УДК 517.95

ПРО ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ РІВНЯНЬ, ЩО УЗАГАЛЬНЮЮТЬ РІВНЯННЯ ПОЛІТРОПНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

М. М. Бокало, В. М. Сікорський

Bokalo M. M., Sikorsky V. M. About properties of solutions of the problem without initial conditions for the equations of the politropic filtration type. Existance and uniqueness of generalized solutions of the problem without initial conditions for the equations of the politropic filtration type are obtained. The assumptions of existence and uniqueness theorems do not contain conditions on the behaviour of solutions and right side of equation whenever $t \to -\infty$. Continuos dependence of generalized solutions on the data-in is showed. Moreover, some properties of the solutions (boundedness, periodicity, almost periodicity) are obtained.

Вступ. Математичні моделі для рівнянь, які описують нестаціонарні процеси фільтрації в пористих середовищах, вивчались у багатьох працях (див. [1] і бібліографію там). У праці [2] розглянуто мішану задачу для рівняння, що узагальнює рівняння політропної фільтрації. Такі рівняння описують процес фільтрації неоднорідної рідини в неоднорідному середовищі. У даній праці для таких рівнянь досліджено задачу без початкових умов (задачу Фур'є). Встановлено коректність цієї задачі без припущень про поведінку розв'язку і зростання правої частини рівняння при $t \to -\infty$, а також деякі властивості розв'язків цієї задачі (обмеженість, періодичність та майже періодичність). Отримані тут результати близькі до результатів праць [3,4] (див., також, бібліографію там).

1. Формулювання задачі й основних результатів.

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega$ класу C^2, $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$; $-\infty < T \leqslant +\infty$; $Q = \Omega \times (-\infty, T)$; $\Sigma = \partial\Omega \times (-\infty, T]$; $S = (-\infty, T]$.

Розглянемо задачу без початкових умов

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_i} \quad \text{в} \quad Q, \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35K60.

Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP) Міжнародного фонду "Відродження", грант N APU 061007

Припустимо, що $p(x)$ – вимірна на Ω функція, яка справджує одну з двох наступних умов: 1) $p(x)$ неперервна на $\overline{\Omega}$ та $\min\limits_{\overline{\Omega}} p(x) > 2$; 2) існують числа p_i, r_i і відкриті множини $G_i \subset \Omega, i = 1, 2, ..., m$, які містять скінченну кількість компонент з ліпшицевою межею і такі, що міра Лебега множини $\Omega \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{m} G_i$ дорівнює нулю, $2 < p_1 < p_2 < r_1 < p_3 < r_2 < p_4 < r_3 < ... < p_{m-1} < r_{m-2} < p_m < r_{m-1} < r_m < +\infty$, $r_i < np_i/(n-p_i)$, $i = 1, 2, ..., m-1$, $p_i \leqslant p(x) \leqslant r_i$ для всіх $x \in G_i, i = 1, 2, ..., m$.

Позначимо $r = \operatorname{ess}\inf\limits_{\Omega}\ p(x), \quad s = \operatorname{ess}\sup\limits_{\Omega}\ p(x)$.

Введемо потрібні нам функціональні простори ([2,3]). Через $\|f; X\|$ позначатимемо норму елемента f нормованого простору X. Під $L^{p(x)}(\Omega)$ розумітимемо узагальнений простір Лебега, який складається з вимірних функцій $f(x), \quad x \in \Omega$, для яких $\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p(x)}\, dx < \infty$, і норма на ньому задається за правилом:

$$||f; L^{p(x)}(\Omega)|| = \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_{\Omega} |f(x)/\lambda|^{p(x)}\, dx \leqslant 1\right\}.$$

Такий простір є банаховим. Відмітимо, що при наших умовах на $p(x)$ маємо:
1) $\int\limits_{\Omega} |f(x)/\|f; L^{p(x)}(\Omega)\||^{p(x)}\, dx = 1$, якщо $0 < \|f; L^{p(x)}(\Omega)\| < +\infty$;
2) $\|f; L^2(\Omega)\| \leqslant C_0 \|f; L^{p(x)}(\Omega)\|$, де $C_0 > 0$ – стала, яка не залежить від f.

Позначимо $q(x) = p(x)/(p(x) - 1)$ для $x \in \Omega$. Тоді правильна нерівність Гельдера

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)g(x)|\, dx \leqslant (1 + 1/r - 1/s) \cdot ||f; L^{p(x)}|| \cdot ||g; L^{q(x)}||$$

для довільних $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ і $g \in L^{q(x)}(\Omega)$. Звідси випливає, що простір $\left(L^{p(x)}(\Omega)\right)'$ можна ототожнити з $L^{q(x)}(\Omega)$.

Через $W^{k,p(x)}(\Omega)\, (k \in \mathbb{N})$ позначимо простір функцій $f(x)$, $x \in \Omega$, таких, що $D^\alpha f \in L^{p(x)}(\Omega)$ для всіх $\alpha, |\alpha| \leqslant k$, з нормою $||f; W^{k,p(x)}(\Omega)|| = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} ||D^\alpha f; L^{p(x)}(\Omega)|| < \infty$, де $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ – мультиіндекс, $|\alpha| = |\alpha_1| + ... + |\alpha_n|$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$. Під $\overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega)$ розумітимемо замикання простору нескінченно диференційовних фінітних функцій $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою простору $W^{k,p(x)}(\Omega)$. Простори $W^{k,p(x)}(\Omega)$ і $\overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega)$ є банаховими, сепарабельними та рефлексивними просторами. Крім того, вкладення $\overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ є компактним і $||f; \overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega)|| = \sum\limits_{|\alpha| = k} ||D^\alpha f; L^{p(x)}(\Omega)||$ є нормою на $\overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega)$, яка еквівалентна введеній вище нормі. Відомо, що для кожного $g \in (\overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega))'$ існує єдина система функцій $g_\alpha \in L^{q(x)}(\Omega), |\alpha| \leqslant k$, така, що $g = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} D^\alpha g_\alpha$.

Через $L^r_{\mathrm{loc}}(S; \overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega))$ позначимо простір функцій $v(x,t)$, $(x,t) \in Q$, таких, що для майже всіх $t \in S$ $v(\cdot, t) \in \overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega)$ і $||v(\cdot,t); \overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega)|| \in L^r(a,b)$ для будь-яких скінченних $a, b \in S$, $a < b$.

Нехай $Q_{a,b} = \Omega \times (a,b)$, $a < b$. Під $\overset{o}{V}^k(Q_{a,b})$ розуміється простір, який складається з вимірних функцій $w : [a,b] \to \overset{o}{W}^{k,p(x)}(\Omega)$ зі скінченною нормою $\|w; \overset{o}{V}^k(Q_{a,b})\| = \sum\limits_{|\alpha|=k} \inf\{\lambda_\alpha > 0 : \iint\limits_{Q_{a,b}} |D^\alpha w/\lambda_\alpha|^{p(x)}\, dxdt \leqslant 1\}$. Через $\overset{o}{V}{}^k_{\rm loc}(\overline{Q})$ позначимо простір вимірних функцій $w : S \to \overset{o}{W}^{k,p(x)}(\Omega)$, звуження яких на довільний скінченний відрізок $[a,b] \subset S$ належить простору $\overset{o}{V}^k(Q_{a,b})$.

Розглянемо також простір $L^{q(x)}_{\rm loc}(\overline{Q})$, який складається з вимірних функцій $w(x,t)$, $(x,t) \in Q$, таких, що для будь яких чисел $a, b \in S, a < b$, звуження на $Q_{a,b}$ цих функцій належать $L^{q(x)}(Q_{a,b}) = \{f : ||f; L^{q(x)}(Q_{a,b})|| = \inf\{\lambda > 0 : \iint\limits_{Q_{a,b}} |f/\lambda|^{q(x)}\, dxdt \leqslant 1\} < \infty\}$.

Скажемо, що $f_l \to f$ в $L^{q(x)}_{\rm loc}(\overline{Q})$ $(\overset{o}{V}{}^k_{\rm loc}(\overline{Q}))$ при $l \to \infty$, якщо $||f_l - f; L^{q(x)}(Q_{a,b})|| \to 0$ $(||f_l - f; \overset{o}{V}^k(Q_{a,b})|| \to 0)$ при $l \to \infty$ для будь-яких скінченних $a, b \in S, a < b$.

Через $C(S; L^2(\Omega))$ позначимо простір функцій, які визначені на S, приймають значення в $L^2(\Omega)$ і є неперервними на S за нормою $L^2(\Omega)$. Скажемо, що $v_l \to v$ в $C(S; L^2(\Omega))$, якщо для будь-яких $t_1, t_2 \in S$, $t_1 < t_2$, $\max\limits_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} ||v_l(t) - v(t); L^2(\Omega)|| \to 0$ при $l \to \infty$.

Під $C_b(S; L^2(\Omega))$ розумітимемо підпростір простору $C(S; L^2(\Omega))$, який складається з функцій, які обмежені на S за нормою $L^2(\Omega)$.

Означення 1. Нехай $f_i \in L^{q(x)}_{\rm loc}(\overline{Q}) \cap L^{r/(r-1)}(S; L^{q(x)}(\Omega)), i = 1, ..., n$. Узагальненим розв'язком задачі (1),(2) назвемо функцію u з простору $L^r_{\rm loc}(S; \overset{o}{W}^{1,p(x)}(\Omega)) \cap \overset{o}{V}{}^1_{\rm loc}(\overline{Q}) \cap C(S; L^2(\Omega))$, яка справджує інтегральну тотожність

$$\iint\limits_{Q} \left\{ -u\psi_t + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\} dxdt = \iint\limits_{Q} \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dxdt \tag{3}$$

для будь-яких $\psi \in C_0^\infty(Q)$.

Розглянемо питання про коректність задачі (1), (2), тобто про *існування, єдиність та неперервну залежність від правої частини рівняння узагальненого розв'язку.*

Під неперервною залежністю узагальненого розв'язку задачі (1), (2) від правої частини рівняння розумітимемо наступне: для будь-яких послідовностей $\{f_{i,l}\}_{l=1}^{\infty} \subset L^{q(x)}_{\rm loc}(\overline{Q})$, $i = 1, ..., n$, таких, що $f_{i,l} \to f_i$ в $L^{q(x)}_{\rm loc}(\overline{Q})$ при $l \to +\infty, i = 1, ..., n$, відповідна послідовність $\{u_l\}$ збігається до u в $L^r_{\rm loc}(S; \overset{o}{W}^{1,p(x)}(\Omega)) \bigcap \overset{o}{V}{}^1_{\rm loc}(\overline{Q}) \bigcap C(S; L^2(\Omega))$. Тут для кожного $l \in \mathbb{N}$ u_l – узагальнений розв'язок задачі, яка відрізняється від задачі (1), (2) тільки тим, що в правій частині рівняння (1) стоїть $f_{i,l}$ замість $f_i, i = 1, ..., n$.

Теорема. *Задача (1), (2) має єдиний узагальнений розв'язок і цей розв'язок неперервно залежить від правої частини рівняння. Крім того, для довільних чисел $\delta > 0, t_1, t_2 \in S, t_1 < t_2$, правильна оцінка*

$$\max_{[t_1,t_2]} \int\limits_{\Omega} |u(x,t)|^2\, dx + \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p(x)} dxdt \leqslant C_1 \delta^{-\frac{2}{r-2}} + C_2 \delta^{-\frac{2}{s-2}} +$$

$$+C_3 \max\left\{\sum_{i=1}^{n}||f_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,t_2})||; \left(\sum_{i=1}^{n}||f_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,t_2})||\right)^{\frac{r}{r-1}}\right\}, \qquad (4)$$

де C_1, C_2, C_3 – додатні сталі, які залежать тільки від n, r, s і Ω.

Властивості узагальненого розв'язку u задачі (1), (2) сформулюємо у вигляді наслідків 1-5.

Наслідок 1. *Нехай $||f_i; L^{q(x)}(Q)|| < \infty$, $i = 1, ..., n$. Тоді $u \in C_b(S; L^2(\Omega)) \bigcap \overset{o}{V}{}^1(Q)$ і для довільного $\tau \in \mathbb{R}$ справджується оцінка*

$$\sup_{t\in(-\infty,\tau]}\int_{\Omega}|u(x,t)|^2\,dx + \sum_{i=1}^{n}\iint_{Q_{-\infty,\tau}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)}dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \max\left\{\sum_{i=1}^{n}||f_i; L^{q(x)}(Q_{-\infty,\tau})||; \left(\sum_{i=1}^{n}||f_i; L^{q(x)}(Q_{-\infty,\tau})||\right)^{\frac{r}{r-1}}\right\}, \qquad (5)$$

де C_3 – стала з (4).

Зауваження 1 При виконанні умов наслідку 1 маємо

$$\lim_{\tau\to-\infty}||u(\cdot,\tau); L^2(\Omega)|| = 0, \quad \lim_{\tau\to-\infty}||u; \overset{o}{V}{}^1(Q_{\tau-1,\tau})|| = 0.$$

Це легко випливає з (5).

Наслідок 2. *Нехай $||f_i; L^{q(x)}(Q_{\tau-1,\tau})|| \leqslant C_4\ \forall\tau \in S$, $i = 1, ..., n$, де $C_4 > 0$ – стала, яка не залежить від τ. Тоді $u \in C_b(S; L^2(\Omega))$ та правильна оцінка $||u; \overset{o}{V}{}^1(Q_{\tau-1,\tau})|| \leqslant C_5$, $\forall\tau \in S$, де C_5 – деяка додатна стала, яка не залежить від u.*

Наслідок 3. *Нехай $||f_i; L^{q(x)}(Q_{\tau-1,\tau})|| \to 0$ при $\tau \to -\infty$, $i = 1, ..., n$. Тоді $||u(\cdot,\tau); L^2(\Omega)|| \to 0$ при $\tau \to -\infty$; $||u; \overset{o}{V}{}^1(Q_{\tau-1,\tau})|| \to 0$ при $\tau \to -\infty$.*

Наслідок 4. *Нехай $T = +\infty$ та існує число $\sigma > 0$ таке, що $f_i(x, t+\sigma) = f_i(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $i = 1, ..., n$. Тоді $u(x, t+\sigma) = u(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, тобто u є періодичною функцією за змінною t.*

Означення 2. Множина $X \subset \mathbb{R}$ називається відносно щільною на $\mathbb{R}$, якщо існує $l > 0$ таке, що для довільного $a \in \mathbb{R}$ існує $\tau \in X$ таке, що $\tau \in [a, a+l]$.

Означення 3. Функція $v \in C(\mathbb{R}; B)$, де B – банахів простір, називається майже періодичною за Бором, якщо $\forall\varepsilon > 0$ множина $\{\sigma : \sup_{t\in\mathbb{R}}||u(t+\sigma) - u(t); B|| \leqslant \varepsilon\}$ є відносно щільною на $\mathbb{R}$.

Означення 4. Функція $f \in L^{q(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ називається майже періодичною за Степановим за змінною t, якщо $\forall\varepsilon > 0$ множина $\{\sigma : \sup_{\tau\in\mathbb{R}}||f(x,t+\sigma) - f(x,t); L^{q(x)}(Q_{\tau-1,\tau})|| \leqslant \varepsilon\}$ є відносно щільною на $\mathbb{R}$.

Означення 5. Функція w називається майже періодичною за Степановим як елемент простору $\overset{o}{V}{}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \mathbb{R})$, якщо вона належить цьому простору і $\forall\varepsilon > 0$ множина $\{\sigma : \sup_{\tau}||w(x,t+\sigma) - w(x,t); \overset{o}{V}{}^1(Q_{\tau-1,\tau})|| \leqslant \varepsilon\}$ є відносно щільною на $\mathbb{R}$.

Наслідок 5. *Нехай* $T = +\infty$ *і функції* f_i, $i = 1, ..., n$, *майже періодичні за Степановим як елементи простору* $L^{q(x)}_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R})$ *рівномірно по* $i \in \{1, 2, ..., n\}$, *тобто для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *множина* $\left\{\sigma : \sup\limits_{\tau} \sum\limits_{i=1}^{n} ||f_i(x, t+\sigma) - f_i(x, t); L^{q(x)}(Q_{\tau-1,\tau})|| \leqslant \varepsilon\right\}$ *є відносно щільною на* $\mathbb{R}$.

Тоді узагальнений розв'язок u *задачі (1), (2) є майже періодичною функцією за Бором як елемент простору* $C(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ *і майже періодичною функцією за Степановим як елемент простору* $\overset{o}{V}{}^1_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R})$.

2. Допоміжні твердження.

Встановимо деякі потрібні нам для доведення основних результатів допоміжні твердження.

Лема 1. *1) Нехай* $v \in \overset{o}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega)$. *Тоді*

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p(x)} dx \geqslant C_6 \cdot \min\{||v; L^2(\Omega)||^r; ||v; L^2(\Omega)||^s\},$$

де $C_6 > 0$ – *стала, яка залежить тільки від* n, r, s *і* Ω.

2) Нехай $w \in \overset{o}{V}{}^1(Q_{t_1,t_2})$. *Тоді*

$$\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{p(x)} dx \geqslant \frac{1}{n^s} \min\{||w; \overset{o}{V}{}^1(Q_{t_1,t_2})||^r; ||w; \overset{o}{V}{}^1(Q_{t_1,t_2}||^s\}.$$

Доведення. 1) Нагадаємо, що $||v; \overset{o}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega)|| = \sum\limits_{i=1}^{n} ||\frac{\partial v}{\partial x_i}; L^{p(x)}(\Omega)||$. Позначимо $\lambda_{i,0} = ||\frac{\partial v}{\partial x_i}; L^{p(x)}(\Omega)||$, $i = 0, 1, ..., n$; $M_0 = ||v; L^2(\Omega)||$; $M_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{i,0} \equiv ||v; \overset{o}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega)||$.

Нехай $\lambda_{k,0} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_{i,0}$. Очевидно, що $\lambda_{k,0} \leqslant ||v; \overset{o}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega)|| \leqslant n\lambda_{k,0}$. Якщо $\lambda_{k,0} = 0$, то потрібна нам нерівність очевидна. Припустимо, що $\lambda_{k,0} > 0$.

Маємо

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p(x)} dx \geqslant \int\limits_{\Omega} \left|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right|^{p(x)} dx = \int\limits_{\Omega} \lambda_{k,0}^{p(x)} \left|\frac{\partial v}{\partial x_k} / \lambda_{k,0}\right|^{p(x)} dx \geqslant$$

$$\geqslant \min\{\lambda^r_{k,0}; \lambda^s_{k,0}\} \geqslant \frac{1}{n^s} \min\{M_1^r; M_1^s\} \geqslant \frac{C_6}{n^s} \min\{M_0^r; M_0^s\} = C_7 \min\{M_0^r; M_0^s\}.$$

Тут ми врахували, що $\int\limits_{\Omega} |\frac{\partial v}{\partial x_k} / \lambda_{k,0}|^{p(x)} dx = 1$ і, на підставі теореми вкладення, $M_0 \leqslant C_8 M_1$, де $C_8 > 0$ – стала, яка залежить тільки від n, r, s та Ω.

2) Міркуючи аналогічно, як при доведенні першої частини, приходимо до потрібної оцінки.

Лема 2. *Нехай функції* $v \in L^r_{\text{loc}}(S; \overset{o}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega))$, $g_i \in L^{r/r-1}_{\text{loc}}(S; L^{q(x)}(\Omega))$, $i = 0, 1, ..., n$, *такі, що*

$$\iint\limits_{Q} \left\{-v\psi_t + g_0\psi + \sum_{j=1}^{n} g_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right\} dxdt = 0$$

для будь-яких $\psi \in C_0^\infty(Q)$.

Тоді $v \in C(S; L^2(\Omega))$ *і для будь-яких чисел* $t_1, t_2 \in S$, $t_1 < t_2$, *та довільної функції* $\theta \in C^1(S)$ *правильна рівність*

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega v^2(x,t_2)\theta(t_2)\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega v^2(x,t_1)\theta(t_1)\,dx -$$
$$-\frac{1}{2}\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} v^2\theta'\,dxdt + \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Big\{g_0 v + \sum_{j=1}^n g_j\frac{\partial v}{\partial x_j}\Big\}\theta\,dxdt = 0.$$

Доведення цієї леми аналогічне до доведення леми 2 з праці [5].

Лема 3. *Нехай* u *– узагальнений розв'язок задачі (1), (2), а* $\tilde{u}$ *– узагальнений розв'язок задачі, яка відрізняється від задачі (1), (2) тільки тим, що в правій частині рівняння (1) стоять* $\tilde{f}_i$ *замість* $f_i, i = 1, ..., n$. *Тоді для будь-яких* $\delta > 0$, $t_1, t_2 \in S, t_1 < t_2$, *правильна оцінка*

$$\max_{[t_1,t_2]}\int\limits_\Omega |u(x,t)-\tilde{u}(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}}\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial(u-\tilde{u})}{\partial x_i}\right|^{p(x)} dxdt \leqslant C_1\delta^{-\frac{2}{r-2}} + C_2\delta^{-\frac{2}{s-2}} +$$
$$+C_3\max\left\{\sum_{j=1}^n ||f_j - \tilde{f}_j; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,t_2})||; \left(\sum_{j=1}^n ||f_j-\tilde{f}_j; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,t_2})||\right)^{\frac{r}{r-1}}\right\}, \qquad (6)$$

де C_1, C_2, C_3 *– додатні сталі, які залежать тільки від* n, r, s *і* Ω.

Доведення. Виберемо функцію (див. [3]) $\theta_1(t) \in C^1(\mathbb{R})$ з такими властивостями: $0 \leqslant \theta_1(t) \leqslant 1, \theta_1'(t) \geqslant 0$ на $\mathbb{R}, \theta_1(t) = 0$, якщо $t \in (-\infty; -1]$, $\theta_1(t) = \exp\{-1/(t+1)\}$, якщо $t \in (-1; -1/2]$, $\theta_1(t) \geqslant \exp\{-2\}$, якщо $t \in (-1/2; 0)$, $\theta_1(t) = 1$, якщо $t \in [0; +\infty)$. Очевидно, що

$$\sup_{\mathbb{R}}\theta_1'(t)\theta^{-\varkappa}(t) \leqslant C_9\,, \qquad (7)$$

де $0 < \varkappa < 1$, $C_9 > 0$ - стала, яка залежить тільки від $\varkappa$.

Віднімемо від інтегральної тотожності (3) для u таку ж тотожність для $\tilde{u}$. В результаті отримаємо

$$\iint\limits_Q\Big\{-(u-\tilde{u})\psi_t + \sum_{i=1}^n\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}\right|^{p(x)}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_i} -$$
$$-\sum_{i=1}^n (f_i - \tilde{f}_i)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\Big\}\,dxdt = 0 \qquad (8)$$

для будь-яких $\psi \in C_0^\infty(Q)$.

Нехай δ, t_1, t_2 – довільні числа такі, що $\delta > 0, t_1, t_2 \in S, t_1 < t_2$. З (8) та з леми 2, взявши $\theta(t) = \theta_1\left(\frac{t-t_1}{\delta}\right)$ і $t_1 - \delta$ та s замість відповідно t_1 і t_2, де s – довільне число з проміжку $[t_1, t_2]$, для $w = u - \tilde{u}$ отримаємо

$$\int_\Omega w^2(x,s)\,dx - \iint_{Q_{t_1-\delta,s}} w^2\theta'\,dxdt + 2\iint_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta\sum_{i=1}^n\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}-\right.$$

$$\left.-\left|\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\right)dxdt = 2\iint_{Q_{t_1-\delta,s}}\sum_{i=1}^n (f_i-\tilde f_i)\frac{\partial w}{\partial x_i}\theta\,dxdt. \quad (9)$$

Тут $\theta = \theta_1\left(\frac{t-t_1}{\delta}\right)$.

З леми 1.2 праці [4] маємо

$$\iint_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta\sum_{i=1}^n\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}-\left|\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\right)dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \iint_{Q_{t_1-\delta,s}} 2^{2-p(x)}\theta\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\right|^{p(x)} dxdt \geqslant 2^{2-s}\iint_{Q_{t_1-\delta,s}}\theta\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{p(x)} dxdt. \quad (10)$$

Використавши другу частину леми 1, отримаємо

$$\iint_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{p(x)} dxdt = \int_{t_1-\delta}^{s}\theta\left(\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{p(x)}dx\right)dt \geqslant$$

$$\geqslant C_{10}\int_{t_1-\delta}^{s}\theta\min\{y^r(t);y^s(t)\}\,dt \geqslant C_{10}\int_{S_1}\theta y^s\,dt + C_{10}\int_{S_2}\theta y^r\,dt, \quad (11)$$

де $y(t) = ||w(\cdot,t);L^2(\Omega)||$, $S_1 = \{t\in[t_1-\delta,s] : y(t)\leqslant 1\}$, $S_2 = \{t\in[t_1-\delta,s] : y(t) > 1\}$.

Далі нам буде потрібна нерівність Юнга

$$ab \leqslant \varepsilon\cdot a^p + \varepsilon^{-1/(p-1)}\cdot p^{-q}(p-1)\cdot b^q$$

для довільних чисел $a\geqslant 0, b\geqslant 0, \varepsilon > 0, p > 1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

Позначимо $S_{1,0} = S_1\bigcap[t_1-\delta,t_1], S_{2,0} = S_2\bigcap[t_1-\delta,t_1]$. Тоді, використовуючи нерівність Юнга та (7), отримаємо

$$\iint_{Q_{t_1-\delta,s}} w^2\theta'\,dxdt = \int_{t_1-\delta}^{t_1}\theta'\left(\int_\Omega w^2\,dx\right)dt = \int_{t_1-\delta}^{t_1}\theta' y^2(t)\,dt =$$

$$= \int_{S_{1,0}}\theta' y^2(t)\,dt + \int_{S_{2,0}}\theta' y^2(t)\,dt \leqslant \int_{S_{1,0}}\theta'\theta^{-\frac{2}{s}}\theta^{\frac{2}{s}}y^2\,dt + \int_{S_{2,0}}\theta'\theta^{-\frac{2}{r}}\theta^{\frac{2}{r}}y^2\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1\int_{S_{1,0}}\theta y^s\,dt + C_{11}\varepsilon_1^{-\frac{2}{s-2}}\int_{S_{1,0}}\left(\theta'\theta^{-\frac{2}{s}}\right)^{\frac{s}{s-2}}dt + \varepsilon_2\int_{S_{2,0}}\theta y^r\,dt + C_{12}\varepsilon_2^{-\frac{2}{r-2}}\int_{S_{2,0}}\left(\theta'\theta^{-\frac{2}{r}}\right)^{\frac{r}{r-2}}dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1\int_{S_{1,0}}\theta y^s\,dt + \varepsilon_2\int_{S_{2,0}}\theta y^r\,dt + C_{13}[\varepsilon_1\delta]^{-\frac{2}{s-2}} + C_{14}[\varepsilon_2\delta]^{-\frac{2}{r-2}}, \quad (12)$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ – довільні сталі, $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14} > 0$ – сталі, які залежать тільки від r і s.
На підставі нерівності Гельдера, маємо

$$\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \sum_{i=1}^{n} \theta(f_i - \tilde{f}_i)\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_{15}\sum_{i=1}^{n} ||(f_i - \tilde{f}_i)\theta^{\frac{1}{q(x)}}; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,s})|| \cdot \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i}\theta^{\frac{1}{p(x)}}; L^{p(x)}(Q_{t_1-\delta,s})\right\| \leqslant$$

$$\leqslant C_{15}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\| \frac{\partial w}{\partial x_i}\theta^{\frac{1}{p(x)}}; L^{p(x)}(Q_{t_1-\delta,s})\right\| \sum_{i=1}^{n} ||(f_i - \tilde{f}_i)\theta^{\frac{1}{q(x)}}; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,s})||, \tag{13}$$

де $C_{15} > 0$ – стала, яка залежить тільки від r і s.
Зауважимо, що

$$||(f_i - \tilde{f}_i)\theta^{\frac{1}{q(x)}}; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,s})|| = \inf\{\lambda_i > 0 : \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \left|\frac{f_i - \tilde{f}}{\lambda_i}\right|^{q(x)} \theta\,dxdt \leqslant 1\} \leqslant$$

$$\leqslant \inf\left\{\lambda_i > 0 : \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \left|\frac{f_i - \tilde{f}}{\lambda_i}\right|^{q(x)} dxdt \leqslant 1\right\} = ||f_i - \tilde{f}_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,s})||. \tag{14}$$

З (9), враховуючи (10)–(14) та вибираючи ε_1 і ε_2 досить малими, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} w^2(x,s)\,dx + C_{16}\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{p(x)} dxdt \leqslant C_{17}\delta^{-\frac{2}{r-2}} +$$

$$+C_{18}\delta^{-\frac{2}{s-2}} + C_{19}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\| \frac{\partial w}{\partial x_i}\theta^{\frac{1}{p(x)}}; L^{p(x)}(Q_{t_1-\delta,s})\right\| \sum_{i=1}^{n} ||f_i - \tilde{f}_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,s})||, \tag{15}$$

де $C_{16}, C_{17}, C_{18}, C_{19} > 0$ – сталі, які залежать тільки від n, r, s та Ω.
Позначимо

$$\overline{\lambda_i} = \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i}\theta^{\frac{1}{p(x)}}; L^{p(x)}(Q_{t_1-\delta,s})\right\| = \inf\left\{\lambda_i > 0 : \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}/\lambda_i\right|^{p(x)} \theta\,dxdt \leqslant 1\right\}.$$

Нехай $\overline{\lambda_k} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\overline{\lambda_i} > 0$, бо в протилежному випадку потрібна нам нерівність очевидна.
Маємо

$$\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{p(x)} dxdt \geqslant \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta\left|\frac{\partial w}{\partial x_k}\right|^{p(x)} dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta\left|\frac{\partial w}{\partial x_k}/\overline{\lambda_k}\right|^{p(x)} (\overline{\lambda_k})^{p(x)}\,dxdt \geqslant \min\{\overline{\lambda_k}^{r}; \overline{\lambda_k}^{s}\}. \tag{16}$$

Розглянемо два випадки: 1) $\overline{\lambda_k} \leqslant 1$; 2) $\overline{\lambda_k} > 1$. В першому випадку з (15) ми відразу отримаємо потрібну нам нерівність, а у другому випадку зробимо додатково ще одну оцінку, використавши нерівність Юнга,

$$\overline{\lambda_k}\cdot\sum_{i=1}^{n}||f_i-\tilde{f}_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,s})|| \leqslant \varepsilon(\overline{\lambda_k})^r + C_{20}\cdot\varepsilon^{-\frac{1}{r-1}}\left(\sum_{i=1}^{n}||f_i-\tilde{f}_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,s})||\right)^{\frac{r}{r-1}}, \quad (17)$$

де $\varepsilon > 0$ – довільна стала, $C_{20} > 0$ – стала, що залежить тільки від r.

На підставі (16) і (17), вибираючи ε досить малим, з (15) отримаємо те, що нам потрібно.

3. Доведення основних результатів .

Доведення теореми. Єдиність. Нехай u_1, u_2 – два узагальнені розв'язки задачі (1), (2). З леми 3 маємо

$$\int_\Omega |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2\,dx \leqslant C_1\delta^{-\frac{2}{r-2}} + C_2\delta^{-\frac{2}{s-2}},$$

де $t \in S$, $\delta > 0$ – довільні. Спрямувавши в цій нерівності δ до $+\infty$, отримаємо $\int_\Omega |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2\,dx = 0$. Звідси випливає єдиність узагальненого розв'язку задачі (1), (2).

Існування. Апріорну оцінку узагальненого розв'язку задачі (1), (2) здобудемо з оцінки (6) леми 3, взявши $\tilde{u} = 0$, $\tilde{f}_i \equiv 0$, $i = 1, 2, ..., n$.

Побудуємо послідовність функцій $\{u_k\}$, які певним чином збігаються до узагальненого розв'язку задачі (1), (2).

Нехай для визначеності T – скінченне число і $Q_k = \Omega \times (T-k, T)$, $\Sigma_k = \partial\Omega \times (T-k, T)$ для довільного натурального $k \in \mathbb{N}$.

Розглянемо сім'ю мішаних задач

$$\tilde{u}_{kt} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_i} \quad \text{в} \quad Q_k, \quad (\tilde{1}_k)$$

$$\tilde{u}_k = 0 \text{ на } \Sigma_k, \quad \tilde{u}_k|_{t=T-k} = 0, \quad (\tilde{2}_k)$$

де $k \in \mathbb{N}$.

Узагальненим розв'язком задачі $(\tilde{1}_k), (\tilde{2}_k)$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ назвемо функцію $\tilde{u}_k \in L^r([T-k, T]; \overset{o}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega)) \bigcap \overset{o}{V}{}^1(Q_k) \bigcap C([T-k, T]; L^2(\Omega))$, яка справджує початкову умову $\tilde{u}_k|_{t=T-k} = 0$ та інтегральну тотожність

$$\iint_{Q_k}\left\{-\tilde{u}_k\psi_t + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} f_i\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right\}dxdt = 0$$

для довільних $\psi \in C_0^\infty(Q_k)$.

Існування та єдиність узагальненого розв'язку $\tilde{u}_k$ задачі $(\tilde{1}_k), (\tilde{2}_k)$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ випливає з праці [2]. Довизначимо $\tilde{u}_k$ нулем на $Q\setminus\overline{Q}_k$ і позначимо отриману функцію через u_k (k – довільне натуральне число). Очевидно, що u_k для довільного $k \in \mathbb{N}$ є узагальненим розв'язком задачі без початкових умов

$$u_{kt} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_{i,k}}{\partial x_i} \quad \text{в} \quad Q, \quad (1_k)$$

$$u_k = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \quad (2_k)$$

де $f_{i,k}(x,t) = f_i(x,t)$, коли $(x,t) \in Q_k$ і $f_{i,k}(x,t) = 0$, коли $(x,t) \in Q \setminus Q_k$.

Задачі $(1_k), (2_k), k \in \mathbb{N}$, відрізняються від задачі (1), (2) тільки тим, що в рівнянні (1) замість f_i стоять $f_{i,k}\, i = 1, ..., n$. Звідси та з леми 3 для довільних $\delta > 0$, $t_1, t_2 \in S$, $t_1 < t_2$, і будь-яких натуральних k, l, таких, що $k \geqslant T - t_1 + \delta$, $l \geqslant T - t_1 + \delta$, маємо

$$\max_{[t_1,t_2]} \int_\Omega |u_k(x,t) - u_l(x,t)|^2\, dx + \iint_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right|^{p(x)} dxdt \leqslant C_1 \delta^{-\frac{2}{r-2}} + C_2 \delta^{-\frac{2}{s-2}}. \quad (18)$$

Звідси випливає, що послідовність $\{u_k\}$ є фундаментальною за нормою простору $C([t_1,t_2]; L^2(\Omega)) \bigcap \overset{o}{V}(Q_{t_1,t_2})$. Справді, нехай $\varepsilon > 0$ – довільне як завгодно мале число. Виберемо число δ таким, щоб права частина нерівності (18) була менша за ε і зафіксуємо це число. Тоді для будь-яких k і l таких, що $k, l \geqslant k_0$, де $k_0 = [T - t_1 + \delta] + 1$, отримаємо, що ліва частина нерівності (18) менша за ε, що й потрібно було показати.

Отже, існує функція $u(x,t) \in \overset{o}{V}{}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \bigcap C(S; L^2(\Omega))$ така, що

$$u_k \to u \quad \text{в} \quad C(S; L^2(\Omega)), \quad (19)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{в} \quad L^{p(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad i = 1, 2, ..., n. \quad (20)$$

Покажемо, що

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{в} \quad L^r_{\mathrm{loc}}(S; L^{p(x)}(\Omega), \quad i = 1, 2, ..., n. \quad (21)$$

Виберемо довільне $i \in \{1, 2, ..., n\}$ та позначимо, для зручності, похідну $\frac{\partial(u_k - u)}{\partial x_i}$ через v, а норму $||v(\cdot,t); L^{p(x)}(\Omega)||$ – через $\lambda_0(t)$, тобто $\lambda_0(t) = \inf\{\lambda > 0 : \int_\Omega |v(x,t)/\lambda|^{p(x)}\, dx \leqslant 1\}$. Нехай $\tilde{S} = \{t \in [t_1, t_2] : 0 < \lambda_0(t) < +\infty\}$, $\tilde{S}_1 = \{t \in \tilde{S} : \lambda_0(t) \leqslant 1\}$, $\tilde{S}_2 = \{t \in \tilde{S} : \lambda_0(t) > 1\}$.

Маємо

$$\iint_{Q_{t_1,t_2}} |v|^{p(x)}\, dxdt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_\Omega |v|^{p(x)}\, dx \right) dt = \int_{\tilde{S}} \left(\int_\Omega \left| \frac{v(x,t)}{\lambda_0(t)} \right|^{p(x)} \lambda_0^{p(x)}(t)\, dx \right) dt =$$

$$\int_{\tilde{S}_1} \left(\int_\Omega \left| \frac{v(x,t)}{\lambda_0(t)} \right|^{p(x)} \lambda_0^{p(x)}(t) dx \right) dt + \int_{\tilde{S}_2} \left(\int_\Omega \left| \frac{v(x,t)}{\lambda_0(t)} \right|^{p(x)} \lambda_0^{p(x)}(t) dx \right) dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\tilde{S}_1} \lambda_0^s(t)\, dt + \int_{\tilde{S}_2} \lambda_0^r(t)\, dt = ||\lambda_0(t); L^s(\tilde{S}_1)||^s + ||\lambda_0(t); L^r(\tilde{S}_2)||^r \geqslant$$

$$\geqslant C_{21}^s ||\lambda_0(t); L^r(\tilde{S}_1)||^s + ||\lambda_0(t); L^r(\tilde{S}_2)||^r.$$

Тут ми врахували, що згідно з теоремами вкладення $||\lambda_0(t) : L^s(\tilde{S}_1)|| \geqslant C_{21} ||\lambda_0(t); L^r(\tilde{S}_1)||$, де $C_{21} = (t_2 - t_1)^{\frac{r-s}{rs}}$.

Звідси

$$||\lambda_0(t); L^r(t_1,t_2)||^r \leqslant C_{21}^{-r}\left(\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} |v|^{p(x)}\,dxdt\right)^{r/s} + \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} |v|^{p(x)}\,dxdt. \tag{22}$$

З (20) і (22) випливає (21).

Тепер покажемо, що

$$\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \to \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{в} \quad L^{q(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad i=1,2,...,n. \tag{23}$$

Введемо функцію

$$\chi_i(\theta) = \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + \theta\left(\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\right)\right|^{p(x)-2}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + \theta\left(\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\right)\right),\ \theta\in[0;1],\ i=1,2,...,n.$$

Використовуючи теорему Лагранжа, отримаємо

$$\left|\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_i} - \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} =$$
$$= \chi_i(1) - \chi_i(0) = \chi_i'(\theta^*) = (p(x)-1)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\right)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + \theta^*(x,t)\left(\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\right)\right|^{p(x)-2},$$

де $0 \leqslant \theta^*(x,t) \leqslant 1$.

Звідси та з нерівності Гельдера (з $\frac{p(x)}{q(x)}$ замість $p(x)$) і обмеженості послідовностей $\{\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\}_{k=1}^{\infty}$, за нормою $L^{p(x)}(Q_{t_1,t_2})$ $i=1,...,n$, для скінченних $t_1,t_2\in S, t_1<t_2$, маємо

$$\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}}\left|\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q(x)} dxdt \leqslant$$
$$\leqslant (s-1)\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}}\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q(x)}\left(\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right)^{(p(x)-2)q(x)} dxdt \leqslant$$
$$\leqslant C_{22}\left\|\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}; L^{p(x)}(Q_{t_1,t_2})\right\|\cdot\left\|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right|; L^{p(x)}(Q_{t_1,t_2})\right\| \leqslant$$
$$\leqslant C_{23}\left\|\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}; L^{p(x)}(Q_{t_1,t_2})\right\|, \tag{24}$$

де $i\in\{1,...,n\}$, $C_{22}, C_{23} > 0$ – сталі, яка не залежать від $k\in\mathbb{N}$, але можуть залежати від t_1 і t_2.

З (24) та (20) отримаємо (23). З (19), (23) та означення узагальненого розв'язку задачі $(1_k), (2_k)$ випливає, що u – узагальнений розв'язок задачі (1), (2).

Неперервна залежність. Нехай $\{f_{i,k}\}_{k=1}^{\infty}$, $i = 1, 2, ..., n$, – послідовності функцій з простору $L^{q(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \bigcap L^{\frac{r}{r-1}}_{\mathrm{loc}}(S; L^{q(x)}(\Omega))$ такі, що $f_{i,k} \to f_i$ в $L^{q(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ при $k \to \infty$.

Візьмемо довільне як завгодно мале число $\varepsilon > 0$ і будь-які скінченні числа $t_1, t_2 \in S$, $t_1 < t_2$. З леми 3 безпосередньо випливає

$$\max_{[t_1,t_2]} \int\limits_{\Omega} |u_k(x,t) - u(x,t)|^2\, dx + \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p(x)} dxdt \leqslant C_1 \delta^{-\frac{2}{r-2}} + C_2 \delta^{-\frac{2}{s-2}} +$$

$$+ C_3 \max \left\{ \sum_{i=1}^{n} ||f_{i,k} - f_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,t_2})||; \left(\sum_{i=1}^{n} ||f_{i,k} - f_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,t_2})|| \right)^{\frac{r}{r-1}} \right\} \quad (25)$$

для довільного $\delta > 0$.

Виберемо значення δ настільки великим, щоб виконувалась нерівність

$$C_1 \delta^{-\frac{2}{r-2}} + C_2 \delta^{-\frac{2}{s-2}} < \varepsilon/2, \quad (26)$$

і зафіксуємо його. Тепер вибираємо $k_0 \in \mathbb{N}$ таким, щоб виконувалась нерівність

$$C_3 \max \left\{ \sum_{i=1}^{n} ||f_{i,k} - f_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,t_2})||; \left(\sum_{i=1}^{n} ||f_{i,k} - f_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,t_2})|| \right)^{\frac{r}{r-1}} \right\} < \varepsilon/2 \quad (27)$$

для всіх $k \geqslant k_0$.

З (25), (26), (27) випливає, що для всіх $k \geqslant k_0$

$$\max_{[t_1,t_2]} \int\limits_{\Omega} |u_k(x,t) - u(x,t)|^2\, dx + \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p(x)} dx < \varepsilon.$$

Звідси та з леми 1 маємо потрібне твердження.

Доведення наслідку 1. З оцінки (4), перейшовши спочатку до границі при $\delta \to +\infty$, а потім – при $t_1 \to +\infty$, отримаємо

$$\sup_{t \leqslant t_2} \int\limits_{\Omega} u(x,t)\, dx + \iint\limits_{Q_{-\infty,t_2}} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p(x)} dx \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \max \left\{ \sum_{i=1}^{n} ||f_i; L^{q(x)}(Q_{-\infty,t_2})||; \left(\sum_{i=1}^{n} ||f_i; L^{q(x)}(Q_{-\infty,t_2})|| \right)^{\frac{r}{r-1}} \right\}, \quad (28)$$

де $Q_{-\infty,t_2} = \Omega \times (-\infty, t_2)$.

Поклавши в (28) $t_2 = \tau$, отримаємо те, що нам потрібно.

Доведення наслідку 2. Використовуючи оцінку (4) та умову наслідку 2, легко отримаємо потрібне нам твердження.

Доведення наслідку 3. З оцінки (4) маємо

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x,\tau)\, dx + \iint\limits_{Q_{\tau-1,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p(x)} dxdt \leqslant C_1 \delta^{-\frac{2}{r-2}} + C_2 \delta^{-\frac{2}{s-2}} +$$

$$+C_3 \max\left\{\sum_{i=1}^{n} ||f_i; L^{q(x)}(Q_{\tau-1-\delta,\tau})||; \left(\sum_{i=1}^{n} ||f_i; L^{q(x)}(Q_{\tau-1-\delta,\tau})||\right)^{\frac{r}{r-1}}\right\} \tag{29}$$

для довільних $\tau \in S, \delta > 0$. Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне число. Виберемо значення $\delta > 0$ таким, щоб виконувалась нерівність

$$C_1\delta^{-\frac{2}{r-2}} + C_2\delta^{-\frac{2}{s-2}} < \varepsilon/2, \tag{30}$$

і зафіксуємо його. З того, що нам дано, випливає існування такого $\tau_0 \in S$, що для всіх $\tau \leqslant \tau_0$

$$C_3 \max\left\{\sum_{i=1}^{n} ||f_i; L^{q(x)}(Q_{\tau-1-\delta,\tau})||; \left(\sum_{i=1}^{n} ||f_i; L^{q(x)}(Q_{\tau-1-\delta,\tau})||\right)^{\frac{r}{r-1}}\right\} < \varepsilon/2.$$

Звідси та з (29) і (30) випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\tau_0 \in S$, що ліва частина (29) менша за ε, як тільки $\tau \leqslant \tau_0$. Це дає потрібне нам твердження.

Доведення наслідку 4. Очевидно, що функція $u(x, t+\sigma)$ є узагальненим розв'язком задачі (1), (2). Але оскільки задача (1), (2) має тільки один розв'язок, то $u(x, t+\sigma) = u(x, t)$ для майже всіх $(x, t) \in Q$.

Доведення наслідку 5. Позначимо

$$F_\varepsilon = \left\{\sigma : \sup_\tau \sum_{i=1}^{n} ||f_i(x, t+\sigma) - f_i(x, t); L^{q(x)}(Q_{\tau-1,\tau})|| \leqslant \varepsilon\right\},$$

$$U_\varepsilon = \left\{\sigma : \sup_\tau \left(\int_\Omega |u(x, \tau+\sigma) - u(x, \tau)|^2\, dx\; + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \iint_{Q_{\tau-1,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u(x, t+\sigma)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i}\right|^{p(x)} dxdt\right) \leqslant \varepsilon\right\}$$

для довільного $\varepsilon > 0$.

Нам достатньо довести, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ множина U_ε відносно щільна на $\mathbb{R}$. Для цього ми покажемо, що для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що $F_{\varepsilon_0} \subset U_\varepsilon$.

Нехай σ – поки що довільне число. З інтегральної тотожності (3) легко випливає, що функція $u(x, t+\sigma)$ є узагальненим розв'язком задачі, яка відрізняється від задачі (1), (2) тільки тим, що в правій частині рівняння стоять відповідно $f_i(x, t+\sigma)$ замість $f_i(x, t)$, $i = 1, ..., n$. З леми 3 маємо

$$\int_\Omega |u(x, t+\sigma) - u(x, t)|^2\, dx + \iint_{Q_{\tau-1,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u(x, t+\sigma)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i}\right|^{p(x)} dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1\delta^{-\frac{2}{r-2}} + C_2\delta^{-\frac{2}{s-2}} + C_3 \max\left\{\sum_{i=1}^{n} ||f_i(x, t+\sigma) - f_i(x, t); L^{q(x)}(Q_{\tau-1-\delta,\tau})||;\right.$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}||f_i(x,t+\sigma)-f_i(x,t);L^{q(x)}(Q_{\tau-1-\delta,\tau})||\right)^{\frac{r}{r-1}}\Bigg\} \tag{31}$$

для довільного $\tau\in\mathbb{R}$.

Нехай $\varepsilon>0$ – довільне число. Виберемо значення $\delta>0$ цілим і настільки великим, щоб виконувалась нерівність

$$C_1\delta^{-\frac{2}{r-2}}+C_2\delta^{-\frac{2}{s-2}}<\varepsilon/2 \tag{32}$$

і зафіксуємо його.

Очевидно, що δ від τ не залежить. Нехай $\sigma\in F_{\varepsilon_0}$, де $\varepsilon_0>0$ таке, що

$$C_3\max\{(\delta+1)\varepsilon_0;[(\delta+1)\varepsilon_0]^{\frac{r}{r-2}}\}<\varepsilon/2. \tag{33}$$

З (32), (33) випливає, що у випадку, коли $\sigma\in F_{\varepsilon_0}$, то $\sigma\in U_\varepsilon$. Наслідок 5 доведено.

4. Деякі узагальнення.

Сформульовані твердження переносяться на випадок рівнянь високого порядку аналогічних до рівняння (1):

$$u_t+(-1)^m\sum_{|\alpha|=m}D^\alpha(|D^\alpha u|^{p(x)-2}D^\alpha u)=(-1)^m\sum_{|\alpha|=m}D^\alpha f_\alpha(x,t),\quad \text{в } Q, \tag{34}$$

$$D^\gamma u|_\Sigma=0,\quad |\gamma|\leqslant m-1. \tag{35}$$

Задача (34), (35) однозначно розв'язна в просторі $\overset{o}{V}{}^k_{\mathrm{loc}}(Q)\bigcap L^{r/r-1}_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega))$, якщо $f_\alpha(x,t)\in L^{q(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})\cap L^{r/(r-1)}(S;L^{q(x)}(\Omega))$ для всіх α таких, що $|\alpha|=m$; $2<r\leqslant s<\infty$ і виконується, наприклад, одна з таких умов: 1) $p(x)$ неперервна на $\overline{\Omega}$; 2) $m>n$; 3) $m=n$ і існують $p_1\in(2,\infty)$ і відкриті множини $G_1,G_2\subset\mathbb{R}^n$ такі, що $\overline{\Omega}\subset G_1\cup G_2$ і $p(x)\geqslant p_1$ для всіх $x\in G_1\bigcap\Omega$; 4) $m\leqslant n$ і існують числа p_i,r_i, $i=1,2,...,m$ та існують відкриті множини $G_i\subset\Omega, i=1,2,...,m$, які містять скінченну кількість компонент з ліпшицевою межею і такі, що міра Лебега множини $\Omega\setminus\bigcap_{i=1}^m G_i$ дорівнює нулю, $2<p_1<p_2<r_1<p_3<r_2<p_4<r_3<...<p_{m-1}<r_{m-2}<p_m<r_{m-1}<r_m<+\infty$, $r_i<np_i/(n-p_i)$, $i=1,2,...,m-1$, $p_i\leqslant p(x)\leqslant r_i$ для всіх $x\in G_i, i=1,2,...,m$.

1. Калашников А.С. *Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка* // Успехи мат. наук. – 1987. – Т.42, N 2. – С.135-176.
2. Самохин В.Н. *Об одном классе уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т.32, N 5.– С.643-651.
3. Kovacik O., Zilina and Jiri Rakosnik // Czechosl. Math. J. – 1991. – Vol.41, N 4. – P.592-618.
4. Бокало Н.М. *О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений* // В кн.: Труды семинара им. И.Г.Петровского. – Вып.14. – М.: Изд-во Моск. ун-та, – 1989, – С. 3-32.
5. Bokalo M.M., Sikorsky V.M. *The well-posedness of a Fourier problem for quasilinear parabolic equations of arbitrary order in unisotropic spaces* // Математичні студії. – 1997. – Т.8, N 1. – С.53-70.

Стаття надійшла до редколегії 21.05.1998