УДК 539.3

МЕТОД ФУНКЦІЇ ГРІНА В ОДНОВИМІРНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ БАГАТОШАРОВИХ ТІЛ

Б. В. Процюк, В. М. Синюта

Protsyuk B. V., Synyuta V. M. A Green function method in one-dimensional nonstationary heat conduction problems for multilayered plates. A method is proposed for construction of Green function for onedimensional nonstationary heat conduction problems for multilayered plates. The Laplas integral transform, fundamental system of solutions of corresponding ordinary differential equations with discontinuous coefficients and generalized function are used in the method. An application of this method is illustrated by solving the nonstationary heat problem describing friction of two packages of plates under condition of convective heat exchange.

Серед методів розв'язування задач теплопровідності одне з провідних місць належить методу функції Гріна. Для багатошарових тіл функції Гріна наведені в [1-3] і ін. В [4] функції Гріна введено в розгляд при побудові інтегральних перетворень для кусково-однорідних тіл.

У даній праці з використанням інтегрального перетворення Лапласа за часом і функції Гріна звичайного диференціального рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами ілюструється спосіб побудови функції Гріна одновимірних нестаціонарних задач теплопровідності для багатошарових тіл та її застосування до розв'язування нестаціонарної теплової задачі тертя двох пакетів пластин.

Розглянемо пластину, складену з довільної кількості шарів, між якими виконуються умови ідеального теплового контакту. Шари обмежені плоско - паралельними поверхнями. Пластина нагрівається внутрішніми джерелами тепла густини $w_t(z,\tau)$ і оточуючим середовищем, теплообмін з яким через зовнішні поверхні здійснюється за законом Ньютона. Припускаємо, що теплофізичні характеристики пластини не залежать від температури. Нестаціонарне температурне поле такої пластини визначається з рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{z=z_k-0}\cdot\delta(z-z_k)=\frac{1}{a(z)}\frac{\partial t}{\partial \tau}-\frac{w_t(z,\tau)}{\lambda(z)} \tag{1}$$

при граничних умовах

$$\frac{\partial t}{\partial z}-H_1[t-t_c^-(\tau)]=0 \qquad \text{при} \quad z=0, \quad \frac{\partial t}{\partial z}+H_n[t-t_c^+(\tau)]=0 \qquad \text{при} \quad z=z_n, \tag{2}$$

і початковій умові

$$t=t_0(z) \qquad \text{при} \quad \tau=0. \tag{3}$$

Тут $\lambda(z)$ і $a(z)$ – кусково-сталі коефіцієнти теплопровідності і температуропровідності; $H_1=\dfrac{\alpha_1}{\lambda_1}, H_n=\dfrac{\alpha_n}{\lambda_n}$; α_1 і α_n – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь $z=0$ і $z=z_n$; $t_c^{\pm}(\tau)$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35K20.

– температури оточуючих середовищ; $z_j - z_{j-1}$- товщина j-ого шару ($j = 1, \ldots, n; z_0 = 0$); n – кількість шарів; $\delta(x)$– дельта-функція Дірака.

Задачу (1)-(3) розв'язуватимемо методом функції Гріна. Функцією Гріна задачі (1)-(3) назвемо функцію $G(z, \zeta, \tau)$, яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+1}} \frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{z=z_k-0} \cdot \delta(z - z_k) = \frac{1}{a(z)} \frac{\partial G}{\partial \tau} \tag{4}$$

і крайові умови

$$\frac{\partial G}{\partial z} - H_1 G = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial z} + H_n G = 0 \quad \text{при} \quad z = z_n, \tag{5}$$

$$G = \frac{1}{c(\zeta)} \delta(z - \zeta) \qquad \text{при} \quad \tau = 0 \tag{6}$$

де $c(\zeta) = \lambda(\zeta)/a(\zeta)$ – об'ємна теплоємність.

Якщо відома функція Гріна, то розв'язок задачі (1)-(3) виражається таким чином

$$\begin{gathered} t(z,\tau) = \alpha_1 \int_0^\tau G(z, 0, \tau - \tau') t_c^-(\tau')\, d\tau' \quad + \alpha_n \int_0^\tau G(z, z_n, \tau - \tau') t_c^+(\tau')\, d\tau' \quad + \\ + \int_0^{z_n} c(\zeta) G(z, \zeta, \tau) t_0(\zeta)\, d\zeta \quad + \int_0^{z_n} \int_0^\tau G(z, \zeta, \tau - \tau') w_t(\zeta, \tau')\, d\zeta d\tau'. \end{gathered} \tag{7}$$

Застосуємо до задачі (4)-(6) інтегральне перетворення Лапласа за часом. В зображеннях одержимо звичайне диференціальне рівняння з розривними коефіцієнтами

$$\begin{gathered} \frac{d^2 \bar{\mathrm{G}}}{dz^2} - \Big[\varepsilon_1^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_{k+1}^2 - \varepsilon_k^2) S(z - z_k)\Big] \bar{\mathrm{G}} + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+1}} \frac{d\bar{\mathrm{G}}}{dz}\Big|_{z=z_k-0} \cdot \delta(z - z_k) = -\frac{1}{\lambda(\zeta)} \delta(z - \zeta) \end{gathered} \tag{8}$$

і граничні умови

$$\frac{d\bar{\mathrm{G}}}{dz} - H_1 \bar{\mathrm{G}} = 0 \qquad \text{при} \quad z = 0, \quad \frac{d\bar{\mathrm{G}}}{dz} + H_n \bar{\mathrm{G}} = 0 \qquad \text{при} \quad z = z_n, \tag{9}$$

де $\varepsilon_j = \sqrt{\dfrac{s}{a_j}}$, s – параметр перетворення Лапласа, $S(x)$ – функція Хевісайда.

Оскільки (8) еквівалентне рівнянню

$$\frac{d^2 \bar{\mathrm{G}}}{dz^2} - \Big[\varepsilon_1^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_{k+1}^2 - \varepsilon_k^2) S(z - z_k)\Big] \bar{\mathrm{G}} = -\frac{1}{\lambda(\zeta)} \delta(z - \zeta), \tag{10}$$

де

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathrm{G}} = \bar{\mathrm{G}}_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\bar{\mathrm{G}}_{k+1} - \bar{\mathrm{G}}_k) S(z - z_k), \\ \dfrac{d^2 \bar{\mathrm{G}}}{d\, z^2} = \dfrac{d^2 \bar{\mathrm{G}}_1}{dz^2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\dfrac{d^2 \bar{\mathrm{G}}_{k+1}}{dz^2} - \dfrac{d^2 \bar{\mathrm{G}}_k}{dz^2}) S(z - z_k), \end{array} \right.$$

і умовам контакту

$$\bar{\mathrm{G}}\Big|_{z_j+0} = \bar{\mathrm{G}}\Big|_{z=z_j-0}, \quad \lambda_j \frac{d\bar{\mathrm{G}}}{dz}\Big|_{z=z_j+0} = \lambda_{j-1} \frac{d\bar{\mathrm{G}}}{dz}\Big|_{z=z_j-0}, \quad (j = 2, ..., n). \tag{11}$$

то розв'язок задачі (8),(9) згідно з [5] подамо у вигляді

$$\bar{G}(z,\zeta,s) = -\frac{1}{\lambda_1} s \frac{\varphi(s)}{s\psi(s)}; \tag{12}$$

тут

$$\varphi(s) = [F_n^{(2)}(s,z) + H_n F_n^{(1)}(s,z)]\Phi(s,\zeta)S(z-\zeta) + [F_n^{(2)}(s,\zeta) + H_n F_n^{(1)}(s,\zeta)]\Phi(s,z)S(\zeta - z),$$
$$\psi(s) = \Phi'(s,z_n) + H_n\Phi(s,z_n), \quad F_n^{(1)}(s,z) = Z_1(s,z_n)\widetilde{Z}_2(s,z) - \widetilde{Z}_2(s,z_n)Z_1(s,z),$$
$$F_n^{(2)}(s,z) = Z_1'(s,z_n)\widetilde{Z}_2(s,z) - \widetilde{Z}_2'(s,z_n)Z_1(s,z), \; \Phi(s,z) = Z_1(s,z) + H_1\widetilde{Z}_2(s,z),$$
$$\widetilde{Z}_2(s,z) = \frac{1}{\varepsilon_1}Z_2(s,z),$$

а фундаментальна система розв'язків $Z_1(s,z)$ і $Z_2(s,z)$ рівняння (8) визначається такими співвідношеннями

$$\begin{gathered} Z_i(s,z) = Z_{1i}(s,z) + \sum_{k=1}^{n-1}[Z_{k+1,i}(s,z) - Z_{ki}(s,z)]S(z-z_k) \quad (i=1,2), \\ Z_{11}(s,z) = \operatorname{ch}\varepsilon_1 z, \quad Z_{12}(s,z) = \operatorname{sh}\varepsilon_1 z, Z_{ji}(s,z) = \\ = Z_{j-1,i}(s,z_{j-1})\operatorname{ch}\varepsilon_j(z-z_{j-1}) + \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j\varepsilon_j}Z'_{j-1,i}(s,z_{j-1})\operatorname{sh}\varepsilon_j(z-z_{j-1}). \end{gathered} \tag{13}$$

Штрих означає похідну за z.

Розклавши гіперболічні функції в ряди, легко переконатися, що дріб $\frac{\varphi(s)}{s\psi(s)}$ є відношенням двох узагальнених поліномів, причому знаменник не містить вільного члена. Тому оригінал цього дробу можна знайти за допомогою теореми розкладу [6].

Використовуючи далі теорему про згортку, одержимо

$$G(z,\zeta,\tau) = \frac{2}{\lambda_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi(-\mu_m^2)}{\left.\frac{d\psi(-\mu^2)}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_m}}e^{-\mu_m^2\tau}, \tag{14}$$

де μ_m – корені трансцендентного рівняння

$$\frac{H_1\sqrt{a_1}}{\mu} = -\frac{Z_1'(-\mu^2,z_n) + H_n Z_1(-\mu^2,z_n)}{Z_2'(-\mu^2,z_n) + H_n Z_2(-\mu^2,z_n)}. \tag{15}$$

У вираз для $\Phi(-\mu^2,z)$ замість $\frac{H_1\sqrt{a_1}}{\mu}$ підставимо праву частину (15). Отримаємо

$$\Phi(-\mu^2,z) = -\frac{F_n^{(2)}(-\mu^2,z) + H_n F_n^{(1)}(-\mu^2,z)}{Z_2'(-\mu^2,z_n) + H_n Z_2(-\mu^2,z_n)}. \tag{16}$$

Враховуючи (16) і те, що $S(z-\zeta) + S(\zeta - z) = 1$, із (14) матимемо

$$G(z,\zeta,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m\Phi_m(z)\Phi_m(\zeta)e^{-\mu_m^2\tau}, \tag{17}$$

де

$$b_m = -\frac{2\sqrt{a_1}}{\lambda_1}\frac{Z_2'(-\mu^2,z_n)+H_nZ_2(-\mu^2,z_n)}{\dfrac{d\psi(-\mu^2)}{d\mu}}\Big|_{\mu=\mu_m}, \tag{18}$$

$$\Phi_m(z)\equiv\Phi(-\mu_m^2,z)=\Phi_m^{(1)}(z)+\sum_{k=1}^{n-1}[\Phi_m^{(k+1)}(z)-\Phi_m^{(k)}(z)]S(z-z_k),$$
$$\Phi_m^{(1)}(z)=\cos\frac{\mu_m z}{\sqrt{a_1}}+\frac{H_1\sqrt{a_1}}{\mu_m}\sin\frac{\mu_m z}{\sqrt{a_1}},\quad \Phi_m^{(j)}(z)=\Phi_m^{(j-1)}(z_{j-1})\times \tag{19}$$
$$\times\cos\frac{\mu_m(z-z_{j-1})}{\sqrt{a_j}}+\frac{\lambda_{j-1}\sqrt{a_j}}{\lambda_j\mu_m}\frac{d\Phi_m^{(j-1)}(z_{j-1})}{dz}\sin\frac{\mu_m(z-z_{j-1})}{\sqrt{a_j}}.$$

З використанням введених позначень рівняння (15) запишемо у вигляді

$$\frac{d\Phi(z_n)}{dz}+H_n\Phi(z_n)=0. \tag{20}$$

Для обчислення коефіцієнтів b_m одержимо іншу, більш просту формулу. Покажемо спочатку, що система функцій $\Phi_m(z)(m=1,2,3,\ldots)$ є ортогональною з вагою $c(z)$ на проміжку $[0;z_n]$. Нехай μ_m і μ_ν два різні корені рівняння (20), а $\Phi_m(z)$ і $\Phi_\nu(z)$ відповідні їм функції, які задовольняють рівняння

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2}+\mu^2\Big[\frac{1}{a_1}+\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\Big)S(z-z_k)\Big]\Phi=0, \tag{21}$$

умови контакту

$$\Phi\Big|_{z_j+0}=\Phi\Big|_{z=z_j-0},\quad \lambda_j\frac{d\Phi}{dz}\Big|_{z=z_j+0}=\lambda_{j-1}\frac{d\Phi}{dz}\Big|_{z=z_j-0} \tag{22}$$

і граничні умови

$$\frac{d\Phi}{dz}-H_1\Phi=0\quad\text{при}\quad z=0,\quad \frac{d\Phi}{dz}+H_n\Phi=0\quad\text{при}\quad z=z_n \tag{23}$$

Домножимо на $\lambda(z)\Phi_\nu(z)$ рівняння, якому задовольняє $\Phi_m(z)$, а на $\lambda(z)\Phi_m(z)$ рівняння, якому задовольняє $\Phi_\nu(z)$. Їх різницю подамо в такому вигляді

$$\begin{gathered}\lambda_1\Big(\Phi_\nu^{(1)}\frac{d^2\Phi_m^{(1)}}{dz^2}-\Phi_m^{(1)}\frac{d^2\Phi_\nu^{(1)}}{dz^2}\Big)+(\mu_m^2-\mu_\nu^2)c_1\Phi_\nu^{(1)}\Phi_m^{(1)}+\\+\sum_{k=1}^{n-1}\Big[\lambda_{k+1}\Big(\Phi_\nu^{(k+1)}\frac{d^2\Phi_m^{(k+1)}}{dz^2}-\Phi_m^{(k+1)}\frac{d^2\Phi_\nu^{(k+1)}}{dz^2}\Big)-\\-\lambda_k\Big(\Phi_\nu^{(k)}\frac{d^2\Phi_m^{(k)}}{dz^2}-\Phi_m^{(k)}\frac{d^2\Phi_\nu^{(k)}}{dz^2}\Big)+\\+(\mu_m^2-\mu_\nu^2)(c_{k+1}\Phi_\nu^{(k+1)}\Phi_m^{(k+1)}-c_k\Phi_\nu^{(k)}\Phi_m^{(k)})\Big]S(z-\dot{z}_k)=0.\end{gathered} \tag{24}$$

Інтегруємо (24) в межах від 0 до z_n. Після нескладних перетворень отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\int_{z_{j-1}}^{z_j}\Big(\Phi_\nu^{(j)}\frac{d^2\Phi_m^{(j)}}{dz^2}-\Phi_m^{(j)}\frac{d^2\Phi_\nu^{(j)}}{dz^2}\Big)dz+(\mu_m^2-\mu_\nu^2)\sum_{j=1}^{n}c_j\int_{z_{j-1}}^{z_j}\Phi_\nu^{(j)}\Phi_m^{(j)}\,dz=0. \tag{25}$$

Використавши умови контакту (22) та граничні умови (23), одержимо

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \int_{z_{j-1}}^{z_j} \Phi_\nu^{(j)} \Phi_m^{(j)} \, dz = 0,$$

звідки

$$\int_0^{z_n} c(z) \Phi_\nu(z) \Phi_m(z) \, dz = 0, \tag{26}$$

тобто справджується ортогональність системи функцій, що розглядається.

Далі, розв'язок (17) повинен задовольняти початкову умову (6). Це означає, що повинна виконуватися рівність

$$\frac{1}{c(\zeta)} \delta(z-\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \Phi_\nu(z) \Phi_\nu(\zeta). \tag{27}$$

Домножимо ліву та праву частини цієї рівності на $c(z)\Phi_m(z)$ і зінтегруємо в межах від 0 до z_n. З урахуванням ортогональності, інтегрування дає

$$\Phi_m(\zeta) = b_m \int_0^{z_n} c(z) (\Phi_m(z))^2 \Phi_m(\zeta) \, dz,$$

звідки знаходимо

$$b_m = \frac{1}{\int_0^{z_n} c(z)(\Phi_m(z))^2 \, dz}. \tag{28}$$

Обчислимо інтеграл в цій формулі. Після множення на $\dfrac{\lambda(z)}{\mu_m}\Phi_m(z)$ рівняння, якому задовільняє $\Phi_m(z)$, та інтегрування в межах від 0 до z_n, одержимо

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \int_{z_{j-1}}^{z_j} (\Phi_m^{(j)}(z))^2 \, dz + \frac{1}{\mu_m^2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \int_{z_{j-1}}^{z_j} \Phi_m^{(j)}(z) \frac{d^2 \Phi_m^{(j)}(z)}{dz^2} \, dz = 0. \tag{29}$$

Інтегруючи частинами під другою сумою з урахуванням умов контакту (22) і граничних умов (23), матимемо

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} c_j \int_{z_{j-1}}^{z_j} (\Phi_m^{(j)}(z))^2 \, dz - \frac{1}{\mu_m^2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \int_{z_{j-1}}^{z_j} \Big(\frac{d\Phi_m^{(j)}(z)}{dz} \Big)^2 dz - \\ - \frac{1}{\mu_m^2} [H_n \lambda_n (\Phi_m^{(n)}(z_n))^2 + H_1 \lambda_1 (\Phi_m^{(1)}(0))^2] = 0. \end{gathered} \tag{30}$$

З іншого боку, на підставі рекурентних співвідношень (19), отримуємо

$$\begin{gathered} (\Phi_m^{(1)}(z))^2 + \frac{a_1}{\mu_m^2} \Big(\frac{d\Phi_m^{(1)}(z)}{dz} \Big)^2 = 1 + \frac{a_1 H_1^2}{\mu_m^2}, \quad (\Phi_m^{(j)}(z))^2 + \\ + \frac{a_j}{\mu_m^2} \Big(\frac{d\Phi_m^{(j)}(z)}{dz} \Big)^2 = (\Phi_m^{(j-1)}(z_{j-1}))^2 + \frac{a_j}{\mu_m^2} \Big(\frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} \frac{d\Phi_m^{(j-1)}(z_{j-1})}{dz} \Big)^2; \end{gathered} \tag{31}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \int_{z_{j-1}}^{z_j} \left[\left(\Phi_m^{(j)}(z) \right)^2 + \frac{a_j}{\mu_m^2} \left(\frac{d\Phi_m^{(j)}(z)}{dz} \right)^2 \right] dz = c_1 \left(1 + \frac{a_1 H_1^2}{\mu_m^2} \right) z_1 +$$
$$+ \sum_{j=2}^{n} c_j \left[\left(\Phi_m^{(j-1)}(z_{j-1}) \right)^2 + \left(\frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} \frac{d\Phi_m^{(j-1)}(z_{j-1})}{dz} \right)^2 \frac{a_j}{\mu_m^2} \right] (z_j - z_{j-1}). \quad (32)$$

З (31) і граничних умов (23) знайдемо

$$(\Phi_m^{(1)}(0))^2 = 1, \quad (\Phi_m^{(n)}(z_n))^2 = \frac{(\Phi_m^{(n-1)}(z_{n-1}))^2 + \dfrac{a_n}{\mu_m^2} \left(\dfrac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \dfrac{d\Phi_m^{(n-1)}(z_{n-1})}{dz} \right)^2}{1 + \dfrac{a_n H_n^2}{\mu_m^2}}. \quad (33)$$

Додавши (30) і (32) та врахувавши (33) одержимо

$$\int_0^{z_n} c(z) (\Phi_m(z))^2 \, dz = \frac{c_1 N_m}{2}, \quad (34)$$

де

$$N_m = \frac{1}{\mu_m^2} \Bigg\{ (\mu_m^2 + a_1 H_1^2) z_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{c_j}{c_1} \Bigg[\mu_m^2 (\Phi_m^{(j-1)}(z_{j-1}))^2 +$$
$$+ a_j \left(\frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} \frac{d\Phi_m^{(j-1)}(z_{j-1})}{dz} \right)^2 \Bigg] (z_j - z_{j-1}) + \frac{\lambda_1 H_1}{c_1} + \quad (35)$$
$$+ \frac{\lambda_n H_n}{c_1} \cdot \frac{\mu_m^2 (\Phi_m^{(n-1)}(z_{n-1}))^2 + a_n \left(\dfrac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \dfrac{d\Phi_m^{(n-1)}(z_{n-1})}{dz} \right)^2}{\mu_m^2 + a_n H_n^2} \Bigg\}.$$

Таким чином,

$$b_m = \frac{2}{c_1 N_m}. \quad (36)$$

Обчислення коефіцієнтів b_m за цією формулою спрощується, оскільки, на відміну від формули (18), непотрібно обчислювати значення похідних відповідних функцій за змінної μ. Отже, функції Гріна (17) можна надати такого вигляду

$$G(z, \zeta, \tau) = \frac{2}{c_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_m(z) \Phi_m(\zeta)}{N_m} e^{-\mu_m^2 \tau}. \quad (37)$$

Як приклад, розглянемо одновимірну нестаціонарну теплову задачу тертя багатошарових пластин. Для системи з двох плоско-паралельних шарів з урахуванням термоопору така задача розглядалася в [7]. Нехай маємо систему, що складається з двох пакетів пластин. Між пластинами в кожному з пакетів і між пакетами реалізується ідеальний термомеханічний контакт. Перший пакет пластин з n_1 шарів нижньою своєю поверхнею притискується до закріпленого пакету з n_2 шарів ($n_1 + n_2 = n$). Перший пакет рухається по верхній поверхні другого пакету пластин із сталою швидкістю V_0. Припускаємо, що нормальні контактні напруження між пакетами є величиною сталою і рівною P_0. За рахунок дії сили тертя, що підпорядкована закону Амонтона, на площині контакту пакетів шарів $z = z_i$ відбувається теплоутворення.

При нульовій початковій температурі, сталих температурах середовищ t_c^- і t_c^+ та $w_t = k_T V_0 P_0 \delta(z - z_i)$, де k_T – коефіцієнт тертя, з формул (7) і (37) отримаємо

$$t(z,\tau) = 2H_1 t_c^- a_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_m(z)}{N_m} \cdot \frac{1 - e^{-\mu_m^2 \tau}}{\mu_m^2} + \frac{2H_n \lambda_n a_1 t_c^+}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_m(z)\Phi_m(z_n)}{N_m} \cdot \frac{1 - e^{-\mu_m^2 \tau}}{\mu_m^2} +$$
$$+ k_T V_0 P_0 \frac{2a_1}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_m(z)\Phi_m(z_i)}{N_m} \cdot \frac{1 - e^{-\mu_m^2 \tau}}{\mu_m^2}. \tag{38}$$

Обчислимо суми рядів

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_m(z)}{\mu_m^2 N_m}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_m(z)\Phi_m(z_n)}{\mu_m^2 N_m}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_m(z)\Phi_m(z_i)}{\mu_m^2 N_m}, \tag{39}$$

які входять в це співвідношення. Для цього скористаємось рівністю

$$\frac{2}{c_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_m(z)\Phi_m(\zeta)}{N_m} = \frac{1}{c(z)} \delta(z - \zeta), \tag{40}$$

яка випливає з (27), якщо врахувати (36). Після домноження (40) на c(z) і інтегрування в межах від 0 до z та граничного переходу $\zeta \to 0$, одержимо

$$\frac{2}{c_1} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^z c(z)\Phi_m(z)\,dz = 1. \tag{41}$$

Оскільки

$$\int_\gamma^z c(z)\Phi_m(z)\,dz = -\frac{\lambda(z)}{\mu^2} \Phi'_m(z)\Big|_\gamma^z, \tag{42}$$

де γ=const, то рівність (41) після домноження обох іі частин на $\dfrac{\lambda_1}{\lambda(z)}$ набуде вигляду

$$-2a_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi'_m(z)}{\mu_m^2 N_m} + H_1 2a_1 \frac{\lambda_1}{\lambda(z)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m^2 N_m} = \frac{\lambda_1}{\lambda(z)}. \tag{43}$$

Інтегрування (43) в межах від 0 до z дає

$$-2a_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_m(z)}{\mu_m^2 N_m} + 2a_1[1 + H_1 f(z)] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m^2 N_m} = f(z), \tag{44}$$

де

$$f(z) = z + \sum_{k=1}^{n-1} \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}} - \frac{\lambda_1}{\lambda_k}\Big)(z - z_k) S(z - z_k).$$

Додамо при $z = z_n$ рівності (43) і (44), попередньо помноживши останню на H_n, і врахуємо трансцендентне рівняння (20). З отриманого виразу знайдемо

$$2a_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m^2 N_m} = \frac{1}{\beta} \Big[\frac{\lambda_1}{\lambda_n} + H_n f(z_n)\Big], \tag{45}$$

де $\beta = H_1\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n} + H_n[1 + H_1 f(z_n)]$. Підставимо далі (45) в (44). Після спрощень одержимо

$$2a_1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m(z)}{\mu_m^2 N_m} = \frac{1}{\beta}\Big[\frac{\lambda_1}{\lambda_n} + H_n(f(z_n) - f(z))\Big]. \tag{46}$$

Для обчислення другої суми (39), домножимо (40) на c(z) і зінтегруємо в межах від z до z_n та здійснимо граничний перехід $\zeta \to z_n$. З урахуванням (42) і трансцендентного рівняння (20), отримаємо

$$\frac{2\lambda_n H_n}{c_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m^2(z_n)}{\mu_m^2 N_m} + \frac{2\lambda(z)}{c_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m(z_n)\Phi_m'(z)}{\mu_m^2 N_m} = 1. \tag{47}$$

Домножимо обидві частини рівності (47) на $\dfrac{\lambda_1}{\lambda(z)}$ і зінтегруємо в межах від z до z_n; тоді

$$\begin{gathered}2a_1 H_n\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m^2(z_n)}{\mu_m^2 N_m}\frac{\lambda_n}{\lambda_1}[f(z_n) - f(z)] +\\ +2a_1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m(z_n)}{\mu_m^2 N_m}[\Phi_m(z_n) - \Phi_m(z)] = (f(z) - f(z_n)).\end{gathered} \tag{48}$$

Використовуючи значення суми (46) при $z = z_n$, з рівності (48), при z=0 знайдемо

$$2a_1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m^2(z_n)}{\mu_m^2 N_m} = \frac{\lambda_1}{\beta\lambda_n}(1 + H_1 f(z_n))]. \tag{49}$$

Підставимо (49) в (48). Після спрощень одержимо

$$2a_1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m(z)\Phi_m(z_n)}{\mu_m^2 N_m} = \frac{\lambda_1}{\beta\lambda_n}(1 + H_1 f(z))]. \tag{50}$$

Обчислення третьої суми проводимо в тій послідовності, що й обчислення другої суми, поклавши в (40) $z = z_i$. В результаті отримаємо

$$\begin{gathered}2a_1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m(z)\Phi_m(z_i)}{\mu_m^2 N_m} = \frac{1}{\beta}\Big\{\frac{\lambda_1}{\lambda_n} + H_n(f(z_n) - f(z_i))\Big\}\times\\ \times[H_1 f(z) + 1] - [f(z) - f(z_i)]S(z - z_i).\end{gathered} \tag{51}$$

Після підстановки (46), (50), (51) в (38), температурне поле матиме вигляд

$$\begin{gathered}t(z,\tau) = \frac{1}{\beta}\Big\{H_1 t_c^-\Big[\frac{\lambda_1}{\lambda_n} + H_n(f(z_n) - f(z))\Big] + H_n t_c^+[1 + H_1 f(z)]\Big\} -\\ -2a_1 H_1 t_c^-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m(z)e^{-\mu_m^2\tau}}{\mu_m^2 N_m} - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}2a_1 H_n t_c^+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m(z)\Phi_m(z_n)e^{-\mu_m^2\tau}}{\mu_m^2 N_m} +\\ +\frac{k_T V_0 P_0}{\lambda_1}\Big(\frac{1}{\beta}\Big\{\frac{\lambda_1}{\lambda_n} + H_n[f(z_n) - f(z_i)]\Big\}[1 + H_1 f(z)] -\\ -[f(z) - f(z_i)]S(z - z_i) - 2a_1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m(z)\Phi_m(z_i)}{\mu_m^2 N_m}e^{-\mu_m^2\tau}\Big).\end{gathered} \tag{52}$$

Легко переконатись, що при $\tau \to \infty$ з (52) одержимо розв'язок відповідної стаціонарної теплової задачі тертя двох пакетів пластин.

1. Власов В.В. Применение функций Грина к решению инженерных задач теплофизики. – М.: Изд. Московского ин-та хим. маш., 1972.
2. Березовский А.А., Шувар Р.А. Нелинейные одномерные стационарные задачи теплопроводности в кусочно-однородных средах. Начально-краевые задачи теплопроводности.– К., 1987. – 59 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; N 87.43).
3. Коляно Ю.М., Процюк Б.В., Синюта В.М., Шебанов С.М., Шаров С.М. *Нестационарное температурное поле в многослойном ортотропном цилиндре*// Инж. физ. журн. – 1992. – Т.62, N 2. – С. 325–330.
4. Ленюк М.П. *Интегральные преобразования для кусочно- однородных сред* // Механика неоднородных структур: Тезисы докладов II Всесоюзной конференции. – Львов, 1987. – Т.2. – С. 178 – 179.
5. Процюк Б.В. *Фундаментальна система розв'язків звичайних диференціальних рівнянь з кусково-неперервними коефіцієнтами і її використання при розв'язуванні задач термопружності. Крайові задачі термомеханіки*// Зб. наук. пр.: Київ. Ін-т математики НАН України. – 1996. – Ч.2. – С. 89 – 94.
6. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш.шк., 1967. – 599 с.
7. Гриліцький Д.В. Термопружні контактні задачі в трибології: Навч. посібник – К.:ІЗМН, 1996. – 204 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.01.1998