УДК 517.956

ПРО ОДИН ВАРІАНТ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ СТЕФАНА В КРИВОЛІНІЙНОМУ СЕКТОРІ

Г. І. Берегова, В. М. Кирилич

Beregova G. I., Kyrylych V. M. About one of a hyperbolic Stefan problem in a curvilinear sector. The problem with the unknown boundaries for the semilinear hyperbolic system of equations of the first order in the curvilinear sector is considered. Moreover, some characteristics outgoing from top of the sector get into domain. With the help of the characteristics method theorems of existence and uniqueness of the generalized solution for this problem is proved for local t.

У статті розглянуто задачу з невідомими границями для напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними, що є деяким узагальненням праці [1] на випадок виродження лінії задання початкових умов у точку та наявності у секторі характеристик, які виходять з його вершини. При дослідженні коректної розв'язності задачі використано методику праць [1-3]. Прикладні аспекти виникнення гіперболічних задач з невідомими границями (гіперболічні задачі Стефана) наведено в [1, 3-5] (див. відповідний огляд літератури).

1. Формулювання задачі. Розглянемо гіперболічну систему рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t;u), \quad i=\overline{1,n}, \tag{1}$$
$$(x,t)\in G_{u,T} := \{(x,t): 0<t\leqslant T,\ a_{u,1}(t)<x<a_{u,2}(t),\ a_{u,1}(0)=a_{u,2}(0)=0\},$$

причому $u_i : G_{u,T} \to \mathbb{R}$, а функції $a_{u,k}(t)$ теж невідомі і задовольняють системі рівнянь

$$\frac{da_{u,k}}{dt} = h_k(t;u), \qquad u=(u_1,\dots,u_n), \quad k=1,2. \tag{2}$$

Праві частини в (1) та (2) – це функціонали типу Вольтерра (умови на них див. в пункті 2).

Задамо поведінку характеристик системи (1), випущених з вершини сектора $G_{u,T}$:

$$\lambda_i(0,0) - a'_{u,1}(0) > 0,\ i=\overline{1,p+q}, \quad \lambda_i(0,0) - a'_{u,1}(0) < 0,\ i=\overline{p+q+1,n}, \tag{3}$$
$$\lambda_i(0,0) - a'_{u,2}(0) > 0,\ i=\overline{1,p}, \qquad \lambda_i(0,0) - a'_{u,2}(0) < 0,\ i=\overline{p+1,n}, p,q \in [0,n],$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35L60.

тобто q характеристик, які виходять з точки $(0,0)$ попадають в сектор. Позначимо

$$I_k^+ = \{i : \lambda_i(0,0) > a'_{u,k}(0)\}, \qquad I_k^- = \{i : \lambda_i(0,0) < a'_{u,k}(0)\}, \quad k = 1,2.$$

Задамо граничні умови

$$\begin{aligned} u_i(a_{u,1}(t),t) &= g_{i1}\big(t; \{u_{i'}(a_{u,1}(t),t)\}\big), \quad t \in [0,T], \ i \in I_1^+, \ i' \in I_1^-, \\ u_i(a_{u,2}(t),t) &= g_{i2}\big(t; \{u_{i'}(a_{u,2}(t),t)\}\big), \quad i \in I_2^-, \ i' \in I_2^+, \end{aligned} \tag{4}$$

тобто в правих частинах (4) присутні лише ті набори індексів i', яких немає в лівих частинах; $g_{i1} : [0,T] \times \mathbb{R}^{n-p-q} \to \mathbb{R}$, $g_{i2} : [0,T] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.

2. Додаткові припущення. Введемо метричний простір S_T "наборів" $v = \{u_i, a_{u,k}\}$ $(i = \overline{1,n}, k = 1,2)$, $u_i \in C(G_{u,T})$, $a_{u,k} \in C^1([0,T])$, $a_{u,1}(t) \leqslant a_{u,2}(t)$, з метрикою

$$\rho(v^1, v^2) = \max\big\{\max_{k,t}\big|a_{u^1,k}(t) - a_{u^2,k}(t)\big|, \max_{i,x,t}\big|\bar{u}_i^1(x,t) - \bar{u}_i^2(x,t)\big|\big\};$$

тут і надалі для довільної $r : [a,b] \to \mathbb{R}$ позначення $\bar{r}$ означає продовження r на $\mathbb{R}$ за формулами $\bar{r}(x) = r(a)$ $(x < a)$, $\bar{r}(x) = r(b)$ $(x > b)$.

Знайдемо значення функцій $u_i(0,0) \equiv u_{i,0}$, $(i = \overline{1,n})$ з граничних умов (4)

$$\begin{aligned} u_i(0,0) &= g_{i1}\big(0; u_{p+q+1,0}, \ldots, u_{n,0}\big), \quad i = \overline{1, p+q}, \\ u_i(0,0) &= g_{i2}\big(0; u_{1,0}, \ldots, u_{p,0}\big), \quad i = \overline{p+1, n}. \end{aligned} \tag{5}$$

Для цього розв'яжемо систему

$$\begin{cases} u_{1,0} = g_{11}\Big(0; g_{p+q+1,2}\big(0; u_{1,0}, \ldots, u_{p,0}\big), \ldots, g_{n,2}\big(0; u_{1,0}, \ldots, u_{p,0}\big)\Big), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{p,0} = g_{p1}\Big(0; g_{p+q+1,2}\big(0; u_{1,0}, \ldots, u_{p,0}\big), \ldots, g_{n,2}\big(0; u_{1,0}, \ldots, u_{p,0}\big)\Big). \end{cases} \tag{6}$$

Введемо вектор-функції

$$\begin{aligned} G_1(x_{p+q+1}, \ldots, x_n) &= \mathrm{col}\big(g_{11}(0; x_{p+q+1}, \ldots, x_n), \ldots, g_{p1}(0; x_{p+q+1}, \ldots, x_n)\big), \\ G_2(x_1, \ldots, x_p) &= \mathrm{col}\big(g_{p+q+1,2}(0; x_1, \ldots, x_p), \ldots, g_{n,2}(0; x_1, \ldots, x_p)\big). \end{aligned}$$

Тут $G_1 : \mathbb{R}^{n-p-q} \to \mathbb{R}^p$, а $G_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{n-p-q}$, а композиція цих вектор-функцій $G_1 \circ G_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$. Якщо в просторі $\mathbb{R}^p$ з метрикою $\rho(x,y) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} |x_k - y_k|$ $(\forall x, y \in \mathbb{R}^p)$ виконується умова стиску

$$g_1 g_2 < 1, \tag{7}$$

де g_1 – стала Ліпшиця для G_1, а g_2 – для G_2, то існує єдиний розв'язок системи (6), який можна знайти методом простої ітерації [6, ст. 407].

Маючи розв'язок системи (6), знайдемо

$$\begin{cases} u_{p+1,0} = g_{p+1,2}\big(0; u_{1,0}, \ldots, u_{p,0}\big), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{p+q,0} = g_{p+q,2}\big(0; u_{1,0}, \ldots, u_{p,0}\big), \\ u_{p+q+1,0} = g_{p+q+1,2}\big(0; u_{1,0}, \ldots, u_{p,0}\big), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{n,0} = g_{n,2}\big(0; u_{1,0}, \ldots, u_{p,0}\big). \end{cases} \tag{8}$$

Отже, якщо виконується умова (7) та умови узгодження

$$\begin{cases} g_{p+1,1}\big(0; u_{p+q+1,0},\dots,u_{n,0}\big) = g_{p+1,2}\big(0; u_{1,0},\dots,u_{p,0}\big), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_{p+q,1}\big(0; u_{p+q+1,0},\dots,u_{n,0}\big) = g_{p+q,2}\big(0; u_{1,0},\dots,u_{p,0}\big), \end{cases} \tag{9}$$

то $u_{i,0}$ визначається єдиним чином з граничних умов (4). Звідси і з умов (2) та (3) випливає, що

$$\lambda_i(0,0) \neq h_k(0; u_0), \quad u_0 = \operatorname{col}(u_{1,0},\dots,u_{n,0}),\ k=1,2,\ i=\overline{1,n}. \tag{10}$$

Нехай виконуються такі припущення:

a) всі $\lambda_i(x,t)$ $(i=\overline{1,n})$ – дійсні, крім того, $\lambda_i \in C^1\big(\mathbb{R}\times[0,T]\big)$;

b) кожен функціонал $f_i(x,t;u)$ визначений і неперервний при $v \in S_T$, $(x,t)\in G_{u,T}$, а відповідно $h_k(t;u)$ – на $[0,T]\times S_T$, крім того, в деякому околі довільної точки з S_T ці функціонали задовольняють умові Ліпшиця по u та існує таке $M>0$, що якщо $u(.,.)$ задовольняє по x умові Ліпшиця зі сталою L, то $f_i(.,.;u)$ задовольняє по x умові Ліпшиця зі сталою ML;

c) функції g_{i1} визначені на $[0,T]\times\mathbb{R}^{n-p-q}$, g_{i2} – на $[0,T]\times\mathbb{R}^p$ і задовольняють по всіх змінних умові Ліпшиця зі сталою $Tg_0(T)$, де $g_0(T)$ обмежена при $T\in(0,+\infty)$;, а функції $g_{ik}\big(0;\{u_{i',0}\}\big)$ задовольняють умові (7) та умовам узгодження (9).

3. Існування узагальненого розв'язку задачі. Нехай $\varphi_i(\tau;x,t)$ – розв'язок задачі Коші $d\xi\,/\,d\tau = \lambda_i(\xi,\tau)$, $\xi(t)=x$, $(x,t)\in\overline{G}_{u,T}, i=\overline{1,n}$. Відповідні інтегральні криві позначимо через $Q_i(x,t)$. Нехай $t_i(x,t;u) := \min\{\tau : (\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\in G_{u,T}\}$. Очевидно, що $0\leqslant t_i(x,t;u)\leqslant t$. Якщо $t_i(x,t;u)>0$, то $\varphi_i(t_i(x,t;u);x,t) = a_{u,1}(t_i(x,t;u))$ або $\varphi_i(t_i(x,t;u);x,t) = a_{u,2}(t_i(x,t;u))$. Звідси випливає, що характеристика $Q_i(0,0)$, визначена лише у випадку $a'_{u,1}(0) < \lambda_i(0,0) < a'_{u,2}(0)$ (тобто $i=\overline{p+1,p+q}$), розділяє $G_{u,T}$ на дві компоненти $G^{i1}_{u,T}$ і $G^{i2}_{u,T}$. Очевидно, що при $\lambda_i(0,0) < a'_{u,1}(0)$ $\big(\lambda_i(0,0) > a'_{u,2}(0)\big)$ матимемо $G^{i1}_{u,T}=\emptyset$, $G^{i2}_{u,T}=G_{u,T}$ (відповідно $G^{i1}_{u,T}=G_{u,T}$, $G^{i2}_{u,T}=\emptyset$). Тоді при $t>0$ умова $\varphi_i(t_i(x,t;u);x,t) = a_{u,1}(t_i(x,t;u))$ $\big(\ \varphi_i(t_i(x,t;u);x,t) = a_{u,2}(t_i(x,t;u))\ \big)$ рівносильна тому, що $(x,t)\in G^{i1}_{u,T}$ (відповідно $(x,t)\in G^{i2}_{u,T}$).

Припускаючи, що в системі (1) функції u_i неперервно-диференційовні і

$$\lambda_i(a_{u,k}(t),t) \neq h_k(t;u), \quad k=1,2,\ i=\overline{1,n} \tag{11}$$

та інтегруючи (1) вздовж характеристик [1-3], приходимо до системи інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x,t) = \omega_i(x,t;u) + \int\limits_{t_i(x,t;u)}^{t} f_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u\big)d\tau,\ i=\overline{1,n},\ (x,t)\in G_{u,T}, \tag{12}$$

де

$$\omega_i(x,t;u) = \begin{cases} g_{i1}\big(t_i(x,t;u); u_{p+q+1}(a_{u,1}(t_i(x,t;u)), t_i(x,t;u)), \\ \dots, u_n(a_{u,1}(t_i(x,t;u)), t_i(x,t;u))\big), \quad \text{при } (x,t)\in G^{i1}_{u,T}, \\ g_{i2}\big(t_i(x,t;u); u_1(a_{u,2}(t_i(x,t;u)), t_i(x,t;u)), \\ \dots, u_p(a_{u,2}(t_i(x,t;u)), t_i(x,t;u))\big), \quad \text{при } (x,t)\in G^{i2}_{u,T}. \end{cases} \tag{13}$$

Означення. *Узагальненим розв'язком задачі (1)-(4) назвемо набір $v \in S_T$ функцій, які задовольняють умові (11) та системам рівнянь (2), (12).*

Теорема. *Якщо виконуються припущення пункту 2, то для деякого $\varepsilon > 0$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)-(4) при $t \in [0, \varepsilon]$.*

Доведення. Виберемо довільне $\varepsilon \in (0, T]$, $\alpha > 0$, δ, $\sigma \geqslant 1$ і позначимо через $S = S_{\varepsilon,\alpha,\delta,\sigma}$ підмножину S_ε, що складається з наборів $v = \{u_i, a_{u,k}\}$, для яких виконуються такі умови:
1) функції $\big(a_{u,k}(t) - h_k(0; u_0)t\big)$ задовольняють умові Ліпшиця зі сталою α;
2) функції u_i задовольняють умові Ліпшиця по x зі сталою δ;
3) якщо $(x_j, t_j) \in G_{u,\varepsilon}$, $j = 1, 2$, причому $t_1 \neq t_2$ та

$$\left|\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} - h_k(0; u_0)\right| \leqslant \alpha, \quad |x_j - h_k(0; u_0)t_j| \leqslant \alpha t_j, \quad j = 1, 2, \tag{14}$$

а $i \in I_1^- \cup I_2^+$, то $|u_i(x_2, t_2) - u_i(x_1, t_1)| \leqslant \sigma|t_2 - t_1|$.

Множина S не порожня, якщо δ і σ достатньо великі. Дійсно, позначимо $u_{i,0\varepsilon}(x,t) = u_{i,0}$, $a_{u_{0\varepsilon},k}(t) = h_k(0; u_0)t$, $t \in [0, \varepsilon]$, $v_{0\varepsilon} = \{u_{i,0\varepsilon}, a_{u_{0\varepsilon},k}\}$,. Тоді $v_{0\varepsilon} \in S$ (у цьому можна переконатись безпосередньою перевіркою умов 1)-3)). Крім того, множина S замкнена в S_ε.

На S визначимо оператор A так: нехай $v \in S$, тоді $Av = \{A_i u, a_{Au,k}\}$, де $A_i u : G_{Au,\varepsilon} \to \mathbb{R}$, причому $G_{Au,\varepsilon}$ обмежена з боків лініями

$$a_{Au,k}(t) := \int_0^t h_k(\tau; u)\, d\tau, \quad k = 1, 2, \ 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \tag{15}$$

а значення функції $A_i u$ даються формулою

$$(A_i u)(x,t) = \omega_i(x, t; \tilde{A}u) + \int_{t_i(x,t;\tilde{A}u)}^{t} f_i\big(\varphi_i(\tau; x, t), \tau; \tilde{A}u\big) d\tau, \quad i = \overline{1,n}, \quad (x,t) \in G_{Au,\varepsilon}, \tag{16}$$

де $\tilde{A}u = \{\tilde{A}_i u\}$, а $\tilde{A}_i u$ – звуження функції $\bar{u}_i$ на $G_{Au,\varepsilon}$. Очевидно, що $t_i(x, t; \tilde{A}u) = t_i(x, t; Au)$.

З неперервності заданих функцій та функціоналів випливає, що коли $\varepsilon_0, \alpha_0 (> 0)$ достатньо малі, то при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, 0 < \alpha \leqslant \alpha_0$ в S задовольняється співвідношення (11) і тому визначення оператора A має сенс. Крім того, при $v \in S, (x,t) \in G_{u,\varepsilon}$ справедливі рівномірні оцінки $|f_i(x,t;u)| \leqslant F$, $|h_k(t;u)| \leqslant H$, $|\lambda_i(x,t)| \leqslant \Lambda$, $|\lambda_i(a_{Au,k}(t), t) - h_k(t;u)| > \gamma > 0$, причому функціонали f_i задовольняють за u та за x, функціонали h_k – за u, функції λ_i – за x, та функції g_{ik} – за всіма аргументами умові Ліпшиця зі сталими f_0, Mp, h_0, λ_0 і $\varepsilon g_0(\varepsilon)$ відповідно.

Далі будемо користуватися наслідком з умови Ліпшиця для λ_i :

$$\big|\varphi_i(\tau; x_1, t) - \varphi_i(\tau; x_2, t)\big| \leqslant |x_1 - x_2| e^{\lambda_0 |t - \tau|}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{17}$$

Встановимо умови, при яких оператор A відображає S в себе, тобто якщо $v \in S$, то для Av виконуються 1)–3).

1. Оскільки для u виконується умова 1), то $\forall t_j \in [0, \varepsilon]$, $j = 1, 2$ маємо

$$\big|a_{Au,k}(t_2) - a_{Au,k}(t_1) - h_k(0; u_0)(t_2 - t_1)\big| = \Big| \int_0^{t_2} h_k(\tau; u) d\tau - \int_0^{t_1} h_k(\tau; u) d\tau -$$

$$-h_k(0;u_0)(t_2-t_1)\Big| = \Big|\int\limits_{t_1}^{t_2} h_k(\tau;u)d\tau - h_k(0;u_0)(t_2-t_1)\Big| =$$

$$=\Big|\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{da_{u,k}(\tau)}{d\tau}d\tau - h_k(0;u_0)(t_2-t_1)\Big| = \big|a_{u,k}(t_2)-a_{u,k}(t_1)-h_k(0;u_0)(t_2-t_1)\big| \leqslant \alpha|t_2-t_1|.$$

Отже, умова 1) для Av виконується.

2. Розглянемо різні випадки:

a) $(x_j,t)\in G^{i1}_{u,\varepsilon}$ або $G^{i2}_{u,\varepsilon}$ одночасно ($j=1,2$). Нехай для визначеності $(x_j,t)\in G^{i1}_{u,\varepsilon}(i=\overline{1,p+q})$ і $x_1<x_2$, тоді $t_i(x_1,t;u)>t_i(x_2,t;u)$. Використовуючи (16) і позначення $\Delta\Phi_j=\Phi_1-\Phi_2$, маємо

$$\big|\Delta(A_iu)(x_j,t)\big| \leqslant \int\limits_{t_i(x_1,t;Au)}^{t}\big|\Delta f_i\big(\varphi_i(\tau;x_j,t),\tau;\tilde{A}u\big)\big|d\tau + \int\limits_{t_i(x_2,t;Au)}^{t_i(x_1,t;Au)}\big|f_i\big(\varphi_i(\tau;x_1,t),\tau;\tilde{A}u\big)\big|d\tau +$$
$$+\Big|\Delta g_{i1}\big(t_i(x_j,t;Au);\big(\tilde{A}_{p+q+1}u\big)\big(a_{Au,1}(t_i(x_j,t;Au)),t_i(x_j,t;Au)\big),\ldots$$
$$\ldots,\big(\tilde{A}_nu\big)\big(a_{Au,1}(t_i(x_j,t;Au)),t_i(x_j,t;Au)\big)\big)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon M\delta\big|\Delta\varphi_i(\tau;x_j,t)\big| + F\big|\Delta t_i(x_j,t;Au)\big| + \varepsilon g_0(\varepsilon)\sigma\big|\Delta t_i(x_j,t;Au)\big|.$$

Оскільки ([2])

$$\big|\Delta t_i(x_j,t;Au)\big| = \big|t_i(x_2,t;Au)-t_i(x_1,t;Au)\big| \leqslant \Big|\frac{\partial t_i(\theta,t;Au)}{\partial\theta}\Big||x_2-x_1| =$$

$$=\left|\frac{\exp\left(\int\limits_{t_i(\theta,t;Au)}^{t}\lambda'_{i\theta}\big(\varphi_i(\sigma;\theta,t),\sigma\big)\,d\sigma\right)}{\lambda_i\big(a_{Au,1}(t_i(\theta,t;Au)),t_i(\theta,t;Au)\big)-a'_{Au,1}(t_i(\theta,t;Au))}\right||\Delta x_j| \leqslant \frac{1}{\gamma}e^{\lambda_0\varepsilon}|\Delta x_j|, \tag{18}$$

то враховуючи (17), отримаємо

$$\big|\Delta(A_iu)(x_j,t)\big| \leqslant \Big(\varepsilon M\delta + \big(F+\varepsilon g_0(\varepsilon)\sigma\big)\frac{1}{\gamma}\Big)e^{\lambda_0\varepsilon}|\Delta x_j|.$$

Таким чином, якщо

$$\Big(\varepsilon_0M\delta + \big(F+\varepsilon_0g_0(\varepsilon_0)\sigma\big)\frac{1}{\gamma}\Big)e^{\lambda_0\varepsilon_0} \leqslant \delta б, \tag{19}$$

то для Av виконується умова 2).

Аналогічний результат отримаємо, коли $(x,t)\in G^{i2}_{u,\varepsilon}$, $i=\overline{p+1,n}$.

b) $(x_1,t)\in G^{i1}_{u,\varepsilon}$, $(x_2,t)\in G^{i2}_{u,\varepsilon}$, $i=\overline{p+1,p+q}$ (при інших i цей випадок збігається з випадком a)). Нехай для визначеності $x_1<x_2$, $t_i(x_1,t;Au)>t_i(x_2,t;Au)$. Тоді (див. a)):

$$\big|\Delta(A_iu)(x_j,t)\big| \leqslant \Big(\varepsilon M\delta + F\frac{1}{\gamma}\Big)e^{\lambda_0\varepsilon}|\Delta x_j| +$$
$$+\Big|g_{i1}\big(t_i(x_1,t;Au);\big(\tilde{A}_{p+q+1}u\big)\big(a_{Au,1}(t_i(x_1,t;Au)),t_i(x_1,t;Au)\big),\ldots$$

$$\ldots,(\tilde{A}_n u)\big(a_{Au,1}(t_i(x_1,t;Au)),t_i(x_1,t;Au)\big)\big)-$$
$$-g_{i2}\big(t_i(x_2,t;Au);(\tilde{A}_1 u)\big(a_{Au,2}(t_i(x_2,t;Au)),t_i(x_2,t;Au)\big),\ldots$$
$$\ldots,(\tilde{A}_p u)\big(a_{Au,2}(t_i(x_2,t;Au)),t_i(x_2,t;Au)\big)\big)\Big| \leqslant \Big(\varepsilon M\delta + F\frac{1}{\gamma}\Big)e^{\lambda_0\varepsilon}|\Delta x_j|+$$
$$+\Big|g_{i1}\big(t_i(x_2,t;Au);(\tilde{A}_{p+q+1}u)\big(a_{Au,1}(t_i(x_2,t;Au)),t_i(x_2,t;Au)\big),\ldots$$
$$\ldots,(\tilde{A}_n u)\big(a_{Au,1}(t_i(x_2,t;Au)),t_i(x_2,t;Au)\big)\big)-$$
$$-g_{i1}\big(t_i(x_3,t;Au);(\tilde{A}_{p+q+1}u)\big(a_{Au,1}(t_i(x_3,t;Au)),t_i(x_3,t;Au)\big),\ldots$$
$$\ldots,(\tilde{A}_n u)\big(a_{Au,1}(t_i(x_3,t;Au)),t_i(x_3,t;Au)\big)\big)\Big|+$$
$$+\Big|g_{i2}\big(t_i(x_3,t;Au);(\tilde{A}_1 u)\big(a_{Au,2}(t_i(x_3,t;Au)),t_i(x_3,t;Au)\big),\ldots$$
$$\ldots,(\tilde{A}_p u)\big(a_{Au,2}(t_i(x_3,t;Au)),t_i(x_3,t;Au)\big)\big)-$$
$$-g_{i2}\big(t_i(x_2,t;Au);(\tilde{A}_1 u)\big(a_{Au,2}(t_i(x_2,t;Au)),t_i(x_2,t;Au)\big),\ldots$$
$$\ldots,(\tilde{A}_p u)\big(a_{Au,2}(t_i(x_2,t;Au)),t_i(x_2,t;Au)\big)\big)\Big| \leqslant$$
$$\Big(\text{тут } (x_3,t_3)\in Q_i(0,0),\text{тоді } \big(a_{Au,j}(t_i(x_3,t;Au)),t_i(x_3,t;Au)\big)=(0,0)\Big)$$
$$\leqslant \Big(\varepsilon M\delta + F\frac{1}{\gamma}\Big)e^{\lambda_0\varepsilon}|\Delta x_j| + \varepsilon g_0(\varepsilon)\sigma\Big(|t_i(x_1,t;Au)-t_i(x_3,t;Au)| + |t_i(x_3,t;Au)-$$
$$-t_i(x_2,t;Au)|\Big) \leqslant \Big(\varepsilon M\delta + F\frac{1}{\gamma}\Big)e^{\lambda_0\varepsilon}|\Delta x_j| + \varepsilon g_0(\varepsilon)\sigma\frac{1}{\gamma}e^{\lambda_0\varepsilon}\big(|x_1-x_3|+|x_3-x_2|\big)\leqslant$$
$$\leqslant \Big(\varepsilon M\delta + \big(F+\varepsilon g_0(\varepsilon)\sigma\big)\frac{1}{\gamma}\Big)e^{\lambda_0\varepsilon}|\Delta x_j|.$$

Отже, виконання умови 2) для Av забезпечується умовою (19).

3. Нехай $(x_j,t_j)\in G_{Au,\varepsilon}$, $j=1,2$, причому $t_1<t_2$ і виконуються умови (14), а $i\in I_1^-\cup I_2^+$. Тоді отримаємо ($k=2, i\in I_2^+$)

$$\big|(A_i u)(x_1,t_1)-(A_i u)(x_2,t_2)\big| \leqslant$$
$$\leqslant \Big|\int\limits_{t_i(x_1,t_1;Au)}^{t_1}\big|f_i(\varphi_i(\tau;x_1,t_1),\tau;\tilde{A}u)\big|d\tau - \int\limits_{t_i(x_2,t_2;Au)}^{t_2}\big|f_i(\varphi_i(\tau;x_2,t_2),\tau;\tilde{A}u)\big|d\tau\Big|+$$
$$+\Big|g_{i1}\big(t_i(x_1,t_1;Au);(\tilde{A}_{p+q+1}u)\big(a_{Au,1}(t_i(x_1,t_1;Au)),t_i(x_1,t_1;Au)\big),\ldots,$$
$$\ldots,(\tilde{A}_n u)\big(a_{Au,1}(t_i(x_1,t_1;Au)),t_i(x_1,t_1;Au)\big)\big)-$$
$$-g_{i1}\big(t_i(x_2,t_2;Au);(\tilde{A}_{p+q+1}u)\big(a_{Au,1}(t_i(x_2,t_2;Au)),t_i(x_2,t_2;Au)\big),\ldots,$$
$$\ldots,(\tilde{A}_n u)\big(a_{Au,1}(t_i(x_2,t_2;Au)),t_i(x_2,t_2;Au)\big)\big)\Big| \leqslant F|t_2-t_1|+$$
$$+\varepsilon M\delta\max_{0\leqslant\tau\leqslant t_1}\big|\varphi_i(\tau;x_1,t_1)-\varphi_i(\tau;x_2,t_2)\big| + \big(F+\varepsilon g_0(\varepsilon)\sigma\big)\big|t_i(x_2,t_2;Au)-t_i(x_1,t_1;Au)\big|.$$

Враховуючи (14), маємо

$$|x_2-x_1|\leqslant(\alpha+H)|t_2-t_1|;$$

$$\big|t_i(x_2,t_2;Au)-t_i(x_1,t_1;Au)\big| \leqslant \big|t_i(x_1,t_1;Au)-t_i(x_1,t_2;Au)\big|+$$
$$+\big|t_i(x_1,t_2;Au)-t_i(x_2,t_2;Au)\big| \leqslant \left|\frac{\partial t_i(x_1,\eta;Au)}{\partial\eta}\right||t_2-t_1|+\left|\frac{\partial t_i(\theta,t_2;Au)}{\partial\theta}\right||x_2-x_1| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{\lambda_i(x_1,\eta)\exp\left(\int\limits_{t_i(x_1,\eta;Au)}^{\eta}\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x_1,\eta),\sigma)\,d\sigma\right)}{\lambda_i\big(a_l(t_i(x_1,\eta;Au)),t_i(x_1,\eta;Au)\big)-a'_l(t_i(x_1,\eta;Au))}\right||t_2-t_1|+$$
$$+\frac{\left|\exp\left(\int\limits_{t_i(\theta,t_2;Au)}^{t_2}\lambda'_{i\theta}(\varphi_i(\sigma;\theta,t_2),\sigma)\,d\sigma\right)\right||x_2-x_1|}{\big|\lambda_i\big(a_l(t_i(\theta,t_2;Au)),t_i(\theta,t_2;Au)\big)-a'_l(t_i(\theta,t_2;Au))\big|} \leqslant \frac{1}{\gamma}e^{\lambda_0\varepsilon}(\Lambda+\alpha+H)|t_2-t_1|$$

(тут $l=1$ при $(x_1,\eta)\in G^{i1}_{Au,\varepsilon}$, $l=2$ при $(x_1,\eta)\in G^{i2}_{Au,\varepsilon}$, для (θ,t_2) аналогічно);

$$\big|\varphi_i(\tau;x_2,t_2)-\varphi_i(\tau;x_1,t_1)\big| \leqslant \big|\varphi_i(\tau;x_2,t_2)-\varphi_i(\tau;x_2,t_1)\big|+$$
$$+\big|\varphi_i(\tau;x_2,t_1)-\varphi_i(\tau;x_1,t_1)\big| \leqslant \left|\frac{\partial\varphi_i(\tau;x_2,\eta)}{\partial\eta}\right||t_2-t_1|+\left|\frac{\partial\varphi_i(\tau;\theta,t_1)}{\partial\theta}\right||x_2-x_1| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\lambda_i(x_2,\eta)\exp\left(\int\limits_{\tau}^{\eta}\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x_2,\eta),\sigma)\,d\sigma\right)\right||t_2-t_1|+$$
$$+\left|\exp\left(\int\limits_{\tau}^{t_1}\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;\theta,t_1),\sigma)\,d\sigma\right)\right||x_2-x_1| \leqslant e^{\lambda_0\varepsilon}(\Lambda+\alpha+H)|t_2-t_1|.$$

Тоді

$$\big|(A_iu)(x_1,t_1)-(A_iu)(x_2,t_2)\big| \leqslant \left(F+\Big(\frac{1}{\gamma}(F+\varepsilon g_0(\varepsilon)\sigma)+\varepsilon M\delta\Big)(\Lambda+\alpha+H)e^{\lambda_0\varepsilon}\right)|t_2-t_1|.$$

Отже, якщо

$$F+\Big(\frac{1}{\gamma}(F+\varepsilon_0 g_0(\varepsilon_0)\sigma)+\varepsilon_0 M\delta\Big)(\Lambda+\alpha_0+H)e^{\lambda_0\varepsilon_0} \leqslant \sigma, \tag{20}$$

то оператор Av володіє властивістю 3).

Припустимо, що виконуються всі наведені умови, які забезпечують включення $AS\subset S$. Встановимо, коли відображення A буде стисним. Нехай $v^j\in S$ $(j=1,2)$ і $\rho(v^1,v^2)=\rho$. Тоді

$$\big|\Delta a_{Au^j,k}(t)\big| \leqslant \int\limits_0^t \big|\Delta h_k(\tau;u^j)\big|d\tau \leqslant \varepsilon h_0\rho, \quad 0\leqslant t\leqslant\varepsilon.$$

Визначимо також

$$\rho(\tilde{A}u^1,\tilde{A}u^2)=\max\{\max_{k,t}\big|a_{Au^1,k}(t)-a_{Au^2,k}(t)\big|,\max_{i,x,t}\big|\overline{\tilde{A}_iu^1}(x,t)-\overline{\tilde{A}_iu^2}(x,t)\big|\} \leqslant$$
$$\leqslant \max\{\varepsilon h_0\rho,\rho(1+\delta),\rho\big(1+\delta\varepsilon h_0\big)\}=\rho\max\{1+\delta,1+\delta\varepsilon h_0\}. \tag{21}$$

Враховуючи означення метрики в S_T, отримаємо

$$\rho(Av^1,Av^2)=\max\{\varepsilon h_0\rho,\max_{i,x,t}\big|\Delta\overline{(Au^j)}_i(x,t)\big|\}.$$

Якщо $(x,t) \in G_{Au^1,\varepsilon} \cap G_{Au^2,\varepsilon}$ і для визначеності $t_i(x,t;Au^1) < t_i(x,t;Au^2)$, $k=1$, то

$$
\begin{gathered}
\left|\Delta\overline{(Au^j)_i}(x,t)\right| = \left|\Delta(Au^j)_i(x,t)\right| \leqslant \left|\Delta \int\limits_{t_i(x,t;Au^j)}^{t} f_i(\varphi(\tau;x,t),\tau;\tilde{A}u^j)d\tau\right| + \\
+\left|\Delta g_{i1}\big(t_i(x,t;Au^j);\big(\tilde{A}_{p+q+1}u^j\big)\big(a_{Au^j,1}(t_i(x,t;Au^j)),t_i(x,t;Au^j)\big),\ldots,\right. \\
\left.\ldots,\big(\tilde{A}_n u^j\big)\big(a_{Au^j,1}(t_i(x,t;Au^j)),t_i(x,t;Au^j)\big)\big)\right| \leqslant F\left|t_i(x,t;Au^2)-t_i(x,t;Au^1)\right| + \\
+\varepsilon f_0\rho(\tilde{A}u^1,\tilde{A}u^2) + \left|\Delta g_{i1}\big(t_i(x,t;Au^1);\big(\tilde{A}_{p+q+1}u^1\big)\big(a_{Au^j,1}(t_i(x,t;Au^1)),t_i(x,t;Au^1)\big),\ldots,\right. \\
\left.\ldots,\big(\tilde{A}_n u^1\big)\big(a_{Au^j,1}(t_i(x,t;Au^1)),t_i(x,t;Au^1)\big)\big)\right| + \qquad (22) \\
+\left|\Delta g_{i1}\big(t_i(x,t;Au^j);\big(\tilde{A}_{p+q+1}u^j\big)\big(a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^j)),t_i(x,t;Au^j)\big),\ldots,\right. \\
\left.\ldots,\big(\tilde{A}_n u^j\big)\big(a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^j)),t_i(x,t;Au^j)\big)\big)\right| \leqslant F\left|t_i(x,t;Au^2)-t_i(x,t;Au^1)\right| + \\
+\varepsilon f_0\rho(\tilde{A}u^1,\tilde{A}u^2) + \varepsilon g_0(\varepsilon)\delta\left|a_{Au^1,1}(t_i(x,t;Au^1)) - a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^1))\right| + \\
+\varepsilon g_0(\varepsilon)\max\Big\{\max_{i,x,t}\left|\Delta t_i(x,t;Au^j)\right|;\ \max_{\substack{i,x,t,\\ p+g<l\leqslant n}}\left|\Delta\tilde{A}_l u^j)\big(a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^j)),t_i(x,t;Au^j)\big)\big)\right|\Big\}.
\end{gathered}
$$

З того, що

$$
\lambda_i(a_{Au^1,1}(t),t) = \frac{a_{Au^1,1}(t_i(x,t;Au^1)) - a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^2))}{t_i(x,t;Au^1)-t_i(x,t;Au^2)},
$$

випливає оцінка

$$
\begin{gathered}
\left|\lambda_i(a_{Au^1,1}(t),t)\big(t_i(x,t;Au^1)-t_i(x,t;Au^2)\big)\right| \leqslant \left|a_{Au^1,1}(t_i(x,t;Au^1)) - a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^1))\right| + \\
+\left|a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^1)) - a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^2))\right| \leqslant \varepsilon h_0\rho + h_1(t;u)\left|t_i(x,t;Au^1)-t_i(x,t;Au^2)\right|.
\end{gathered}
$$

Звідси отримаємо

$$
\left|t_i(x,t;Au^1)-t_i(x,t;Au^2)\right| \leqslant \frac{\varepsilon h_0\rho}{\left|\lambda_i(a_{Au^1,1}(t),t)-h_1(t;u)\right|} \leqslant \frac{1}{\gamma}\varepsilon h_0\rho.
$$

Тому, продовжуючи (22) і враховуючи (21), одержимо

$$
\begin{gathered}
\left|\Delta\overline{(Au^j)_i}(x,t)\right| \leqslant F\frac{1}{\gamma}\varepsilon h_0\rho + \varepsilon f_0\rho\max\{1+\delta,1+\delta\varepsilon h_0\} + \varepsilon g_0(\varepsilon)\delta\varepsilon h_0\rho + \varepsilon g_0(\varepsilon)\max\Big\{\frac{1}{\gamma}\varepsilon h_0\rho; \\
\max_{\substack{i,x,t,\\ p+g<l\leqslant n}}\Big(\left|\Delta\tilde{A}_l u^1)\big(a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^j)),t_i(x,t;Au^j)\big)\big)\right| + \left|\Delta\tilde{A}_l u^j)\big(a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^2)),t_i(x,t;Au^2)\big)\big)\right|\Big)\Big\} \leqslant \\
\leqslant\Big(\frac{F}{\gamma}+\varepsilon g_0(\varepsilon)\delta\Big)\varepsilon h_0\rho + \varepsilon f_0\rho\max\{1+\delta,1+\delta\varepsilon h_0\} + \varepsilon g_0(\varepsilon)\max\Big\{\frac{1}{\gamma}\varepsilon h_0\rho; \sigma\max_{i,x,t}\left|t_i(x,t;Au^1)-\right. \\
\left.-t_i(x,t;Au^2)\right| + \rho(\tilde{A}_l u^1,\tilde{A}_l u^2)\Big)\Big\} \leqslant \Big(\Big(\frac{F}{\gamma}+\varepsilon g_0(\varepsilon)\delta\Big)\varepsilon h_0 + \varepsilon f_0\max\{1+\delta,1+\delta\varepsilon h_0\} + \\
+\varepsilon g_0(\varepsilon)\max\Big\{\frac{1}{\gamma}\varepsilon h_0; \frac{1}{\gamma}\sigma\varepsilon h_0 + \max\{1+\delta,1+\delta\varepsilon h_0\}\Big\}\Big)\rho \leqslant
\end{gathered}
$$

$$\leqslant \left(\left(\frac{F+\sigma\varepsilon g_0(\varepsilon)}{\gamma} + \varepsilon g_0(\varepsilon)\delta \right) \varepsilon h_0 + \big(\varepsilon f_0 + \varepsilon g_0(\varepsilon)\big) \max\{1+\delta, 1+\delta\varepsilon h_0\} \right) \rho.$$

Розглянемо випадок, коли $(x,t) \in G_{Au^2,\varepsilon}$, але $(x,t) \notin G_{Au^1,\varepsilon}$. Тоді, покладаючи для визначеності $k=1$, отримаємо

$$\left|\Delta\overline{(Au^j)_i}(x,t)\right| \leqslant \left|(Au^2)_i(x,t) - (Au^1)_i(a_{Au^1,2}(t),t)\right| \leqslant \left|(Au^2)_i(x,t) - (Au^2)_i(a_{Au^1,2}(t),t)\right| +$$
$$+ \left|(Au^2)_i(a_{Au^1,2}(t),t) - (Au^1)_i(a_{Au^1,2}(t),t)\right| \leqslant \delta\left|x - a_{Au^1,2}(t)\right| + \left|\Delta(Au^j)_i(a_{Au^1,2}(t),t)\right|,$$

причому

$$\left|x - a_{Au^1,2}(t)\right| \leqslant \left|a_{Au^2,2}(t) - a_{Au^1,2}(t)\right| \leqslant \varepsilon h_0 \rho,$$

і $(a_{Au^1,2}(t),t) \in G_{Au^1,\varepsilon} \cap G_{Au^2,\varepsilon}$, тобто ми прийшли до вже розібраного випадку. Тому

$$\left|\Delta\overline{(Au^j)_i}(x,t)\right| \leqslant \delta\varepsilon h_0\rho + \left(\left(\frac{F+\sigma\varepsilon g_0(\varepsilon)}{\gamma} + \varepsilon g_0(\varepsilon)\delta \right) \varepsilon h_0 + \big(\varepsilon f_0 + \varepsilon g_0(\varepsilon)\big) \max\{1+\delta, 1+\delta\varepsilon h_0\} \right) \rho.$$

Отже, умова стиску оператора $A : S \to S$ має вигляд

$$\varepsilon_0 \left(h_0 \left(\delta + \varepsilon_0 g_0(\varepsilon_0)\big(\delta + \frac{\sigma}{\gamma}\big) + \frac{F}{\gamma} \right) + (f_0 + g_0(\varepsilon_0)) \max\{1+\delta, 1+\delta\varepsilon_0 h_0\} \right) < 1. \tag{24}$$

Покажемо тепер, що сукупність всіх умов сумісна. Справді, виберемо спочатку ε_0, α_0 так, як було сказано на початку доведення. Потім виберемо $\sigma > F + \dfrac{F(\Lambda + \alpha_0 + H)}{\gamma}$ та $\delta > \dfrac{F}{\gamma}$; зауважимо, що при цьому σ та δ можна вважати як завгодно великими. Далі при фіксованих α_0, σ, δ зменшимо ε_0 так, щоб виконувались рівності (19), (20) та (24).

Тоді за теоремою Банаха про стисні відображення в S існує єдиний розв'язок системи рівнянь (2), (12), який задовольняє умову (11), а тому v і є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4). Теорему доведено.

Зауваження 1. З доведення теореми та рівнянь (12) випливає, що $u_i(x,t)$ задовольняє умову Ліпшиця за обома змінними.

Зауваження 2. Якщо апріорі відомо, що границі сектора $G_{u,T}$ – лінійні функції, а $f_i, h_k, g_{i,k}$ також є лінійними по u, то теорема справедлива для всіх $t \in [0,T] \subset [0,\infty)$.

1. Кирилич В.М., Мышкис А.Д. *Обобщенная полулинейная гиперболическая задача Стефана на прямой.* // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, N3. – С. 497–501.
2. Кирилич В.М. Основні крайові задачі для гіперболічних рівнянь і систем на прямій. – Навч. посібн., К.: ІСДО, 1993. — 72 с.
3. Берегова Г.І., Кирилич В.М. *Гіперболічна задача Стефана в криволінійному секторі.* // Укр. мат. журнал. – 1997. – Т. 49, N12. – С. 1684–1689.
4. Avner Fridman, Bei Hu *The Stefan problem for a hyperbolic heat equition.* //Math. Anal. and Appl. – 1989. – T. 138, N1. – P. 249–259.
5. Piero Bassanini, Jan Turo *Generalized solutions to free boundary problems for hyperbolic systems of functional partial differential equations.* // Annali di Math. pura ed appl. (IV), 1990. – P. 211–230.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Наука, 1975. – Ч.1. – 631 с.

Стаття надійшла до редколегії 31.03.1998