{d^{(n-1)}}{d\tau^{(n-1)}}u_k(\tau)d\tau,\\
&\frac{d^{n-1}}{dt^{n-2}}u_k(t)=\phi_{n,k}+\nu u_k^{(n-1)}(T)+\frac{1}{P_{m_n}(ik)}\left(\int_0^t \frac{f_k(\tau)}{a_0(\tau)}d\tau+\right.\\
&\left.+\,\varepsilon\int_0^t \frac{F_k(\tau,\{u_m(\tau)\})}{a_0(\tau)}d\tau\right)-\sum_{j=1}^{n}\frac{P_{m_{n-j}}(ik)}{P_{m_n}(ik)}\int_0^t \frac{a_j(\tau)}{a_0(\tau)}u_k^{(n-j)}(\tau)d\tau-\\
&-\Gamma^{-1}(1-\alpha)\frac{P_{m_\alpha}(ik)}{P_{m_n}(ik)}\int_0^t \frac{a_j(\tau)}{a_0(\tau)}\left(\int_0^\tau \frac{\frac{d}{d\xi}u_k(\xi)}{(\tau-\xi)^\alpha}d\xi\right)d\tau.
\end{aligned} \tag{12}$$

Домноживши кожне рівняння системи (12) на $\exp(ikx)$ і підсумувавши за всіма $k, k\in\mathbb{Z}$, отримуємо

$$\begin{aligned}
&u(t,x)=\phi_1(x)+\nu u(T,x)+\int_0^t \frac{\partial}{\partial\tau}u(\tau,x)d\tau,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}u(t,x)=\phi_{n-1}(x)+\nu\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}u(t,x)|_{t=T}+\int_0^t \frac{\partial^{n-1}}{\partial\tau^{n-1}}u(\tau,x)d\tau,\\
&\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}u(t,x)=\phi_n(x)+\nu\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}u(t,x)|_{t=T}+\int_0^t \frac{1}{a_0(\tau)}\left(\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{f_k(\tau)}{P_{m_n}(ik)}\exp(ikx)\right)d\tau+\\
&+\,\varepsilon\int_0^t \frac{1}{a_0(\tau)}\left(\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{F_k(\tau,\{u_m(\tau)\})}{P_{m_n}(ik)}\exp(ikx)\right)d\tau-\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \frac{a_j(\tau)}{a_0(\tau)}\times\\
&\times\left(\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{P_{m_{n-j}}(ik)}{P_{m_n}(ik)}u_k^{(n-j)}(\tau)\exp(ikx)\right)d\tau-\\
&-\Gamma^{-1}(1-\alpha)\int_0^t \frac{a_\alpha(\tau)}{a_0(\tau)}\left\{\int_0^\tau\left(\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{P_{m_\alpha}(ik)}{P_{m_n}(ik)}\frac{d}{d\xi}u_k(\xi)\exp(ikx)\right)(\tau-\xi)^{-\alpha}d\xi\right\}d\tau.
\end{aligned} \tag{13}$$

Позначивши

$$\vec{Y}(t,x)=(y_1(t,x),\dots,y_n(t,x))=\left(u(t,x),\frac{\partial}{\partial t}u(t,x),\dots,\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}u(t,x)\right),$$

перепишемо систему (13) у вигляді

$$
\begin{aligned}
&y_1(t,x) = \phi_1(x) + \nu y_1(T,x) + \int_0^t y_2(\tau,x)d\tau,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_{n-1}(t,x) = \phi_{n-1}(x) + \nu y_{n-1}(T,x) + \int_0^t y_n(\tau,x)d\tau,\\
&y_n(t,x) = \phi_n(x) + \nu y_n(T,x) + \int_0^t \frac{1}{a_0(\tau)}\left(\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{f_k(\tau)}{P_{m_n}(ik)}\exp(ikx)\right)d\tau+\\
&+\varepsilon\int_0^t \frac{1}{a_0(\tau)}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{1}{P_{m_n}(ik)}\exp(ikx)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\tau,\xi,y_1(\tau,\xi))\exp(-ik\xi)d\xi\right)d\tau-\\
&-\sum_{j=1}^n\int_0^t\frac{a_j(\tau)}{a_0(\tau)}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{P_{m_{n-j}}(ik)}{P_{m_n}(ik)}\exp(ikx)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}y_{n-j+1}(\tau,\xi)\exp(-ik\xi)d\xi\right)d\tau- \qquad (14)\\
&-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{a_\alpha(\tau)}{a_0(\tau)}\left(\int_0^\tau\frac{1}{(\tau-\xi)^\alpha}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{P_{m_\alpha}(ik)}{P_{m_n}(ik)}\exp(ikx)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}y_2(\xi,\eta)\exp(-ik\eta)d\eta d\xi\right)d\tau.
\end{aligned}
$$

У просторі $\bar{C}^{(0,m_n)}(D)$ вектор-функцій

$$\vec{Y}(t,x) = (y_1(t,x),\dots,y_n(t,x)) \quad \left(y_j\in C^{(0,m_n)}(D),\quad j=\overline{1,n}\right)$$

з нормою

$$\|\vec{Y}(k,t)\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)} = \sum_{j=1}^n\sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}y_j(t,x)\right|$$

розглянемо лінійний оператор A, який діє за правилом

$$A\vec{Y}(t,x) = \left((A\vec{Y})_1,\dots,(A\vec{Y})_n\right) = \vec{\Phi}(x) + \nu\vec{Y}(T,x) + \int_0^t\vec{G}(\tau,x,\vec{Y}(\tau,x))d\tau,$$

де

$$
\begin{aligned}
&\vec{\Phi}(x) = (\phi_1(x),\dots,\phi_n(x)),\quad \vec{G}(\tau,x,\vec{Y}(\tau,x)) = (y_2(\tau,x),\dots,y_n(\tau,x),\\
&\frac{1}{a_0(\tau)}\Bigg(\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{f_k(\tau)}{P_{m_n}(ik)}\exp(ikx) + \varepsilon\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{\exp(ikx)}{P_{m_n}(ik)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\tau,\xi,y_1(\tau,\xi))\times\\
&\times\exp(-ik\xi)d\xi\Bigg) - \sum_{j=1}^n\frac{a_\alpha(\tau)}{a_0(\tau)}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{P_{m_{n-j}}(ik)}{P_{m_n}(ik)}\exp(ikx)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}y_{n-j+1}(\tau,\xi)\exp(-ik\xi)d\xi-\\
&-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{a_\alpha(\tau)}{a_0(\tau)}\int_0^\tau\frac{1}{(\tau-\xi)^\alpha}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{P_{m_\alpha}(ik)}{P_{m_n}(ik)}\exp(ikx)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}y_2(\xi,\eta)\exp(-ik\eta)d\eta d\xi\Bigg).
\end{aligned}
$$

З вигляду системи (14) легко бачити, що оператор A відображає простір $\bar{C}^{(0,m_n)}(D)$ в себе.

Доведемо, що при

$$\rho = 3|\varepsilon| a m_n T \left(p + \tilde{\mu} \sum_{|k|>0} \frac{1}{|k|^2} \right) (M + M_{22} + (2M_{23} + M_3)\|u^0\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)} + \\ + M_{33}\|u^0\|^2_{C^{(n-1,m_n)}(D)})$$

оператор A переводить у себе кулю

$$\bar{O}(\vec{Y}^0, \rho) = \left\{ \vec{Y}(t,x) \in \bar{C}^{(0,m_n)}(D) : \quad \|\vec{Y} - \vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)} \leqslant \rho \right\},$$
$$\vec{Y}^0 = (y_1^0(t,x), \dots, y_n^0(t,x)) = \left(u^0(t,x), \frac{\partial u^0(t,x)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{n-1} u^0(t,x)}{\partial t^{n-1}} \right),$$

$u_0 = u_0(t,x)$ – розв'язок незбуреної задачі (1), (2) (при $\varepsilon = 0$), існування якого забезпечують умови (a), (b) теореми.

Справді,

$$\|A\vec{Y}(t,x) - \vec{Y}^0(t,x)\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{m_n} \max_{(t,x)\in D} \left| \frac{\partial^s (A\vec{Y} - \vec{Y}^0)_j}{\partial x^s} \right| + \\ + \sum_{s=0}^{m_n} \max_{(t,x)\in D} \left| \frac{\partial^s (A\vec{Y} - \vec{Y}^0)_n}{\partial x^s} \right| \leqslant (|\nu| + T)\|\vec{Y} - \vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)} + \\ + |\varepsilon| \sum_{s=0}^{m_n} \max_{(t,x)\in D} \left| \int_0^t \frac{1}{a_0(\tau)} \sum_{|k|\geqslant 0} \frac{(ik)^s \exp(ikx)}{P_{m_n}(ik)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\tau,\xi,y_1(\tau,\xi)) \exp(-ik\xi) d\xi d\tau \right| + \\ + \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=0}^{m_n} \max_{(t,x)\in D} \left| \int_0^t \frac{a_j(\tau)}{a_0(\tau)} \sum_{|k|\geqslant 0} \frac{P_{m_{n-j}}(ik)}{P_{m_n}(ik)} (ik)^s \exp(ikx) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (y_{n-j+1}(\tau,\xi) - y^0_{n-j+1}(\tau,\xi)) \exp(-ik\xi) d\xi d\tau \right| + \sum_{s=0}^{m_n} \max_{(t,x)\in D} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \times \\ \times \left| \int_0^t \frac{a_\alpha(\tau)}{a_0(\tau)} \int_0^\tau \frac{1}{(\tau-\xi)^\alpha} \sum_{|k|\geqslant 0} \frac{P_{m_\alpha}(ik)}{P_{m_n}(ik)} (ik)^s \exp(ikx) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (y_2(\xi,\eta) - y_2^0(\xi,\eta)) exp(-ik\eta) d\eta d\xi d\tau \right|. \tag{15}$$

Оскільки $F \in C^{(0,2,2)}(D_1)$, то правильна рівність

$$\int_0^{2\pi} F(\tau,\xi,y_1(\tau,\xi)) \exp(-ik\xi) d\xi = \frac{1}{(ik)^2} \int_0^{2\pi} \left(F_{22}(\tau,\xi,y_1(\tau,\xi)) + \right. \\ + 2F_{23}(\tau,\xi,y_1(\tau,\xi)) \frac{\partial y_1(\tau,\xi)}{\partial \xi} + F_{33}(\tau,\xi,y_1(\tau,\xi)) \left(\frac{\partial y_1(\tau,\xi)}{\partial \xi} \right)^2 + \\ \left. + F_3(\tau,\xi,y_1(\tau,\xi)) \frac{\partial^2 y_1(\tau,\xi)}{\partial \xi^2} \right) \exp(-ik\xi) d\xi, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{16}$$

Враховуючи останню формулу, маємо

$$|\varepsilon|\sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\int_0^t \frac{1}{a_0(\tau)}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{(ik)^s\exp(ikx)}{P_{m_n}(ik)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\tau,\xi,y_1(\tau,\xi))\times\right.$$

$$\left.\times\exp(-ik\xi)d\xi d\tau\right| \leqslant |\varepsilon| m_n aT\left(p+\tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\right)(M+M_{22}+(2M_{23}+M_3)\times \tag{17}$$

$$\times(\|\vec{Y}-\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}+\|\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)})+M_{33}(\|\vec{Y}-\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}+\|\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)})^2).$$

Аналогічно одержуємо оцінки:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\int_0^t \frac{a_j(\tau)}{a_0(\tau)}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{P_{m_{n-j}}(ik)}{P_{m_n}(ik)}(ik)^s\exp(ikx)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y_{n-j+1}(\tau,\xi)-y^0_{n-j+1}(\tau,\xi))\exp(-ik\xi)d\xi d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant an(1+m_n)T\left(p+\tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\right)\|\vec{Y}-\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}; \tag{18}$$

$$\sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left|\int_0^t \frac{a_\alpha(\tau)}{a_0(\tau)}\int_0^\tau\frac{1}{(\tau-\xi)^\alpha}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{P_{m_\alpha}(ik)}{P_{m_n}(ik)}(ik)^s\exp(ikx)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y_2(\xi,\eta)-y_2^0(\xi,\eta))\exp(-ik\eta)d\eta d\xi d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant\frac{a(1+m_n)T^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(p+\tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\right)\|\vec{Y}-\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}. \tag{19}$$

З оцінок (3),(4), (15), (17) – (19) випливає

$$\|A\vec{Y}(t,x)-\vec{Y}^0(t,x)\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}\leqslant\Bigg(|\nu|+T+a(m_n+1)T\times$$

$$\times\left(p+\tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\right)\left(n+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}+|\varepsilon|(2M_{23}+M_3)\right)\Bigg)\|\vec{Y}-\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}+$$

$$+|\varepsilon| am_nT\left(p+\tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\right)(M+M_{22}+(2M_{23}+M_3)\|\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}+$$

$$+M_{33}(\|\vec{Y}-\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}+\|\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)})^2)\leqslant\|\vec{Y}-\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}\leqslant\rho.$$

Покажемо, що A є оператором стиску в $\bar{O}(\vec{Y}^0,\rho)$. Повторюючи міркування, проведені при одержанні оцінок (17) – (19), на підставі формули (16) маємо

$$\|A\vec{Y}(t,x)-A\vec{Z}(t,x)\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\frac{\partial^s(A\vec{Y}-A\vec{Z})_j}{\partial x^s}\right|\leqslant$$

$$\leqslant (|\nu| + T + a(m_n+1)T\left(p + \tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\right)(|\varepsilon|(L + L_{22} + (\rho + \|\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)})\times$$

$$\times (2M_{33} + 2L_{23} + L_3) + L_{33}(\rho + \|\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)})^2 +$$

$$+ 2M_{23} + M_3) + n + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}))\|\vec{Y} - \vec{Z}\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}.$$

Отже, при виконанні оцінки (4) A є оператором стиску в $\bar{O}(\vec{Y}^0, \rho)$ і з принципу нерухомої точки Пікара-Банаха [3] випливає існування єдиного неперервного розв'язку $\vec{Y}^*(t,x) = (y_1^*(t,x), \ldots, y_n^*(t,x))$ системи (14), перша компонента $y_1^*(t,x)$ якого є розв'язком $u(t,x)$ задачі (1), (2) внаслідок її еквівалентності системі інтегро-функціональних рівнянь (14). Належність розв'язку u до простору $C^{(n,m_n)}(D)$ випливає з того очевидного факту, що $y_n^* \in C^{(1,m_n)}(D)$ (див. систему (14)).

Оцінимо тепер норму розв'язку $u(t,x)$ задачі (1), (2) в просторі $C^{(n,m_n)}(D)$, використовуючи рівність (16) і оцінки

$$\max_{t\in[0,T]}|f_k(t)| \leqslant \frac{\beta_k}{|k|}; \quad \sum_{|k|>0}\beta_k^2 < \infty, \quad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

справедливість яких забезпечують умови теореми:

$$\|u(t,x)\|_{C^{(n,m_n)}(D)} = \sum_{0\leqslant q\leqslant n}\sum_{0\leqslant s\leqslant m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\frac{\partial^{q+s}u(t,x)}{\partial t^q\partial x^s}\right| =$$

$$= \|u(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)} + \sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\frac{\partial^{n+s}u(t,x)}{\partial t^n\partial x^s}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \rho + \|u^0(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)} + \sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\frac{\partial^{n+s}u(t,x)}{\partial t^n\partial x^s}\right| \leqslant \rho + \|u^0(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\frac{1}{a_0(t)}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{f_k(t)}{P_{m_n}(ik)}(ik)^s\exp(ikx)\right| +$$

$$+ \sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\varepsilon\frac{1}{a_0(t)}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{(ik)^s\exp(ikx)}{P_{m_n}(ik)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(t,\xi,u(t,\xi))\exp(-ik\xi)d\xi\right| +$$

$$+ \sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j(t)}{a_0(t)}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{P_{m_{n-j}}(ik)}{P_{m_n}(ik)}(ik)^s\exp(ikx)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^{n-j}u(t,\xi)}{\partial t^{n-j}}\exp(-ik\xi)d\xi\right| +$$

$$+ \sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{a_\alpha(t)}{a_0(t)}\int_0^t\frac{1}{(t-\xi)^\alpha}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{P_{m_\alpha}(ik)}{P_{m_n}(ik)}(ik)^s\exp(ikx)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\xi}\exp(-ik\eta)d\eta d\xi\right| \leqslant \rho + \|u^0(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)} +$$

$$+ a\left(\max_{(t,x)\in D}|f(t,x)|\left(p + \tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\right) +\right.$$

$$+ |\varepsilon| M\left(p + \tilde{\mu} \sum_{|k|>0} \frac{1}{|k|^2}\right) + n\|u(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)}\left(p + \tilde{\mu} \sum_{|k|>0} \frac{1}{|k|^2}\right) +$$

$$+ \frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\|u(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)}\left(p + \tilde{\mu} \sum_{|k|>0} \frac{1}{|k|^2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\tilde{\mu} m_n\left(\sum_{|k|>0} \beta_k^2 + \sum_{|k|>0} \frac{1}{|k|^2}\right) + m_n\left(p + \tilde{\mu} \sum_{|k|>0} \frac{1}{|k|^2}\right)(|\varepsilon|(M_{22} +$$

$$+ M_{33}\|u(t,x)\|^2_{C^{(n-1,m_n)}(D)} + (2M_{23} + M_3)\times$$

$$\times \|u(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)}) + \left(n + \frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)\|u(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)}\Bigg).$$

З останньої нерівності одержуємо оцінку (5), оскільки

$$\|u(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)} \leqslant \rho + \|u^0(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)}.$$

Теорему доведено.

1. Vejvoda O., Harrmann L., Lovicar V. Partial differential equations: Time-periodic solutions. – Alphen an den Rijn.-Sijthoff: Noordhoff. 1981. – 358 p.
2. Гой Т. П.,, Пташник Б. Й. *Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь*// Укр. мат. журн. – 1997. – Т.49, N 2. – С.188-195.
3. Зорич В.А. Математический анализ. Т.2. – М.:Наука, 1984. – 640с.
4. Кочубей А. Н. *Диффузия дробного порядка*// Дифференц.уравнения. – 1990. – Т. 26, N 4. – С.660-670.

Стаття надійшла до редакції 17. 02. 1998