УДК 517.95

ВИЗНАЧЕННЯ ДВОХ НЕВІДОМИХ КОЕФІЦІЄНТІВ В ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Н. В. Пабирівська

Pabyrivs'ka N.V. The determination of two unknown coefficients in the inverse problems for the parabolic equation Two inverse problems for a parabolic equation in which two unknown coefficients depend on the time variable are considered. The conditions of the existence of solutions to these problems are established by means of the Shauder's theorem. The uniqueness is proved too.

Результати дослідження обернених задач визначення двох коефіцієнтів в рівняннях параболічного типу наведені в працях [1] – [4]. Так, в [1] встановлено єдиність розв'язку оберненої задачі знаходження старшого коефіцієнта і коефіцієнта в молодшому члені для квазілінійного параболічного рівняння. Теореми існування, єдиності і стійкості розв'язку оберненої задачі для квазілінійного параболічного рівняння, де шукані коефіцієнти залежать від розв'язку рівняння, доведені в [2]. Знаходженню невідомих коефіцієнтів, які є сталими, присвячена робота [3].

У даній праці встановлено умови існування і єдиності розв'язків двох обернених задач знаходження коефіцієнта температуропровідності $a(t)$ та коефіцієнта $c(t)$ в молодшому члені параболічного рівняння.

В області $\Omega = \big\{(x,t): \quad 0<x<h, \quad 0<t<T\big\}$ розглядається рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + c(t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з невідомими коефіцієнтами $a(t)$ і $c(t)$, з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x\in[0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами і умовами перевизначення

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(h,t) = \mu_2(t), \tag{3}$$

$$u(0,t) = \nu_1(t), \quad u(h,t) = \nu_2(t), \quad t\in[0,T]. \tag{4}$$

Задача полягає в знаходженні функцій $\big(a,c,u)\big) \in C[0,T]\times C[0,T]\times C^{2,1}(\Omega)\bigcap C^{1,0}(\overline{\Omega})$, $a(t)>0$, $c(t)\leqslant 0$, $t\in[0,T]$, які задовольняють умови (1) – (4).

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35R30.

Припустимо, що коефіцієнти $a(t)$ і $c(t)$ є тимчасово відомі. Зробивши заміну $u(x,t) = W(x,t)\exp\left(\int_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$, отримаємо еквівалентну задачу:

$$W_t = a(t)W_{xx} + f(x,t)\exp\left(-\int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \quad (x,t)\in\Omega, \tag{5}$$

$$W(x,0) = \varphi(x), \quad x\in[0,h], \tag{6}$$

$$W(0,t) = \nu_1(t)\exp\left(-\int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \quad W(h,t) = \nu_2(t)\exp\left(-\int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \tag{7}$$

$$W_x(0,t) = \mu_1(t)\exp\left(-\int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \quad W_x(h,t) = \mu_2(t)\exp\left(-\int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \quad t\in[0,T]. \tag{8}$$

Використовуючи функцію Гріна [5], запишемо розв'язок прямої задачі (5), (6), (8):

$$\begin{aligned} W(x,t) = {} & \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta(t)}}\int\limits_0^h \varphi(\xi)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4\theta(t)}\Big)+\right.\\ & \left.+\exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4\theta(t)}\Big)\right)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\int\limits_0^h f(\xi,\tau)\times\\ & \times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)+\exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\right)\mathrm{d}\xi-\\ & -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{a(\tau)\mu_1(\tau)w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\mathrm{d}\tau+\\ & +\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{a(\tau)\mu_2(\tau)w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(x+(2n-1)h)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{9}$$

де

$$w(t) = \exp\left(-\int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \quad \theta(t) = \int\limits_0^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Підставляючи даний розв'язок в умови (7), приходимо до системи рівнянь стосовно невідомих $a(t)$ та $c(t)$:

$$\begin{aligned}
\nu_i(t)\exp\left(-\int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi\theta(t)}}\int\limits_0^h \varphi(\xi)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi+(2n+i-1)h)^2}{4\theta(t)}\Big)\,\mathrm{d}\xi+\\
+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\int\limits_0^h f(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi+(2n+i-1)h)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\tau-\\
-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{a(\tau)\mu_1(\tau)w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(2n+i-1)^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\tau+\\
+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{a(\tau)\mu_2(\tau)w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(2n+i)^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\tau, \quad i=1,2.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здиференціюємо дану систему рівнянь за t, скориставшись при цьому властивостями об'ємного потенціалу [6], інтегруванням частинами та тим, що

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta(t)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi+(2n+i-1)h)^2}{4\theta(t)}\Big)\right) =\\
= a(t)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta(t)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi+(2n+i-1)h)^2}{4\theta(t)}\Big)\right).
\end{aligned}$$

В результаті приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} -c(t) &=& F_1(t)+\dfrac{a(t)}{w(t)\nu_1(t)}Q_1(t),\\ -c(t) &=& F_2(t)+\dfrac{a(t)}{w(t)\nu_2(t)}Q_2(t), \end{cases} \tag{11}$$

яка еквівалентна такій системі

$$\begin{cases} a(t) &=& \dfrac{(F_2(t)-F_1(t))\nu_1(t)\nu_2(t)w(t)}{\nu_2(t)Q_1(t)-\nu_1(t)Q_2(t)},\\ -c(t) &=& F_1(t)+\dfrac{(F_2(t)-F_1(t))\nu_2(t)}{\nu_2(t)Q_1(t)-\nu_1(t)Q_2(t)}Q_1(t), \end{cases} \tag{12}$$

де

$$F_i(t) = \big(f(h(i-1),t)-\nu_i'(t)\big)/\,\nu_i(t),$$

$$Q_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\theta(t)}}\int\limits_0^h \varphi''(\xi)\exp\Big(-\frac{(\xi+(2n+i-1)h)^2}{\theta(t)}\Big)\,\mathrm{d}\xi-$$

$$
-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\mu_1'(\tau)-c(\tau)\mu_1(\tau)-f_x(0,\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}w(\tau)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(2n+i-1)^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\tau+
$$

$$
+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\mu_2'(\tau)-c(\tau)\mu_2(\tau)-f_x(h,\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}w(\tau)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(2n+i)^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\tau+
$$

$$
+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,\mathrm{d}\tau\int\limits_0^h f_{\xi\xi}(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi+(2n+i-1)h)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\xi.
$$

Припустимо, що виконуються умови

$$
\begin{gathered}
\frac{f(0,t)-\nu_1'(t)}{\nu_1(t)}\geqslant 0,\quad \frac{\nu_1'(t)-f(0,t)}{\nu_1(t)}-\frac{\nu_2'(t)-f(h,t)}{\nu_2(t)}>0,\\
\mu_1'(t)-f_x(0,t)\leqslant 0,\quad \mu_2'(t)-f_x(h,t)\geqslant 0,\\
\mu_1(t)\leqslant 0,\quad \mu_2(t)\geqslant 0,\quad \nu_1(t)>0,\quad \nu_2(t)<0,\quad t\in[0,T];\\
\varphi''(x)>0,\quad x\in[0,h],\quad f_{xx}(x,t)\geqslant 0,\quad (x,t)\in\Omega.
\end{gathered}\tag{13}
$$

Ці умови, виходячи з (12), гарантують недодатність $c(t)$ та додатність $a(t)$.

Встановимо оцінки розв'язків системи (12). Для їх отримання необхідно мати оцінку $w(t)$ зверху. Із системи (10) приходимо до рівняння

$$
w(t)=\frac{1}{\nu_1(t)-\nu_2(t)}\Bigg[\frac{1}{\sqrt{\pi\theta(t)}}\int\limits_0^h\varphi(\xi)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\exp\Big(-\frac{(\xi+nh)^2}{4\theta(t)}\Big)\,\mathrm{d}\xi+
$$

$$
+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,\mathrm{d}\tau\int\limits_0^h f(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\exp\Big(-\frac{(\xi+nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\xi-
$$

$$
-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{(\mu_1(\tau)+\mu_2(\tau))a(\tau)w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\tau\Bigg].
$$

Припустивши, що виконуються умови

$$
\begin{gathered}
\varphi(x)-\varphi(h-x)\geqslant 0,\quad x\in[0,h/2],\\
f(x,t)-f(h-x,t)\geqslant 0,\quad (x,t)\in[0,h/2]\times[0,T],\\
\mu_1(t)+\mu_2(t)\leqslant 0,\quad t\in[0,T],
\end{gathered}\tag{14}
$$

перепишемо останнє рівняння у вигляді

$$
w(t)=\frac{1}{\nu_1(t)-\nu_2(t)}\Bigg[\frac{1}{\sqrt{\pi\theta(t)}}\int\limits_0^{h/2}(\varphi(\xi)-\varphi(h-\xi))\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\exp\Big(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\theta(t)}\Big)\,\mathrm{d}\xi+
$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,\mathrm{d}\tau \int\limits_0^{h/2}\big(f(\xi,\tau)-f(h-\xi,\tau)\big)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\exp\Big(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\xi-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\big(\mu_1(\tau)+\mu_2(\tau)\big)a(\tau)w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\tau\Bigg].$$

Оцінюючи звідси $w(t)$ зверху, отримаємо нерівність

$$w(t)\leqslant C_1+C_2\int\limits_0^t w(\tau)\,\mathrm{d}\tau+C_3\int\limits_0^t\frac{a(\tau)w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,\mathrm{d}\tau, \tag{15}$$

де $C_1, C_2, C_3>0$ – константи, що залежать від вихідних даних.

Зауваження. Константи C_i, $i=\overline{4,20}$, що зустрічатимуться в подальшому доведенні, також залежатимуть лише від вихідних даних.

Поклавши $t=\sigma$ в (15), помноживши на вираз $\dfrac{a(\sigma)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}$ та зінтегрувавши за σ від 0 до t, приходимо до нерівності

$$w(t)\leqslant C_1+2C_1C_3\sqrt{\theta(t)}+\left(C_2+C_3^2\pi+2C_2C_3\sqrt{\theta(t)}\right)\int\limits_0^t\big(1+a(\tau)\big)w(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{16}$$

Це нерівність такого типу

$$k(t)\leqslant p(t)+b(t)\int\limits_0^t q(\tau)k(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

З цієї нерівності за допомогою міркувань, аналогічних до тих, що наведені при доведенні леми 2.6 [7], приходимо до нерівності

$$k(t)\leqslant p(t)+b(t)\int\limits_0^t p(\sigma)q(\sigma)\exp\left(\int\limits_0^t b(\tau)q(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\sigma.$$

Тоді з (16) випливає оцінка

$$w(t)\leqslant\lambda\big(\theta(t)\big), \tag{17}$$

де

$$\lambda\big(\theta(t)\big)=C_1+2C_1C_3\sqrt{\theta(t)}+\big(C_2+C_3^2\pi+2C_2C_3\sqrt{\theta(t)}\big)\big(C_1+2C_1C_3\sqrt{\theta(t)}\big)\times$$
$$\times\big(T+\theta(t)\big)\exp\big((C_2+C_3^2\pi+2C_2C_3\sqrt{\theta(t)})(T+\theta(t))\big).$$

З першого рівняння системи (12) оцінимо зверху $a(t)$, для цього знаменник оцінимо його першим доданком:

$$a(t)\leqslant\frac{\max\big(F_2(t)-F_1(t)\big)\max\big(-\nu_2(t)\big)}{\min\limits_{[0,h]}\varphi''(x)}w(t).$$

Використовуючи (17), з останньої нерівності матимемо

$$a(t) \leqslant C_4 \lambda\big(\theta(t)\big). \tag{18}$$

Звідси

$$\int_0^t \frac{a(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\lambda\big(\theta(\tau)\big)} \leqslant C_4 t.$$

Позначимо

$$\int_0^s \frac{\mathrm{d}z}{\lambda(z)} = r(s).$$

Оскільки функція $r(s)$ є монотонно спадною і область її значень обмежена, то існує функція $r^{-1}(s)$, обернена до $r(s)$ і визначена на підмножині області значень функції $r(s)$, тобто на проміжку $[0, C_4 t_0]$, де $0 < t_0 \leqslant T$ і $C_4 t_0 \leqslant \max\limits_s r(s)$. Тоді

$$\theta(t) \leqslant r^{-1}\left(C_4 t\right) \leqslant r^{-1}\left(C_4 t_0\right) = C_5.$$

Використовуючи останню оцінку, з (17) та (18) отримаємо

$$w(t) \leqslant \alpha\big(\theta(t)\big) \leqslant \alpha(C_5) = C_6, \tag{19}$$

$$a(t) \leqslant C_4 \alpha\big(\theta(t)\big) \leqslant C_4 \alpha(C_5) = A_1. \tag{20}$$

Оскільки $w(t) = \exp\Big(-\int_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)$, то

$$-\int_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqslant \ln C_6 = C_7. \tag{21}$$

Оцінимо зверху $-c(t)$ з першого рівняння системи (11):

$$-c(t) \leqslant C_8 + C_9 a(t) \int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} + C_{10} a(t) \int_0^t \frac{\big(-c(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}.$$

Покладемо в останній нерівності $t = \sigma$, домножимо на вираз $1 \Big/ \sqrt{\theta(t) - \theta(\sigma)}$ та зінтегруємо за σ від 0 до t. Змінюючи в двох останніх інтегралах отриманої нерівності порядок інтегрування та враховуючи (20), (21), отримаємо

$$\int_0^t \frac{\big(-c(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \leqslant C_{11} + C_{12} \int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}. \tag{22}$$

Використовуючи (20), (22), приходимо до оцінки

$$-c(t) \leqslant C_{13} + C_{14} \int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}. \tag{23}$$

З першого рівняння системи (12) оцінимо $a(t)$ знизу:

$$a(t) \geqslant C_{15} \left(C_{16} + C_{17} \int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\sigma)}} + C_{18} \int\limits_0^t \frac{\big(-c(\sigma)\big)\,\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\sigma)}} \right)^{-1}.$$

Використовуючи (23) та оцінюючи $a(t)$ знизу $\min\limits_{[0,T]} a(t)$, приходимо до нерівності

$$\min_{[0,t_0]} a(t) \geqslant \frac{C_{15}}{C_{19} + \dfrac{C_{20}\sqrt{t_0}}{\sqrt{\min\limits_{[0,t_0]} a(t)}}}.$$

Розв'язавши дану нерівність, отримаємо оцінку $a(t)$ знизу:

$$a(t) \geqslant A_0 > 0, \quad t \in [0, t_0]. \tag{24}$$

Повертаючись до (23) та враховуючи (24), приходимо до оцінки $-c(t)$ зверху:

$$-c(t) \leqslant C_{13} + \frac{C_{14}}{A_0}\sqrt{t_0} = C_{01}, \quad t \in [0, t_0].$$

Перепишемо систему (12) в такому вигляді

$$\overline{b}(t) = \overline{P}\big(\overline{b}(t)\big),$$

де

$$\overline{P} = \big(P_1(a,-c)(t), P_2(a,-c)(t)\big), \quad \overline{b}(t) = \big(a(t), -c(t)\big).$$

Для дослідження цієї системи застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Множина $\Phi = \big\{\big(a(t), -c(t)\big)\colon a(t), c(t) \in C[0,t_0],\ A_0 \leqslant a(t) \leqslant A_1,\ C_0 \leqslant -c(t) \leqslant C_{01}\big\}$ – опукла і обмежена в просторі $C[0,t_0] \times C[0,t_0]$.

Щоб показати, що оператор $\overline{P}:\ \Phi \to \Phi$ є цілком неперервним, потрібно для довільних $\big(a(t), -c(t)\big) \in \Phi$ встановити оцінки

$$|P_1(t+\delta) - P_1(t)| < \varepsilon, \quad |P_2(t+\delta) - P_2(t)| < \varepsilon$$

на проміжку $[0, t_0]$ з деяким $\delta > 0$.

Доведення аналогічних оцінок проведено в [7]. Спираючись на це, можемо стверджувати, що оператор $\overline{P}:\ \Phi \to \Phi$ – цілком неперервний.

Виконуються всі умови теореми Шаудера, отже, існує розв'язок рівняння $\overline{b}(t) = \overline{P}\big(\overline{b}(t)\big)$, а звідси – задачі (1) – (4). Отже, правильна теорема.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*
1) $\nu_i, \mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2$; $\varphi \in C^2[0,h]$, $f \in C^{2,0}(\overline{\Omega})$;
2) умови (13), (14);
3) умови узгодженості $\nu_1(0) = \varphi(0)$, $\nu_2(0) = \varphi(h)$, $\mu_1(0) = \varphi'(0)$, $\mu_2(0) = \varphi'(h)$.
Тоді розв'язок задачі (1) - (4) існує при $x \in [0,h]$, $t \in [0,t_0]$, $0 < t_0 \leqslant T$.

Встановимо єдиність розв'язку. Припустимо, що існує два розв'язки даної задачі $\big(a_i(t),\ c_i(t),\ u_i(x,t)\big)$, $i = 1,2$. Для їх різниці $d(t) = a_1(t) - a_2(t)$, $r(t) = c_1(t) - c_2(t)$, $V(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ отримаємо задачу

$$V_t = a_1(t)V_{xx} + c_1(t)V + d(t)u_{2xx} + r(t)u_2, \quad (x,t) \in \Omega, \tag{25}$$

$$V(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \tag{26}$$

$$V(0,t) = 0, \quad V(h,t) = 0, \tag{27}$$

$$V_x(0,t) = 0, \quad V_x(h,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{28}$$

Зробивши в задачі (25), (26), (28) заміну $v(x,t) = V(x,t)\exp\left(\int_0^t c_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$ і використавши для розв'язку отриманої задачі формулу (9), підставимо його в умови (27). В результаті прийдемо до системи рівнянь

$$\int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}} \int\limits_0^h \big(d(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau) + r(\tau)u_2(\xi,\tau)\big)\times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{(\xi + (2n+i-1)h)^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\xi = 0, \quad i = 1,2.$$

Диференціюючи дану систему за t, прийдемо до системи однорідних інтегральних рівнянь Вольтера другого роду. Для єдиності розв'язку таких систем потрібно, щоб виконувалась умова:

$$u_{2xx}(0,t)u_2(h,t) - u_{2xx}(h,t)u_2(0,t) \neq 0, \quad t \in [0,T].$$

З рівняння (1) та умов (3), обчисливши $u_{2xx}\big((i-1)h,t\big)$, $u_2\big((i-1)h,t\big)$, $i = 1,2$, отримаємо

$$\frac{1}{a_2(t)}\big(\nu_1'(t) - c_2(t)\nu_1(t) - f(0,t)\big)\nu_2(t) - \frac{1}{a_2(t)}\big(\nu_2'(t) - c_2(t)\nu_2(t) - f(h,t)\big)\nu_1(t) =$$
$$= \frac{1}{a_2(t)}\big(\nu_1'(t)\nu_2(t) - \nu_2'(t)\nu_1(t) - f(0,t)\nu_2(t) + f(h,t)\nu_1(t)\big) \neq 0.$$

Отже, $d(t) = r(t) \equiv 0$ на $[0,T]$, а звідси і $V(x,t) = 0$ в Ω. Таким чином, доведено теорему єдиності.

Теорема 2. *Розв'язок задачі (1) - (4) єдиний, якщо при* $t \in [0,T]$ *виконується умова*

$$\nu_1'(t)\nu_2(t) - \nu_2'(t)\nu_1(t) - f(0,t)\nu_2(t) + f(h,t)\nu_1(t) \neq 0.$$

Доведення. Розглянемо задачу (1), (2), (4) з умовами перевизначення:

$$a(t)u_x(0,t) = \mu(t), \quad \int\limits_0^h u(x,t)\,\mathrm{d}x = \chi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{29}$$

Задача (1), (2), (4), (29) зводиться до системи рівнянь

$$\begin{cases} a(t) &= \mu(t)w(t)/Q_1(t), \\ -c(t) &= \left(F(t) + \mu(t)\dfrac{Q_2(t)}{Q_1(t)}\right)\Big/\chi(t), \end{cases}$$

де

$$w(t) = \exp\left(-\int\limits_0^1 c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \quad F(t) = -\chi'(t) - \mu(t) + \int\limits_0^h f(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

$$Q_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\theta(t)}}\int\limits_0^h \varphi'(\xi)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi-(2n+i-1)h)^2}{4\theta(t)}\Big)\,\mathrm{d}\xi +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\int\limits_0^h f_\xi(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi+(2n+i-1)h)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\xi -$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)\big(\nu_1'(\tau)-c(\tau)\nu_1(\tau)-f(0,\tau)\big)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(2n+i-1)^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\tau +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)\big(\nu_2'(\tau)-c(\tau)\nu_2(\tau)-f(h,\tau)\big)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(2n+i)^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\tau, \quad i=1,2.$$

Користуючись методом, вказаним при розв'язуванні задачі (1) – (4), можна довести, що правильна теорема.

Теорема 3. *Припустимо, що виконуються умови:*
1) $\nu_i, \chi \in C^1[0,T]$, $i=1,2$; $\mu \in C[0,T]$, $\varphi \in C^1[0,h]$, $f \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$;
2) $\mu(t) > 0$, $f(0,t) - \nu_1'(t) \geqslant 0$, $\nu_1(t) \leqslant 0$, $\nu_2(t) \geqslant 0$, $\nu_2'(t) - f(h,t) \geqslant 0$, $\nu_1(t) + \nu_2(t) \geqslant 0$, $\chi(t) > 0$, $\chi'(t) + \mu(t) \leqslant 0$, $t \in [0,T]$; $\varphi(x) > 0$, $x \in (0,h]$, $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0,h]$, $f(x,t) \geqslant 0$, $f_x(x,t) \geqslant 0$, $(x,t) \in \Omega$;
3) $\nu_1(0) = \varphi(0) = 0$, $\nu_2(0) = \varphi(h)$, $\int_0^h \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \chi(0)$.

Тоді розв'язок задачі (1), (2), (4), (29) існує при $x \in [0,h]$, $t \in [0,t_0]$, *де число* t_0, $0 < t_0 < T$, *визначається вихідними даними задачі, і він єдиний в області* $\overline{\Omega}$.

1. Музылёв Н.П. *О единственности решения одной обратной задачи нелинейной теплопроводности*// Журнал выч. мат. и мат. физики.– 1985.– Т.25. № 9.– С. 1346-1352.
2. Искендеров А.Д. *Об обратной задаче для квазилинейных параболических уравнений* // Дифференц. уравнения.– 1974.– Т.10. № 5.– С. 890-898.
3. Іванчов М.І., Лучко І.Я. *Про одну обернену задачу знаходження коефіцієнтів параболічного рівняння* // Вісник Львівського університету.– 1990.– Випуск 34.– С. 7-10.
4. Искендеров А.Д. *Регуляризация одной многомерной обратной задачи и ее оптимизационной постановки* // ДАН АзССР.– 1984.– Т.40. № 9.– С. 11-15.
5. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики.– М.: Высшая школа, 1970.– 710 с.
6. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа.– М.: Мир, 1967.– 428 с.
7. Іванчов М.І. Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами.– Київ., 1995.– 84 с.– (Препринт /ІСДО).

Стаття надійшла до редколегії 24.04.1998