УДК 517.927.25

СПЕКТРАЛЬНА ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Н.О. Бабич, Ю.Д. Головатий

Babych N. O., Golovatyj Yu. D. On Neumann spectral problem for a singular perturbed differential operator of the forth order. The influence of the concentrated mass (which is relatively big) on the characteristic frequencies and eigenfunctions of an elastic rod was studied. In our case the components of a rod have same elastic properties but essentially different densities. The description of the experimentally known effect of the local oscillations of the rod in perturbed domain has been done. The estimates are obtained for the remainder terms of the asymptotic expansions.

Розвиток нових технологій, які дозволяють створювати композитні матеріали із новими властивостями, що не є притаманні їх окремим складовим, спричинив появу математичної теорії сильно неоднорідних середовищ. Можливість практичного створення композитних матеріалів, в яких частини суттєво відрізняються густиною, але мають подібні пружні властивості, викликала необхідність вивчення подібних моделей, зокрема їх спектральних властивостей.

Нами досліджено задачу на власні коливання композитного стержня з локальним збуренням густини. Вдалося отримати математичний опис відомого з експериментів явища локальних коливань Е. Санчез-Паленсія [1,2], коли власні форми коливань зосереджені в околі області збурення густини і швидко згасають поза ним. Зауважимо, що повне дослідження даної задачі полягає у вивченні як ефектів локальних так і глобальних коливань, які властиві такій моделі. У праці вивчено лише локальні коливання. Системи із локальним збуренням густини вивчались у працях [3-8]. Модель, що відповідає коливанням закріпленого стержня, досліджено в праці [6]. Відмінність даної задачі полягає у присутності нетривіального ядра збуреної задачі, що приводить до зміни методів дослідження.

1. Формулювання задачі. Нехай інтервал дійсної прямої $\Omega = (a, b)$ містить початок координат, а функція ρ_ε має вигляд: $\rho_\varepsilon(x) = p(x) + \varepsilon^{-m} q(x/\varepsilon)$, де p і q задовольняють умовам: $p(x) > 0$, $x \in \overline{\Omega}$, $q(\xi) > 0$, $\xi \in [-1; 1]$ і $q(\xi) = 0$, $\xi \notin [-1; 1]$, функції p і q – обмежені та вимірні на Ω та [-1,1] відповідно. Тут ε – малий додатний параметр, $m \in \mathbb{R}$. Розглянемо задачу на власні значення

$$(k(x)u_\varepsilon'')'' - \lambda_\varepsilon \rho_\varepsilon(x) u_\varepsilon = 0, \qquad x \in \Omega = (a, b), \tag{1}$$

$$u_\varepsilon''(a) = (ku_\varepsilon'')'(a) = 0, \quad u_\varepsilon''(b) = (ku_\varepsilon'')'(b) = 0, \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47A75, 35B25.

де коефіцієнт $k(x)$ є обмеженою вимірною функцією на Ω і $k(x) > 0$ в $\overline{\Omega}$, λ_ε – спектральний параметр.

Для усіх дійсних m ми вивчатимемо асимптотичну поведінку при $\varepsilon \to 0$ власних значень λ_ε та власних функцій u_ε задачі (1),(2).

Нехай $H^2(\Omega)$ – простір Соболєва із скалярним добутком $(u, v) = \int_\Omega (ku''v'' + puv)\, dx$ та нормою $\|u\|_2 = (u, u)^{1/2}$. Введемо на цьому просторі додатно визначену білінійну форму $a_\varepsilon(u, v) = \int_\Omega (ku''v'' + \rho_\varepsilon uv)\, dx$, $\varepsilon > 0$. У просторі $L_2(\Omega)$ із скалярним добутком $(u, v)_0 = \int_\Omega p(x)uv\, dx$ задамо також форму $b_\varepsilon(u, v) = \int_\Omega \rho_\varepsilon(x)uv\, dx$.

Означення 1. *Число λ_ε та ненульову функцію $u_\varepsilon(x) \in H^2(\Omega)$ будемо називати власним значенням та власною функцією задачі (1),(2), якщо вони задовольняють інтегральну тотожність*

$$\int_\Omega (k(x)u_\varepsilon''\varphi'' - \lambda_\varepsilon \rho_\varepsilon(x)u_\varepsilon\varphi)\, dx = 0, \quad \varphi \in H^2(\Omega).$$

Для всіх $\varepsilon > 0$ задача (1),(2) має власне значення $\lambda_\varepsilon = 0$, якому відповідає двовимірний власний підпростір лінійних функцій. Надалі ми будемо досліджувати лише ненульові власні значення задачі $0 < \lambda_\varepsilon^1 < \lambda_\varepsilon^2 < \dots < \lambda_\varepsilon^k < \dots$, $\quad \lambda_\varepsilon^k \to \infty$, $k \to \infty$. Відповідні власні функції u_ε^k нормуємо в просторі $H^2(\Omega)$.

Означення 2. *Послідовність A_m лінійних неперервних компактних операторів в сепарабельному гільбертовому просторі H будемо називати компактно збіжною до оператора A при $m \to \infty$, якщо:*

1) $A_m u \to Au$ сильно в H для всіх $u \in H$;

2) для кожної послідовності u_m, такої, що $u_m \in H$, $\|u_m\| \leqslant 1$ послідовність $A_m u_m$ компактна.

Відомо [4], що коли послідовність компактних фредгольмових операторів B_ε компактно збігається при $\varepsilon \to 0$ до самоспряженого компактного оператора B, то різниця власних значень та розхил між відповідними власними підпросторами операторів B_ε і B оцінюється величиною $\|B_\varepsilon - B\|$.

Введемо позначення $p_k = \int\limits_\Omega p(x)x^k\, dx$, $q_k = \int\limits_{-1}^{1} q(\xi)\xi^k\, d\xi$, де $k = 0, 1, 2$.

Лема 1. [7] *Для функцій $u, v \in H^2(\Omega)$ правильні оцінки*

$$\left|\varepsilon^{-1}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon)u(x)\, dx - q_0 u(0)\right| \leqslant C\,\varepsilon\|u\|_2,$$

$$\left|\varepsilon^{-3}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon)uv\, dx - q_2 u'(0)v'(0)\right| \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|u\|_2\|v\|_2, \quad \text{де } u(0) = v(0) = 0, \tag{3}$$

$$\left|\varepsilon^{-1}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon)uv\, dx\right| \leqslant C\varepsilon^3\|u\|_2\|v\|_2, \quad \text{коли } u(0) = u'(0) = v(0) = v'(0) = 0.$$

У задачі (1), (2) проведемо заміну спектрального параметра $\mu_\varepsilon = 1 + \lambda_\varepsilon$. Тоді вона матиме вигляд

$$\begin{gathered} (k(x)u_\varepsilon'')'' + \rho_\varepsilon(x)u_\varepsilon = \mu_\varepsilon \rho_\varepsilon(x)u_\varepsilon, \qquad x \in \Omega, \\ u_\varepsilon''(a) = (ku_\varepsilon'')'(a) = 0, \quad u_\varepsilon''(b) = (ku_\varepsilon'')'(b) = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Нехай оператор $A_\varepsilon : H^2(\Omega) \to H^2(\Omega)$ кожній функції $f \in H^2(\Omega)$ ставить у відповідність узагальнений розв'язок $y_\varepsilon = A_\varepsilon f$ крайової задачі

$$\begin{gathered} (k(x)y_\varepsilon'')'' + \rho_\varepsilon(x)y_\varepsilon = \rho_\varepsilon(x)f, \qquad x \in \Omega, \\ y_\varepsilon''(a) = (ky_\varepsilon'')'(a) = 0, \quad y_\varepsilon''(b) = (ky_\varepsilon'')'(b) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Очевидно, що цей оператор обмежений і самоспряжений щодо скалярного добутку $a_\varepsilon(\cdot,\cdot)$, а також компактний. Крім того, $a_\varepsilon(A_\varepsilon u, v) = b_\varepsilon(u, v)$. Відповідні власні функції u_ε^k утворюють ортонормовану базу в $H^2(\Omega)$.

2. Асимптотична поведінка власних значень та власних функцій у випадках $m < 1$ і $m = 1$. Для таких значень параметра m сім'я операторів A_ε є рівномірно обмежена при $\varepsilon \to 0$. Поведінка спектру коливної системи (1), (2) у цьому випадку узгоджується з класичними результатами теорії коливних систем з приєднаними масами [3].

При $m < 1$ розглянемо компактний оператор $A : H^2(\Omega) \to H^2(\Omega)$, який функції f ставить у відповідність розв'язок $y = Af$ задачі

$$\begin{gathered} (k(x)y'')'' + p(x)y = p(x)f, \qquad x \in \Omega, \\ y''(a) = (ky'')'(a) = 0, \quad y''(b) = (ky'')'(b) = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Доведемо, що при $m < 1$ цей оператор є рівномірною границею операторів A_ε. Справді

$$|((A_\varepsilon - A)u, v)| = |b_\varepsilon(u, v) - (u, v)_{L_2(\Omega)}| + \left|\varepsilon^{-m} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon) A_\varepsilon u v \, dx\right| =$$

$$= \left|\varepsilon^{-m} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon) u v \, dx\right| + \left|\varepsilon^{-m} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon) A_\varepsilon u v \, dx\right| \leqslant C\varepsilon^{1-m} \|u\|_2 \|v\|_2.$$

Тобто, $\|A_\varepsilon - A\| \leqslant C\varepsilon^{1-m}$. Тому $A_\varepsilon \to A$ рівномірно при $\varepsilon \to 0$, а, отже, правильна і компактна збіжність цієї сім'ї в сенсі означення 2.

Теорема 1. *($m < 1$) Власні значення та власні функції задачі (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ збігаються до власних значень λ та власних функцій u задачі*

$$\begin{gathered} (k(x)u'')'' - \lambda p(x)u = 0, \qquad x \in \Omega, \\ u''(a) = (ku'')'(a) = 0, \quad u''(b) = (ku'')'(b) = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

і правильні оцінки

$$|\lambda_\varepsilon^i - \lambda^i| \leqslant C_i \, \varepsilon^{1-m}, \quad \|u_\varepsilon^i - u^i\|_2 \leqslant C \, \varepsilon^{1-m}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Вивчимо випадок $m = 1$. Введемо у просторі $H^2(\Omega)$ білінійні форми

$$a_0(u,v) = \int\limits_\Omega (ku''v'' + puv)\,dx + q_0u(0)v(0), \quad b(u,v) = \int\limits_\Omega puv\,dx + q_0u(0)v(0).$$

Нехай $\Omega_0 = (a,0) \cup (0,b)$, а оператор $A : H^2(\Omega) \to H^2(\Omega)$ "розв'язує" таку задачу

$$\begin{gathered}(k(x)y'')'' + p(x)y = p(x)f, \quad x \in \Omega_0,\\ y''(a) = (ky'')'(a) = 0, \quad y''(b) = (ky'')'(b) = 0,\\ [y]_{x=0} = [y']_{x=0} = [k(x)y'']_{x=0} = 0, \quad [(k(x)y'')']_{x=0} = q_0(y(0) - f(0)),\end{gathered}$$

якій відповідає інтегральна тотожність $a_0(y,\varphi) = b(y,\varphi)$, $\varphi \in H^2(\Omega)$. Цей оператор є граничним при $\varepsilon \to 0$ для сім'ї A_ε, коли $m = 1$.

Для оцінки норми оператора $A_\varepsilon - A$ скористаємося нерівностями леми 1:

$$|a_0((A_\varepsilon - A)u, v)| \leqslant \left|\varepsilon^{-1}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon)A_\varepsilon uv\,dx - q_0(A_\varepsilon u)(0)v(0)\right| +$$

$$+\left|\varepsilon^{-1}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon)uv\,dx - q_0u(0)v(0)\right| \leqslant C\,\varepsilon\,\|u\|_2\|v\|_2.$$

Тому $A_\varepsilon \to A$ рівномірно при $\varepsilon \to 0$, а, отже, і компактно.

Теорема 2. *($m = 1$) Власні значення λ_ε та власні функції u_ε задачі (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ збігаються до власних значень λ та власних функцій u задачі*

$$\begin{gathered}(k(x)u'')'' - \lambda p(x)u = 0, \qquad x \in \Omega_0,\\ u''(a) = (ku'')'(a) = 0, \quad u''(b) = (ku'')'(b) = 0,\\ [u]_{x=0} = [u']_{x=0} = [k(x)u'']_{x=0} = 0, \quad [(k(x)u'')']_{x=0} - \lambda q_0u(0) = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

і правильні оцінки

$$|\lambda_\varepsilon^i - \lambda^i| \leqslant C_i\,\varepsilon, \quad \|u_\varepsilon^i - u^i\|_2 \leqslant C\,\varepsilon, \quad i = 1,2,\ldots.$$

3. Поведінка спектру задачі (1), (2) для $1 < m < 3$, $m = 3$ та $3 < m < 4$. Ці випадки відповідають ситуації так званих помірно сингулярних задач, коли сім'я операторів A_ε ще залишається обмеженою на деякому замкненому підпросторі.

Нехай B_ε – сім'я компактних операторів у сепарабельному гільбертовому просторі H. Нехай також для всіх ε одиниця є власним значенням оператора B_ε з власним підпростором V. Для кожного замкненого підпростору V_1 із V правильне зображення $H = V_1 \oplus \mathcal{H}$. У просторі $\mathcal{H}$ розглянемо оператор $D_\varepsilon = PB_\varepsilon$, де P – проектор на $\mathcal{H}$. Тоді очевидно, що власному значенню та власній функції λ_ε, u_ε оператора B_ε відповідають власне значення λ_ε та власна функція $v_\varepsilon = Pu_\varepsilon$ оператора D_ε при умові, що $v_\varepsilon \not\equiv 0$. І, навпаки, кожній парі λ_ε та v_ε відповідає пара λ_ε та $u_\varepsilon = v_\varepsilon + \dfrac{1}{\lambda_\varepsilon - 1}(I - P)A_\varepsilon v_\varepsilon$, коли $\lambda_\varepsilon \neq 1$.

Нехай D_ε і B є операторами з простим спектром. Позначимо відповідні їм системи власних значень і нормованих власних функцій $\{\lambda_\varepsilon^k, v_\varepsilon^k\}_{k=1}^\infty$, $\{\lambda^k, u^k\}_{k=1}^\infty$.

Лема 2. *Якщо оператори B і D_ε компактні та фредгольмові, $D_\varepsilon \to B$ компактно при $\varepsilon \to 0$, причому $\|D_\varepsilon - B\| + \|(I-P)B_\varepsilon P\| \leqslant C\varepsilon^\gamma$, то для таких n, що $\lambda_\varepsilon^n \leqslant \theta < 1$ виконується*

$$|\lambda_\varepsilon^n - \lambda^n| \leqslant C\varepsilon^\gamma, \qquad \|u_\varepsilon^n - u^n\|_H \leqslant C\varepsilon^\gamma. \tag{9}$$

Доведення. Зауважимо, що коли v_ε^n – власна функція оператора D_ε, то $\|v_\varepsilon^n - u^n\|_H \leqslant C\varepsilon^\gamma$. Оскільки

$$\|v_\varepsilon^n - u^n\|_H \geqslant \|u_\varepsilon^n - u^n\|_H - \frac{1}{|\lambda_\varepsilon^n - 1|}\|(I-P)B_\varepsilon v_\varepsilon^n\|_H \geqslant$$
$$\geqslant \|v_\varepsilon^n - u^n\|_H - C\varepsilon^\gamma \frac{1}{|\lambda_\varepsilon^n - 1|} \geqslant \|v_\varepsilon^n - u^n\|_H - C\varepsilon^\gamma \frac{1}{1-\theta},$$

то виконується друга нерівність (9). Лему доведено.

Вивчимо поведінку власних значень та власних функцій задачі (4) для $m \in (1,3)$. Застосуємо лему 2, коли $H = H^2(\Omega)$, $B_\varepsilon = A_\varepsilon$, $\mathcal{H} = \{u \in H^2(\Omega) : u(0) = 0\}$ та $Pu = u(x) - u(0)$. Згідно з нерівністю (3), отримуємо

$$\|A_\varepsilon f\|_2 \leqslant b_\varepsilon(f,f)^{1/2} \leqslant (C_1 + C_2\varepsilon^{3-m})\|f\|_2, \qquad f \in \mathcal{H}.$$

Нехай функція φ тотожно дорівнює 1 в околі нуля і $\|\varphi\|_2 = 1$. Підставивши φ в інтегральну тотожність для задачі (5), отримаємо

$$\varepsilon^{-m}\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon)y_\varepsilon\,dx\right| \leqslant (C_1 + C_2\varepsilon^{2-m})\|f\|_2, \quad f \in \mathcal{H},$$

звідки

$$|(A_\varepsilon f)(0)| \leqslant (C_1\varepsilon^{m-1} + C_2\varepsilon)\|f\|_2, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Нехай оператор A для кожного $f \in \mathcal{H}$ розв'язує задачу

$$(k(x)u'')'' + p(x)u = p(x)f, \ \ x \in \Omega_0,$$
$$u''(a) = (ku'')'(a) = 0, \ \ u''(b) = (ku'')'(b) = 0, \ \ u(0) = 0, \quad [u']_{x=0} = [u'']_{x=0} = 0.$$

Для функцій із $\mathcal{H}$ правильна оцінка

$$|((D_\varepsilon - A)u, v)| \leqslant |(A_\varepsilon u, v) - (Au, v)| + C_1|(A_\varepsilon u)(0)|\|v\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^{-m}\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon)A_\varepsilon uv\,dx\right| + |b_\varepsilon(u,v) - (u,v)_{L_2(\Omega)}| + C_1|(A_\varepsilon u)(0)|\|v\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant C(\varepsilon^{m-1} + \varepsilon^{3-m})\|u\|_2\|v\|_2.$$

Оскільки $D_\varepsilon \to A$ компактно при $\varepsilon \to 0$, то виконуються всі умови леми 2.

Теорема 3. *$(1 < m < 3)$ Для власних значень λ_ε та власних функцій u_ε задачі (1), (2) виконуються оцінки*

$$|\lambda_\varepsilon^i - \lambda^i| \leqslant C_i\,\varepsilon^\gamma, \qquad \|u_\varepsilon^i - u^i\|_2 \leqslant C\varepsilon^\gamma, \quad \gamma = \min\{m-1, 3-m\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де λ^i та u^i – додатні власні значення та нормовані в $H^2(\Omega)$ власні функції задачі

$$\begin{gathered}(k(x)u'')'' + \lambda p(x)u = 0, \ \ x \in \Omega_0, \\ u''(a) = (ku'')'(a) = 0, \quad u''(b) = (ku'')'(b) = 0, \ u(0) = 0, \quad [u']_{x=0} = [u'']_{x=0} = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

У випадку $m = 3$ із нерівності (3) маємо, що $\|A_\varepsilon f\|_2 \leqslant C\|f\|_2$. Підставляючи в інтегральну тотожність задачі (5) тотожну одиницю як пробну функцію, матимемо

$$|\varepsilon^{-1}q_0(A_\varepsilon f)(0) + q_1(A_\varepsilon f)'(0) - q_1 f'(0)| \leqslant C\varepsilon\|f\|_2.$$

Нехай оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ функції f ставить у відповідність розв'язок $u = Af$ задачі

$$\begin{gathered}(k(x)u'')'' + p(x)u = p(x)f, \qquad x \in \Omega_0, \quad u''(a) = (ku'')'(a) = 0, \\ u''(b) = (ku'')'(b) = 0, \ u(0) = 0, \quad [u']_{x=0} = 0, \quad [ku'']_{x=0} + Q(u'(0) - f'(0)) = 0,\end{gathered} \tag{11}$$

де $Q = q_2 - q_1^{-2}q_0$. Розв'язок цієї задачі справджує інтегральну тотожність

$$(u, \varphi) + Qu'(0)\varphi'(0) = (f, \varphi)_{L_2(\Omega)} + Qf'(0)\varphi'(0)$$

для всіх φ з простору $\mathcal{H}$.

Як і в попередніх випадках доводиться близькість розв'язків u та y_ε задач (11) та (1),(2) відповідно.

Теорема 4. *$(m = 3)$ Власні значення λ_ε та власні функції u_ε задачі (1), (2) справджують нерівності*

$$|\lambda_\varepsilon^i - \lambda^i| \leqslant C_i\,\varepsilon, \qquad \|u_\varepsilon^i - u^i\|_2 \leqslant C\varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де λ^i та u^i – власні значення та нормовані в $H^2(\Omega)$ власні функції задачі

$$\begin{gathered}(k(x)u'')'' + \lambda p(x)u = 0, \ \ x \in \Omega_0, u''(a) = (ku'')'(a) = 0, \ \ u''(b) = (ku'')'(b) = 0, \\ u(0) = 0, \quad [u']_{x=0} = 0, \quad [ku'']_{x=0} - \lambda Q u'(0) = 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Для дослідження задачі (4) у випадку $3 < m < 4$ застосуємо лему 2 для простору $\mathcal{H} = \{u \in H^2(\Omega) : \quad u(0) = u'(0) = 0\}$ та проектора $Pu = u(x) - u(0) - u'(0)x$. Легко показати, що $\|A_\varepsilon f\|_2 \leqslant C\|f\|_2$. Підставляючи в інтегральну тотожність задачі (5) почергово дві пробні функції, які рівні 1 та x в околі нуля, для $f \in \mathcal{H}$ та $y_\varepsilon = A_\varepsilon f$ отримуємо

$$|y_\varepsilon(0)| \leqslant C(\varepsilon^{m-2} + \varepsilon^{3/2})\|f\|_2, \qquad |y_\varepsilon'(0)| \leqslant C(\varepsilon^{m-3} + \varepsilon^{1/2})\|f\|_2.$$

Нехай оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ розв'язує задачу

$$\begin{gathered}(k(x)u'')'' + p(x)u = p(x)f, \qquad x \in \Omega_0, \\ u''(a) = (ku'')'(a) = 0, \quad u''(b) = (ku'')'(b) = 0, \ u(0) = 0, \quad u'(0) = 0,\end{gathered}$$

тоді для функцій з $\mathcal{H}$ виконується оцінка

$$|((D_\varepsilon - A)u, v)| \leqslant C_1 |(A_\varepsilon u)(0) + (A_\varepsilon u)'(0)| \, \|v\|_2 +$$
$$+\left| b_\varepsilon(u,v) - \varepsilon^{-m} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon) A_\varepsilon uv \, dx - (u,v)_{L_2(\Omega)} \right| \leqslant C_2(\varepsilon^{m-3} + \varepsilon^{1/2}) \|u\|_2 \|v\|_2 +$$
$$+C_3 \varepsilon^{4-m} \|u\|_2 \|v\|_2 \leqslant C(\varepsilon^{3-m} + \varepsilon^{4-m}) \|u\|_2 \|v\|_2.$$

Компактна збіжність D_ε до A при $\varepsilon \to 0$ перевіряється аналогічно попереднім випадкам. Отже, виконуються всі умови леми 2.

Теорема 5. *$(3 < m < 4)$ Власні значення $\lambda_\varepsilon > 0$ та власні функції u_ε задачі (1), (2) справджують нерівності*

$$|\lambda_\varepsilon^k - \lambda^k| \leqslant C_k \, \varepsilon^\gamma,$$
$$\|u_\varepsilon^k - u^k\|_2 \leqslant C\varepsilon^\gamma, \quad \gamma = min\{m-3, 4-m\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де λ^k та u^k – власні значення та нормовані в $H^2(\Omega)$ власні функції задачі

$$\begin{gathered} (k(x)u'')'' + \lambda p(x) u = 0, \quad x \in \Omega_0, \\ u''(a) = (ku'')'(a) = 0, \quad u''(b) = (ku'')'(b) = 0, \ u(0) = u'(0) = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

4. Випадок $m > 4$: явище локальних власних коливань. Ми покажемо, що у випадку, коли параметр m більший за порядок диференціального оператора, усі додатні власні значення λ_ε^k коливної системи (1), (2) є нескінченно малими при $\varepsilon \to 0$, а власні функції прямують до нуля в просторі $L_2(\Omega)$, хоча і мають одиничну норму в $H^2(\Omega)$. Ці функції мають форму високочастотних коливань, локалізованих в околі точки $x = 0$.

У цьому розділі за скалярний добуток в просторі $H^2(\Omega)$ виберемо білінійну форму $(u,v) = \int_\Omega (ku''v'' + uv)\, dx$. Проведемо заміну змінних $\xi = \varepsilon^{-1}x$, ввівши позначення $\Omega^\varepsilon = (\varepsilon^{-1}a, \varepsilon^{-1}b)$ та

$$\tilde{w}(\xi) = \varepsilon^{-3/2} w(\varepsilon\xi). \tag{14}$$

Перетворення (14) здійснює ізометрію $H^2(\Omega)$ та простору $H^2(\Omega^\varepsilon)$ із нормою

$$\|w\|_\varepsilon = \Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (k(\varepsilon\xi)|w''|^2 + \varepsilon^4 |w|^2) \, d\xi \Big)^{1/2},$$

а інтегральна тотожність задачі (1), (2) в нових змінних набуває вигляду

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} k(\varepsilon\xi) \tilde{u}'' \tilde{\varphi}'' \, d\xi - \lambda_\varepsilon \Big(\varepsilon^4 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} p(\varepsilon\xi) \tilde{u}\tilde{\varphi} \, d\xi + \varepsilon^{4-m} \int\limits_{-1}^{1} q(\xi) \tilde{u}\tilde{\varphi} \, d\xi \Big) = 0 \tag{15}$$

для всіх $\tilde{\varphi} \in H^2(\Omega^\varepsilon)$.

Введемо також простори $V = \{a + b\xi : \xi \in \Omega^\varepsilon, a, b \in \mathbb{R}\}$ та

$$\mathcal{H} = \Big\{ y \in H^2(\Omega^\varepsilon) : \int_{-1}^{1} q(\xi) y \, d\xi = 0, \int_{-1}^{1} q(\xi)\xi y \, d\xi = 0 \Big\}.$$

Очевидно, що $H^2(\Omega^\varepsilon) = \mathcal{H} \oplus V$. Оскільки для кожної функції u з підпростору $H^2(\Omega)$, який не містить лінійних функцій, виконується оцінка $(u,u)_{L_2(\Omega)} \leqslant C(u'', u'')_{L_2(\Omega)}$, то $\varepsilon^4 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} u(\xi)^2 \, d\xi \leqslant C \int\limits_{\Omega^\varepsilon} u''(\xi)^2 \, d\xi$. А тому форма $\{u, v\} = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} k(\varepsilon\xi) u'' v'' \, d\xi$ є скалярним добутком на $\mathcal{H}$.

Функцію $\varphi \in H^2(\Omega^\varepsilon)$ можна подати у вигляді $\varphi = \psi + \beta_0(\varphi) + \beta_1(\varphi)\xi$, де $\psi \in \mathcal{H}$. Вектор $\beta(\varphi) = (\beta_0(\varphi), \beta_1(\varphi))$ задається формулою $\beta(\varphi) = Q^{-1} T(\varphi)$, де

$$Q = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}, \quad T(\varphi) = \begin{pmatrix} \int\limits_{-1}^{1} q(\xi)\varphi(\xi) \, d\xi \\ \int\limits_{-1}^{1} q(\xi)\varphi(\xi)\xi \, d\xi \end{pmatrix}.$$

Крім того, власна функція $\tilde{u}_\varepsilon$, що відповідає ненульовому власному значенню λ_ε, має зображення

$$\tilde{u}_\varepsilon = v_\varepsilon(\xi) + \alpha_0^\varepsilon(v_\varepsilon) + \alpha_1^\varepsilon(v_\varepsilon)\xi, \quad v_\varepsilon \in \mathcal{H}, \tag{16}$$

де функціонали α_k^ε знаходяться із системи $\alpha^\varepsilon(v_\varepsilon) = -R_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(v_\varepsilon)$, а

$$R_\varepsilon = \begin{pmatrix} q_0 + \varepsilon^{m-1} p_0 & q_1 + \varepsilon^{m-2} p_1 \\ q_1 + \varepsilon^{m-2} p_1 & q_2 + \varepsilon^{m-3} p_2 \end{pmatrix}, \qquad F_\varepsilon(\psi) = \begin{pmatrix} \varepsilon^m \int\limits_{\Omega^\varepsilon} p(\varepsilon\xi)\psi(\xi) \, d\xi \\ \varepsilon^m \int\limits_{\Omega^\varepsilon} p(\varepsilon\xi)\psi(\xi)\xi \, d\xi \end{pmatrix}.$$

Матриця R_ε є невиродженою при достатньо малих ε, оскільки невиродженою є матриця Q, а вектор F_ε справджує нерівність $|F_\varepsilon(\psi)| \leqslant C\varepsilon^{m-7/2} \|\psi\|_{\mathcal{H}}$. Неважко переконатись, що таку ж оцінку справджують функціонали $\alpha_i^\varepsilon(\psi)$.

Новий спектральний параметр $\mu_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \varepsilon^{4-m}$ та зображення (16) змінюють вигляд інтегральної тотожності (15)

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} k(\varepsilon\xi) v_\varepsilon'' \psi'' \, d\xi - \mu_\varepsilon \Big\{ \varepsilon^m \int\limits_{\Omega^\varepsilon} p(\varepsilon\xi) v_\varepsilon \psi \, d\xi + \int\limits_{-1}^{1} q(\xi) v_\varepsilon \psi \, d\xi - \big(R_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(v_\varepsilon), F_\varepsilon(\psi) \big) \Big\} = 0, \tag{17}$$

$\psi \in \mathcal{H}$. Розглянемо оператор $A_\varepsilon : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, такий, що

$$\{A_\varepsilon u, v\} = \int\limits_{-1}^{1} q(\xi) uv \, d\xi + \varepsilon^m \int\limits_{\Omega^\varepsilon} p(\varepsilon\xi) uv \, d\xi - \big(R_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(u), F_\varepsilon(v) \big),$$

який є обмежений, компактний і самоспряжений. Оскільки

$$\{A_\varepsilon u, u\} = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (q(\xi) + \varepsilon^m p(\varepsilon\xi))(u + \alpha_0^\varepsilon(u) + \alpha_1^\varepsilon(u)\xi)^2 \, d\xi \geqslant 0,$$

то A_ε – додатно визначений. Отже, задача (17) має зліченну множину власних значень $0 < \mu_\varepsilon^1 < \mu_\varepsilon^2 < \cdots < \mu_\varepsilon^k < \dots$, яким відповідає ортонормована в $\mathcal{H}$ система власних функцій $\{v_\varepsilon^i\}_{i=1}^\infty$.

Перейдемо до побудови граничної задачі. Розглянемо інтегральну тотожність (17) на пробних функціях $\varphi \in \mathcal{H}$, які є лінійними поза відрізком $[-1,1]$. Нехай $\mu_\varepsilon \to \mu$ і $v_\varepsilon(\xi) \to v(\xi)$ слабко в $H^2(-1,1)$ при $\varepsilon \to 0$. Перейдемо в інтегральній тотожності (18) до границі при $\varepsilon \to 0$:

$$k(0)\int_{-1}^{1} v''(\xi)\varphi''(\xi)\,d\xi - \mu\int_{-1}^{1} q(\xi)v(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = 0.$$

Отримана інтегральна тотожність відповідає задачі

$$\begin{gathered} k(0)v^{(IV)}(\xi) - \mu q(\xi)v(\xi) = 0,\ \xi \in (-1,1),\ v''(\pm1) = v'''(\pm1) = 0, \\ \int_{-1}^{1} q(\xi)v(\xi)\,d\xi = 0,\ \int_{-1}^{1} q(\xi)v(\xi)\xi\,d\xi = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Введемо простір $\mathcal{H}_q = \left\{v \in H^2(-1,1) : \int_{-1}^{1} q(\xi)v(\xi)\,d\xi = 0,\ \int_{-1}^{1} q(\xi)v(\xi)\xi\,d\xi = 0\right\}$ зі скалярним добутком $\{u,v\}_q = k(0)\int_{-1}^{1} u''(\xi)v''(\xi)\,d\xi$. Розглянемо оператор A в просторі $\mathcal{H}_q$, який задається тотожністю $\{Au,v\}_q = (qu,v)_{L_2(-1,1)}$. Очевидно, A – обмежений, самоспряжений, компактний і додатний. Нехай $v \in H^2(-1,1)$ – власна функція задачі (17). Покладемо

$$\tilde v(\xi) = \begin{cases} v(-1) + v'(-1)(\xi+1), & \xi < -1, \\ v(\xi), & |\xi| < 1 \\ v(1) + v'(1)(\xi-1), & \xi > 1. \end{cases} \tag{19}$$

Так побудована функція $\tilde v$ є майже-власною функцією для оператора A_ε. Справді,

$$|\{A_\varepsilon\tilde v - \mu^{-1}\tilde v, \varphi\}| = \Big|\int_{-1}^{1} qv\varphi\,d\xi + \varepsilon^m\int_{\Omega^\varepsilon} p\tilde v\varphi\,d\xi - (R_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon(\tilde v), F_\varepsilon(\varphi)) - \frac{1}{\mu}\int_{-1}^{1} kv''\varphi''\,d\xi\Big| \leqslant$$

$$\mu^{-1}\max_{\xi\in(-1,1)}|k(\varepsilon\xi) - k(0)|\Big|\int_{-1}^{1} v''\varphi''\,d\xi\Big| + C\varepsilon^{m-4}\|\varphi\|_{\mathcal{H}} + |(R_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon(\tilde v), F_\varepsilon(\varphi))| \leqslant C\,\varepsilon^\gamma\,\|\varphi\|_{\mathcal{H}},$$

де $\gamma = \min\{1, m-4\}$, $\|\tilde v\|_{\mathcal{H}} = 1$. Згідно з лемою Вішика–Люстерника [9] існує таке власне значення λ_ε задачі (1), (2), що $|\frac{1}{\lambda_\varepsilon\varepsilon^{4-m}} - \frac{1}{\mu}| \leqslant C\varepsilon^\gamma$, звідки можна показати $|\mu - \lambda_\varepsilon\varepsilon^{4-m}| \leqslant C_1\mu\varepsilon^\gamma$, $\gamma = \min\{1, m-4\}$. Виберемо число d таким чином, щоб в інтервалі $[\mu^{-1}-d, \mu^{-1}+d]$ містилось лише одне власне значення $\frac{1}{\lambda_\varepsilon\varepsilon^{4-m}}$ оператора A_ε. Тоді існує така нормована власна функція v_ε оператора A_ε, що $\|v_\varepsilon - \tilde v\|_{\mathcal{H}} \leqslant Cd^{-1}\varepsilon^\gamma$. Повертаючись до змінних x

$$(P_\varepsilon v)(x) = \varepsilon^{3/2}\tilde v(x/\varepsilon), \tag{20}$$

отримуємо $\|\varepsilon^{3/2}v_\varepsilon(x/\varepsilon) - P_\varepsilon v\|_2 \leqslant C_1\varepsilon^\gamma$. Оскільки $\|\varepsilon^{3/2}v_\varepsilon(x/\varepsilon) - u_\varepsilon(x)\|_2 \leqslant C_2\varepsilon^{m-3}$, то $\|u_\varepsilon - P_\varepsilon v\|_2 \leqslant C\varepsilon^\gamma$, де u_ε– власна функція задачі (1), (2), що задовольняє умову $\int_\Omega k(x)u_\varepsilon''(x)^2\,dx = 1$.

Теорема 6. *($m > 4$) Якщо λ_ε^i, u_ε^i– ненульове власне значення та відповідна йому власна функція задачі (1), (2), $i = 1, 2, \dots$, причому $\int\limits_\Omega k(x) {u_\varepsilon^i}''(x)^2\,dx = 1$, $\{\mu^k, v^k\}_{k=1}^\infty$– система власних елементів задачі (18), $\|v\|_{\mathcal{H}_q} = 1$, то виконуються оцінки*

$$|\mu^k - \lambda_\varepsilon^k \varepsilon^{4-m}| \leqslant C\mu^k\varepsilon^\gamma, \quad \|u_\varepsilon^k - P_\varepsilon v^k\|_2 \leqslant C\varepsilon^\gamma,$$

де $\gamma = min\{1, m-4\}$, а P_ε– оператор, заданий співвідношеннями (19),(20).

Зауважимо, що $\|P_\varepsilon v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_1\varepsilon^{3/2}(\|v\|_{\mathcal{H}_q} + C_2\varepsilon^{-1}\|v\|_{\mathcal{H}_q}) \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|v\|_{\mathcal{H}_q}$.

1. Sanchez-Palensia E. *Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses*// Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics. Berlin: Springer-Verlag,1984.— P.346-368.
2. Sanchez-Palensia E., Tchatat H. *Vibration de systems elastiques avec des masses concentrees* // Rend. Sem. Mat. Univers. Politech. Torino.— 1984.— V.42, N3.— P.43-63.
3. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. Осциляционные матрицы, ядра и малые колебания механических систем. - М.-Л.: Гос.изд., 1950.
4. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М: Изд-во МГУ, 1990.— 311 с.
5. Olejnik O.A. *Homogenization problems in elasticity.Spectrum of singularily perturbed operators*// Non-classical continuum mechanics. 1987. Lecture Notes series,122.— Cambridge University Press.— P.188-205.
6. Головатый Ю.Д. *Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами: эффект локальних колебаний*// Труды Московского мат. о–ва.— 1992.— Т.54.— С.29–72.
7. Головатый Ю.Д. *Спектральная задача Неймана для оператора Лапласа с сингулярно возмущённой плотностью* // Успехи матем. н. - 1990. - Т.45, N4 -.С.147-148.
8. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А., Соболева Т.С. *О собственных колебаниях струны с присоединенной массой* // Сибирский математический журнал. - 1988. - Т.29, N5. - С.71-91.
9. Вишик М.И., Люстерник А.А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром* // Успехи матем. н. - 1957. - Т.12, N5. - С.3-122.

Стаття надійшла до редколегії 24.04.1998