УДК 517.927.25

ПРО ЛОКАЛЬНІ ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ Е. САНЧЕЗ-ПАЛЕНСІЇ ДЛЯ ПЛАСТИНИ ІЗ ЗБУРЕННЯМ ГУСТИНИ В ОКОЛІ ОДНОВИМІРНОГО МНОГОВИДУ

Ю. Д. Головатий, А. С. Лавренюк

Golovatyj Yu. D., Lavrenyuk A. S. On E. Sanchez-Palencia local proper vibrations for plate with density perturbed in neighbourhood of one-dimensional manifold. We study an asymptotic behaviour as $\varepsilon \to 0$ of eigenvalues and eigenfunctions of a singular perturbed problem $\Delta^2 u_\varepsilon - \lambda_\varepsilon(p+\varepsilon^{-m}q_\varepsilon)u_\varepsilon = 0$ in $\Omega \subset R^2$, $u_\varepsilon = \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0$ on $\partial\Omega$ where the support of a function q_ε is an ε-neighbourhood of one-dimensional closed manifold $\gamma \subset \Omega$. The phenomenon of E. Sanchez-Palencia local proper vibrations is described. Two-parameter spectral problem on the first terms of eigenvalue asymptotics is obtained.

Композитні (локально неоднорідні) коливні системи мають властивості, які не притаманні класичним системам з приєднаними чи зосередженими масами. Для багатьох систем вдалося математично описати явище локальних коливань [1-12]. А саме, доведено існування серії нескінченно малих власних частот, яким відповідають власні коливання з нескінченно малою амплітудою. Такі власні функції мають вигляд високочастотних коливань в околі збурення густини і швидко згасають поза ним. У згаданих працях вивчалися спектральні задачі із збуренням коефіцієнтів диференціального оператора в околі множини міри нуль (скінченна чи зліченна множина точок). Ми ж описали явище локальних коливань для системи, густина якої збурена в околі одновимірного многовиду.

1. Формулювання задачі. Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^2$ з гладкою межею $\partial\Omega$, а γ – гладка замкнена крива, яка лежить в Ω. Через ω_ε позначимо ε-окіл кривої γ, тобто об'єднання всіх відкритих куль радіуса ε з центром на γ. В області Ω введемо додатну гладку функцію p, а також гладку і додатну в ω_ε функцію $q_\varepsilon(x)$, яка продовжена нулем на $\mathbb{R}^2$. Ми вивчатимемо асимптотичну поведінку при $\varepsilon \to 0$ власних значень λ_ε та власних функцій u_ε задачі

$$\Delta^2 u_\varepsilon - \lambda_\varepsilon(p+\varepsilon^{-m}q_\varepsilon)u_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \Omega, \qquad u_\varepsilon = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{1}$$

де Δ^2 – бігармонічний оператор, ν – зовнішня нормаль до межі $\partial\Omega$, а m – дійсний параметр. Оскільки на $\partial\omega_\varepsilon$ функція q_ε зазнає розриву, то додатково вимагатимемо виконання умов спряження

$$[u_\varepsilon]_{\partial\omega_\varepsilon} = \left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}\right]_{\partial\omega_\varepsilon} = [\Delta u_\varepsilon]_{\partial\omega_\varepsilon} = \left[\frac{\partial \Delta u_\varepsilon}{\partial n}\right]_{\partial\omega_\varepsilon} = 0, \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47A75; Secondary 35B25.

де n – вектор нормалі до $\partial\omega_\varepsilon$.

У статті вивчено випадок, коли параметр m більший, ніж порядок диференціального оператора, тобто $m > 4$. Саме у цьому випадку задача (1) є моделлю композитної пластини, якій властивий ефект локальних коливань Е. Санчез-Паленсіі. Дамо математичне означення цього виду власних коливань.

Означення 1. *Нехай λ_ε і u_ε – власне значення і нормована у просторі $W_2^2(\Omega)$ власна функція задачі (1). Будемо говорити, що пара $(\lambda_\varepsilon, u_\varepsilon)$ моделює локальну форму коливань нашої системи, якщо $\lambda_\varepsilon \to 0$ та $u_\varepsilon \to 0$ у просторі $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$.*

Ми встановили, що спектр задачі (1) при $m > 4$ складається із трьох зліченних серій Λ_{m-1}, Λ_{m-3} та Λ_{m-4} нескінченно малих власних значень, де номер серіі вказує на порядок малості власних значень при $\varepsilon \to 0$. Однак, лише власним значенням серії Λ_{m-4} відповідають високочастотні форми коливань, зосереджені в околі многовиду γ.

2. Двочленна асимптотика власних значень серії Λ_{m-4}. Без втрати загальності візьмемо $m = 5$, бо в головному поведінка при $\varepsilon \to 0$ власних значень λ_ε та власних функцій u_ε однакова для всіх $m > 4$.

В області ω_ε введемо локальні координати (s, n), де s – натуральний параметр кривої γ, а $n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ – орієнтована віддаль до неї вздовж нормалі. Нехай у цих координатах густина збурення має вигляд $q_\varepsilon(x) = q(n/\varepsilon)$.

Зауваження 1. У загальному випадку, коли функція q_ε залежить від змінної s, питання побудови асимптотичних розвинень залишається відкритим.

Будемо шукати асимптотику власних значень серії Λ_{m-4}, де $m = 5$, та відповідних власних функцій у вигляді

$$\lambda_\varepsilon \sim \varepsilon(\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \dots), \qquad \text{де } \lambda_0 \neq 0, \tag{3}$$

$$u_\varepsilon(x) \sim \sqrt{\varepsilon}\big(v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \varepsilon^2 v_2(x) + \dots\big), \qquad \text{коли } x \in \Omega \setminus \omega_\varepsilon, \tag{4}$$

$$u_\varepsilon(x) \sim \varepsilon\sqrt{\varepsilon}\big(w_0(s, n/\varepsilon) + \varepsilon w_1(s, n/\varepsilon) + \dots\big), \qquad \text{коли } (s, n) \in \omega_\varepsilon. \tag{5}$$

Зауваження 2. Множники $\sqrt{\varepsilon}$ та $\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$ у рядах (4), (5) вибрані з умови обмеженості норми функції u_ε у просторі $W_2^2(\Omega)$. Вважаємо також, що ряд (5) має вказаний вигляд у кожній локальній карті скінченного відкритого покриття ε-околу γ.

Введемо "швидку" змінну $\xi = n/\varepsilon$. У координатах (s, ξ), де $\xi \in (-1, 1)$, а s пробігає криву γ (надалі писатимемо $s \in \gamma$) оператор Лапласа має вигляд

$$\Delta = \frac{1}{\varepsilon^2(1 - \varepsilon\xi k(s))}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left((1 - \varepsilon\xi k(s))\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial s}\left((1 - \varepsilon\xi k(s))^{-1}\frac{\partial}{\partial s}\right)\right),$$

де $k(s)$ – кривина кривої γ в точці $(s, 0)$. Тоді для бігармонічного оператора правильне асимптотичне розвинення

$$\Delta^2_{\xi,s} = \varepsilon^{-4}L_0 + \varepsilon^{-3}L_1 + \varepsilon^{-2}L_2 + \dots,$$

де перші коефіцієнти ряду мають вигляд

$$L_0 = \frac{\partial^4}{\partial\xi^4}, \quad L_1 = -2k(s)\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}, \quad L_2 = -k(s)^2\Big(2\xi\frac{\partial^3}{\partial\xi^3} + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\Big) + 2\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial s^2}.$$

Підставляючи ряд (4) у задачу (1), отримаємо

$$\Delta^2 v_0 = 0, \quad x \in \Omega \setminus \gamma, \quad v_0 = \frac{\partial v_0}{\partial\nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{6}$$

Для коефіцієнтів ряду (5) в області збурення $(s,\xi) \in \gamma \times (-1,1)$ маємо

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial\xi^4} - \lambda_0 q(\xi) w_0 = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial\xi^4} - \lambda_0 q(\xi) w_1 = \lambda_1 q(\xi) w_0 + 2k(s)\frac{\partial^3 w_0}{\partial\xi^3}. \tag{8}$$

На межі кільця ω_ε ряди (4), (5) повинні задовольняти умови спряження (2). Звідси для перших членів цих рядів маємо рівності

$$v_0|\gamma = 0, \qquad \frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_-} = \frac{\partial w_0}{\partial\xi}(s,-1), \qquad \frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_+} = \frac{\partial w_0}{\partial\xi}(s,1), \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial\xi^2}(s,-1) = \frac{\partial^3 w_0}{\partial\xi^3}(s,-1) = 0, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial\xi^2}(s,1) = \frac{\partial^3 w_0}{\partial\xi^3}(s,1) = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}(s,-1) = (\Delta v_0)\big|_{\gamma_-}, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}(s,1) = (\Delta v_0)\big|_{\gamma_+}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^3 w_1}{\partial\xi^3}(s,-1) = 0, \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial\xi^3}(s,1) = 0, \tag{12}$$

де $g|_{\gamma_\pm}$ – односторонні границі функції g на кривій γ.

Згідно з (7), (10) число λ_0 повинно бути власним значенням оператора

$$(Af)(\xi) = \frac{1}{q(\xi)}\frac{d^4 f}{d\xi^4}(\xi), \quad D(A) = \{f \in W_2^4(-1,1) | f''(\pm 1) = f'''(\pm 1) = 0\} \tag{13}$$

у ваговому просторі $L_2(q;[-1,1])$, бо інакше функція w_0 є тотожним нулем. А тоді з умов (6), (9) матимемо, що v_0 також дорівнює нулю як бігармонічна функція в області $\Omega \setminus \gamma$, яка на межі $\partial\Omega \cup \gamma$ цієї області справджує однорідні умови Діріхле.

Подальша побудова формальної асимптотики можлива лише тоді, коли крайова задача (8), (11), яка залежить від s як від параметра, матиме розв'язок. Необхідну та достатню умову його існування можна отримати інтегруванням частинами рівняння (8), яке помножене на функцію w_0. Використавши рівності (9)-(12), цю умову можна записати так

$$\Big[\frac{\partial v_0}{\partial n}\Delta v_0\Big]_\gamma + 2k(s)\int_{-1}^{1} w_0 \frac{\partial^3 w_0}{\partial\xi^3}(s,\xi)\,d\xi + \lambda_1 \int_{-1}^{1} q w_0(s,\xi)^2\,d\xi = 0.$$

Тепер ми можемо сформулювати задачу для головних членів рядів (3)-(5):

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^4}(s,\xi) - \lambda_0 q(\xi) w_0(s,\xi) = 0, \qquad \xi \in (-1,1), \quad s \in \gamma, \tag{14_0}$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2}(s,\pm 1) = \frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi^3}(s,\pm 1) = 0, \tag{14_1}$$

$$\Delta^2 v_0(x) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \gamma, \tag{14_2}$$

$$v_0 = \frac{\partial v_0}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad v_0\big|_\gamma = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_\pm} = \frac{\partial w_0}{\partial \xi}(s,\pm 1), \tag{14_3}$$

$$\left[\frac{\partial v_0}{\partial n}\Delta v_0\right]_\gamma + 2k(s)\int_{-1}^{1} w_0 \frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi^3}(s,\xi)d\xi + \lambda_1 \int_{-1}^{1} q w_0(s,\xi)^2 d\xi = 0, \tag{14_4}$$

Отже, пара (λ_0, λ_1) повинна бути "власним значенням", а (w_0, v_0) – власним вектором двопараметричної спектральної задачі (14) з нелінійною умовою спряження на кривій γ.

3. Дослідження спектру двопараметричної задачі. Введемо для задачі (14) природне угагальнення поняття власного значення та власного вектора. Далі ми покажемо, що класичне означення спектру (як доповнення до резольвентної множини в $\mathbb{C}^2$) у даному випадку не має сенсу.

Означення 2. *Точку $(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{C}^2$ називатимемо власним значенням задачі (14), якщо їй відповідає нетривіальний розв'язок (w_0, v_0) цієї задачі.*

Лема. *Нехай $q(\xi)$ є вимірною і додатною функцією, а $\lambda > 0$ та y – власне значення та власна функція задачі*

$$y^{(\mathrm{iv})} - \lambda q(\xi) y = 0, \quad y''(\pm 1) = y'''(\pm 1) = 0. \tag{15}$$

Тоді числа $y'(-1)$ та $y'(1)$ не дорівнюють нулю.

Доведення (Р. Гринів). Припустимо, що $y'(-1) = 0$. Не зменшуючи загальності, покладемо $y(-1) = 1$. Тоді

$$y(\xi) = 1 + \lambda \int_{-1}^{\xi} ds \int_{-1}^{s} dt \int_{-1}^{t} d\sigma \int_{-1}^{\sigma} q(\tau) y(\tau) d\tau. \tag{16}$$

Введемо позначення $\alpha = \sup\{\beta \in [-1,1] \, : \, y(x) > 0, x \in [-1,\beta)\}$. Якщо $\alpha < 1$, то $y(\alpha) = 0$. Але згідно з рівністю (16) маємо, що $y_0(\alpha) \geqslant 1$. Отже, $\alpha = 1$ і $y(x) > 0$ на $[-1,1]$. Тоді $y'''(1) = \lambda \int_{-1}^{1} q(x) y(x) dx > 0$, що суперечить умові $y'''(1) = 0$. Тому $y'(-1) \neq 0$. Так само доводимо, що $y'(1) \neq 0$.

Наслідок. *Усі додатні власні значення задачі (15) є простими.*

Доведення. Якщо власному значенню λ відповідають дві лінійно незалежні власні функції y_1 і y_2, то похідна функції $y(\xi) = y_2'(1)y_1(\xi) - y_1'(1)y_2(\xi)$ дорівнює нулю в точці $\xi = 1$. Але це суперечить лемі.

Оскільки ми вивчаємо асимптотику серії Λ_{m-4}, тобто для $m = 5$ асимптотику власних значень порядку ε, то λ_0 – *додатне* власне значення оператора A (або задачі (15)). Згідно з наслідком, будь-який нетривіальний розв'язок w_0 задачі (14_0), (14_1) має вигляд

$$w_0(s,\xi) = a(s)W(\xi), \tag{17}$$

де a – довільна ненульова функція на γ, а W – власна функція задачі (15), яка відповідає власному значенню λ_0. Нехай також W справджує умови нормування

$$\int_{-1}^{1} q(\xi)W^2\,d\xi = 1, \quad W'(-1) > 0. \tag{18}$$

Тепер остання рівність (14_3) матиме вигляд

$$\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_\pm} = a(s)W'(\pm 1).$$

Згідно із лемою, числа $W'(-1)$ та $W'(1)$ не дорівнюють нулю. Позначимо їх β_- та β_+ відповідно. Тоді отримаємо формулу

$$a(s) = \beta_-^{-1}\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_-} = \beta_+^{-1}\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_+}, \tag{19}$$

а також умову для нормальної похідної функції v_0 на кривій γ

$$\beta_-\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_+} - \beta_+\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_-} = 0.$$

Зображення (17) також дає змогу позбутися нелінійності в умові (14_4):

$$\beta_+(\Delta v_0)\big|_{\gamma_+} - \beta_-(\Delta v_0)\big|_{\gamma_-} + \beta_+^{-1}\big(k(s)(\beta_-^2 - \beta_+^2) + \lambda_1\big)\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_+} = 0.$$

Тут ми скористались формулою (19) і рівністю $\int\limits_{-1}^{1} WW'''d\xi = \frac{1}{2}(\beta_-^2 - \beta_+^2)$.

Отже, число λ_1 і функція v_0 повинні справджувати задачу

$$\begin{aligned}
&\Delta^2 v_0 = 0, \quad x \in \Omega\setminus\gamma, \qquad v_0 = \frac{\partial v_0}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega,\\
&v_0\big|_\gamma = 0, \quad \beta_-\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_+} - \beta_+\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_-} = 0,\\
&\beta_+^2(\Delta v_0)\big|_{\gamma_+} - \beta_+\beta_-(\Delta v_0)\big|_{\gamma_-} + \big(k(s)(\beta_-^2 - \beta_+^2) + \lambda_1\big)\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_+} = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Зауваження 3. Розглянемо матричний лінійний оператор

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad A_{kl} : H_l \to H_k, \quad k, l = 1, 2,$$

який діє у гільбертовому просторі $\mathbb{H} = H_1 \times H_2$ та двопараметричну спектральну задачу

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Матрицю $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ можна трактувати як точку простору $\mathbb{C}^2$. Будемо говорити, що Λ належить *резольвентній множині* $\rho(\mathbb{A})$ оператора $\mathbb{A}$, якщо оператор $\mathbb{A}-\Lambda$ має обмежений обернений в $\mathbb{H}$, інакше — Λ є *точкою спектру* $\sigma(\mathbb{A})$.

Оминаючи деталі, скажемо, що задачі (20) відповідає деякий оператор $B(W) = B(\beta_-, \beta_+)$ в просторі $L_2(\gamma)$, а задачі (14) — матричний оператор

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B(\cdot) \end{pmatrix} \quad \text{у просторі} \quad \mathbb{H} = L_2(q; [-1, 1]) \times L_2(\gamma).$$

У нашому випадку розв'язність системи

$$\begin{cases} Ax_1 \qquad - \lambda_1 x_1 = f_1, \\ B(x_1)x_2 - \lambda_2 x_2 = f_2 \end{cases}$$

залежить не лише від Λ, але й вектора f_1, який через x_1 впливає на оператор $B(x_1)$. Отже, немає сенсу говорити про спектр оператора $\mathbb{A}$. Надалі під спектром задачі (14) розуміємо множину всіх власних значень в сенсі означення 2.

Теорема. *Спектр задачі (14) дійсний і лежить у півплощині $\lambda_0 \geqslant 0$ простору $\mathbb{R}^2_{\lambda_0,\lambda_1}$. Крім того,*

(i) Якщо (λ_0, λ_1) точка спектру, то λ_0 - власне значення задачі (15).

(ii) У півплощині $\lambda_0 > 0$ спектр складається із ізольованих точок (λ_0, λ_1), де λ_1 - власне значення задачі (20). Всі такі власні значення (λ_0, λ_1) мають скінченну кратність.

(iii) Промінь $P_0 = \{(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_0 = 0, \lambda_1 \geqslant 0\}$ належить спектру і кожна його точка має нескінченну кратність.

Доведення. Частина (i) була доведена у ході побудови асимптотики. Оскільки, згідно із наслідком, власне значення $\lambda_0 > 0$ є простим, то за його власною функцією, нормованою умовами (18), однозначно знаходяться числа $\beta_\pm$. Отже, кожному $\lambda_0 > 0$ відповідає задача (20) з деякими $\beta_\pm$. Друга компонента власного вектора (w_0, v_0) не повинна дорівнювати нулю, бо тоді дорівнюватиме нулю і функція a (див. (19)), а, отже, і перша компонента w_0. Тому для доведення частини (ii) треба показати, що задача (20) має дійсний дискретний спектр. Введемо гільбертовий простір

$$\mathcal{H}^l_{\beta_\pm} = \left\{ \varphi \in W^s_2(\omega \setminus \gamma) : \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \partial\omega, \quad \varphi_{|_\gamma} = 0, \quad \beta_+ \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\gamma^+} = \beta_- \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\gamma^-} \right\}, \quad l > 3/2.$$

Тоді задачі (20) відповідає інтегральна тотожність

$$\beta_+^2 \int\limits_\omega \Delta v_0 \Delta\overline{\varphi}\, dx + (\beta_+^2 - \beta_-^2) \int\limits_{\gamma_+} k(s) \frac{\partial v_0}{\partial n} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n}\, ds - \lambda_1 \int\limits_{\gamma_+} \frac{\partial v_0}{\partial n} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n}\, ds = 0, \quad \varphi \in \mathcal{H}^2_{\beta_\pm}. \qquad (21)$$

Нехай $\varkappa_0 = (\beta_+^2 - \beta_-^2) \min\limits_{s\in\gamma} k(s)$ та $\varkappa = \max\{-\varkappa_0, 0\}$. Розглянемо неперервні ермітові форми

$$a_{\beta_\pm}(u,v) = \beta_+^2 \int\limits_\omega \Delta u \Delta \overline{v}\, dx + \int\limits_{\gamma^+} \big(\varkappa + (\beta_+^2 - \beta_-^2) k(s)\big) \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial \overline{v}}{\partial n}\, ds \quad \text{в} \quad \mathcal{H}^2_{\beta_\pm},$$

$$b_\gamma(u,v) = \int\limits_{\gamma^+} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial \overline{v}}{\partial n}\, ds \quad \text{в} \quad \mathcal{H}^l_{\beta_\pm}, \quad 3/2 < l \leqslant 2.$$

Окрім того, форма $a_{\beta_\pm}$ є додатновизначена. Тоді тотожність (21) набуває вигляду

$$a_{\beta_\pm}(v_0, \varphi) - (\lambda_1 + \varkappa) b_\gamma(v_0, \varphi) = 0, \quad \varphi \in \mathcal{H}^2_{\beta_\pm}.$$

Оскільки вкладення $H^2_{\beta_\pm} \subset H^l_{\beta_\pm}$ є компактним для $l < 2$, то задачі (20) відповідає самоспряжений компактний оператор C в просторі $H^2_{\beta_\pm}$, дія якого визначена рівністю

$$a_{\beta_\pm}(Cu, v) = b_\gamma(u,v) \qquad \text{для всіх} \quad u, v \in H^2_{\beta_\pm}.$$

Отже, спектр задачі (20) дійсний дискретний і обмежений знизу числом $-\varkappa$.

Точки променя P_0 не мають стосунку до асимптотики локальних коливань, тому опишемо лише ідею доведення частини (iii). Нехай у зауваженні 3 число λ_0 є кратним власним значенням оператора A, а $g_\alpha = g_1 + \alpha g_2$ – елемент відповідного власного підпростору. Тоді власні значення оператора $B_\alpha = B(g_\alpha)$ будуть, взагалі кажучи, неперервними функціями параметра α. Залишилося зауважити, що $\lambda_0 = 0$ є двократним власним значенням оператора A. Теорему доведено.

Отже, ми побудували формальні асимптотичні розвинення власних значень задачі (1) серії Λ_{m-4} і відповідних власних функцій, які моделюють локальні коливання в околі многовиду γ:

$$\lambda_\varepsilon \sim \varepsilon\lambda_0 + \varepsilon^2\lambda_1 + \dots,$$

$$u_\varepsilon(x) \sim \begin{cases} \sqrt{\varepsilon} v_0(x) + \dots & \text{коли} \ \ x \in \Omega \setminus \omega_\varepsilon, \\ \varepsilon\sqrt{\varepsilon} \dfrac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_+}(s) \cdot \dfrac{W(n/\varepsilon)}{W'(1)} + \dots, & \text{коли} \ \ (s,n) \in \omega_\varepsilon, \end{cases}$$

де (λ_0, λ_1) – ізольована точка спектру задачі (14), W – власна функція задачі (15), яка відповідає власному значенню λ_0 і v_0 – власна функція задачі (20) для власного значення λ_1.

1. Sanchez-Palensia E. *Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses*// Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics. Berlin: Springer-Verlag,1984.– P.346-368.
2. Sanchez-Palensia E., Tchatat H. *Vibration de systems elastiques avec des masses concentrees* // Rend. Sem. Mat. Univers. Politech. Torino.– 1984.– V.42, N3.– P.43-63.
3. Olejnik O.A. *Homogenization problems in elasticity.Spectrum of singularily perturbed operators*// Non-classical continuum mechanics. 1987. Lecture Notes series,122.– Cambridge University Press.– P.188-205.
4. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А., Соболева Т.С. *О собственных колебаниях струны с присоединенной массой* // Сибирский математический журнал. – 1988. – Т.29, N5. – С.71-91.
5. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М: Изд-во МГУ, 1990.– 311 с.
6. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А. *Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями* // Тру- ды Математ. ин–та им. В.А.Стеклова.— 1990.— Т.192.— С.42–60
7. Головатый Ю.Д. *Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами: эффект локальних колебаний*// Труды Московского мат. о-ва.– 1992.– Т.54.– С.29-72.
8. Lobo M., Perez E. *On vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary* // Math.Models Methods Appl. Sci. – 1993. – Vol.3, No.2. – P.249–273.
9. Lobo M., Perez E. *Vibrations of a membrane with many concentrated masses near the boundary*// Math.Models Methods Appl. Sci. – 1995. – Vol.5, No.5. – P.565–585.
10. Leal C., Sanchez-Hubert *Perturbation of eigenvalues of membrane with a concentrated mass* // Quart. Appl. Math.– 1989.– V.47.– P.93-103.
11. Nazarov S.A. *Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions* // Mathematical Modelling and Numerical Analysis.— 1993.— V.7,N6.— P.777–799.
12. Назаров С.А. *Об одной задаче Санчес-Паленсия с краевыми условиями Неймана*// Изв. ВУЗов, Матем.— 1989.— N11.— С.60–66.

Стаття надійшла до редколегії 29.04.1998