ISSN 0201 - 758X
ISSN 0320 - 6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 51

1998

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
VISNYK LVIVSKOHO UNIVERSYTETU
(HERALD OF LVIV UNIVERSITY)

Серія механіко-математична

Mathematics and Mechanics

Виходить з 1965 року

Issued from 1965

Випуск 51

Volume 51

ЛЬВІВ – 1998

Вісник містить статті з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

The issue contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

For scientists, post graduates and students.

Адреса редколегії:

290602, Львів, вул. Університетська, 1, Львівський державний університет,
механіко-математичний факультет, кафедра диференціальних рівнянь
Тел. (0322) 79-45-93
E-mail: diffeq@franko.lviv.ua

Chair of Differential Equations, Departament of Mechanics and Mathematics,
Lviv State University, Universytetska 1, Lviv, 290602

Комп'ютерний набір (видав. пакет $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX). Підписано до друку з оригінал-макета 3.07.98.
Зам. №98/2-11. Тир. 100. Папір друк. офсетний №1. Формат 84×108/16. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. 15,46. Друк ТзОВ "Простір М", м. Львів.

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 511.364

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ІНВАРІАНТІВ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВЕЙЄРШТРАССА

Я. М. Холявка

Kholyavka Ya. M. On the approximation of the invariants connected with Weierstrass elliptic functions. Let $\wp_1(z), g_{2,1}, g_{3,1}, 2\omega, 2\omega_1$ and $\wp_2(z), g_{2,2}, g_{3,2}, 2\omega, 2\omega_2$ be the notations of the Weierstrass elliptic function theory. We estimate from below the simultaneous approximation $\omega, g_{2,1}, g_{3,1}, g_{2,2}, g_{3,2}$.

Нехай $\wp_1(z)$ та $\wp_2(z)$ – еліптичні функції Вейєрштрасса з одним спільним періодом, $2\omega, 2\omega_1$ та $2\omega, 2\omega_2$ – деякі фіксовані пари їх основних періодів, $g_{2,1}, g_{3,1}$ та $g_{2,2}, g_{3,2}$ – інваріанти $\wp_1(z)$ та $\wp_2(z)$ відповідно, $\sigma_1(z)$ та $\sigma_2(z)$ – асоційовані з $\wp_1(z)$ та $\wp_2(z)$ σ-функції Вейєрштрасса, $\xi_0, \dots, \xi_4$ – наближаючі алгебраїчні числа, n_i та L_i – їх степені та довжини, $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_0, \dots, \xi_4)$. Надалі будемо позначати $\Omega[A, B] = \{(x, s) : x = \pm 1, \dots, \pm(A-1);\ s = 0, 1, \dots, B-1\}$, $|f|_\Delta = \sup_{z \in \Delta} |f(z)|$, C_i – деякі сталі.

Відомо [1], що $\wp_1(z)$ та $\wp_2(z)$ при $\omega \in \mathbb{A}$ мають принаймні по одному трансцендентному інваріанту, тому серед чисел $\omega, g_{2,1}, g_{3,1}, g_{2,2}$ та $g_{3,2}$ є трансцендентні. У цій праці розглянуто наближення алгебраїчними числами інваріантів функцій $\wp_1(z)$ і $\wp_2(z)$ та їх спільного періоду ω.

Теорема. *Нехай*

$$N = n\left(\frac{\ln L_0}{n_0} + \min(n_1, n_2)\left(1 + \frac{\ln L_1}{n_1} + \frac{\ln L_2}{n_2}\right) + \min(n_3, n_4)\left(1 + \frac{\ln L_3}{n_3} + \frac{\ln L_4}{n_4}\right)\right).$$

Якщо існує стала $C = C(\omega, \omega_1, \omega_2)$ така, що для довільних t, m, m_1, m_2, $t \in \mathbb{R}$, $m, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $|m_1| \leqslant t$ виконується

$$|m\omega + m_1\omega_1 + m_2\omega_2| > C\exp(-t^2), \tag{1}$$

то існує деяка ефективна стала $\Lambda = \Lambda(w, w_1, w_2) > 0$ така, що справджується оцінка

$$|\omega - \xi_0| + |g_{1,2} - \xi_1| + |g_{1,3} - \xi_2| + |g_{2,2} - \xi_3| + |g_{2,3} - \xi_4| > \exp(-\Lambda N^3). \tag{2}$$

Сформулюємо твердження, які використаємо при доведенні теореми.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 11J89.

Ця робота підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук, грант N APU 051106.

Лема 1 ([2], с. 256). *Нехай* $s, l \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$(\wp^l(z))^{(s)} = \sum_{2a+3b+4c=s+2l} E(a,b,c,l,s)\wp(z)^a \wp'(z)^b \wp''(z)^c,$$

де всі числа $a, b, c, E(a,b,c,l,s)$ – *цілі і* $\sum_{2a+3b+4c=s+2l} E(a,b,c,l,s) \leqslant 6^{s+l}s!$.

Лема 2 ([4], с. 115). *Нехай* A, N_0, μ, m_0 – *натуральні числа,* $\mu > m_0$, $L_i(x_1,\ldots,x_\mu) = a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,\mu}x_\mu$, $a_{i,k} \in \mathbb{R}$, $|a_{i,k}| < A$, $i = 1,\ldots,m_0$.

Тоді існують цілі раціональні числа $c_1,\ldots,c_\mu$ *такі, що*

$$L_i(c_1,\ldots,c_\mu) < N_0^{-1}, \quad 0 < \max|c_k| < 2(A\mu N_0)^{\frac{m_0}{\mu-m}},\ k = 1,\ldots,\mu.$$

Лема 3 ([2], с. 46). *Нехай* $P \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$, $\deg_{x_i} P \leqslant \mathcal{N}_i$, *i=1,...,n;* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{A}$, $m = \deg\mathbb{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. *Якщо* $P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \not\equiv 0$, *то*

$$|P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)| \geqslant L(P)^{1-m}\prod_{i=1}^{n} L(\alpha_i)^{\frac{-N_i m}{d(\alpha_i)}}.$$

Лема 4 ([4], с. 115). *Нехай* $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, $4\gamma^3 - \alpha\gamma - \beta = 0$. *Тоді*

$$\deg\gamma \geqslant \deg\mathbb{Q}(\alpha,\beta)\min{}^{-1}(d(\alpha), d(\beta)),$$

$$L(\gamma) < \exp(\deg\mathbb{Q}(\alpha,\beta)(d^{-1}(\alpha)\ln L(\alpha) + d^{-1}(\beta)\ln L(\beta) + 5)),$$

де $d(\gamma)$ *та* $L(\gamma)$ – *степінь та довжина алгебраїчного числа* γ.

Лема 5 ([5], с. 78). *Функції* $\sigma(z)$ *та* $\sigma(z)\wp(z)$ *цілі і для* $M > 1$ *виконуються оцінки* $|\sigma^2(z)\wp(z)|_{|z|\leqslant M}, |\sigma(z)|_{|z|\leqslant M} \leqslant C_1^{M^2}$.

Якщо ε – *віддаль від найближчого полюса* $\wp(z)$ *до* z_0 *і* $|z_0| \leqslant M$, *то* $|\sigma(z_0)| \geqslant \varepsilon C_2^{-M^2}$, *де* C_1, C_2 – *сталі, залежні тільки від основних періодів* $\wp(z)$.

Лема 6 ([3], с. 58). *Нехай* R_1, $R_2 \in \mathbb{R}$, $8 < 4R_1 < R_2$, $f(z)$ *регулярна в крузі* $|z| \leqslant R_2$, E – *множина з* $\mathcal{D}^2$ *точок, які належать кругу* $|z| \leqslant R_1$, *віддаль між якими для кожної пари точок не менше* ε, $0 < \varepsilon < 1$. *Тоді*

$$|f(z)|_{|z|\leqslant R_1} \leqslant 2|f(z)|_{|z|\leqslant R_2}\left(\frac{4R_1}{R_2}\right)^{\mathcal{D}^2 S} + 2\mathcal{D}R_1^{-1}\left(\frac{33R_1}{\varepsilon\mathcal{D}}\right)^{\mathcal{D}^2 S}\max_{x\in E, 0\leqslant s\leqslant S}\left|\frac{f^{(s)}(x)}{s!}\right|.$$

Лема 7 ([6]). *Нехай* $\alpha_\varkappa \in \mathbb{C}$, $y_t \in \mathbb{Z}$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l_1=0}^{q-1}\sum_{l_2=0}^{q-1} D_{k,l_1,l_2} z^k \wp_1^{l_1}(z)\wp_2^{l_2}(z),\ \Delta = \det(\wp_1^{l_1}(\alpha_\varkappa))_{l_1,\varkappa=0,\ldots,q-1} \neq 0,$$

$$\Delta(\varkappa) = \det(\wp_2^{l_2}(2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa))_{l_2,y_t=0,\ldots,q-1} \neq 0,$$

$$\Delta(y_t,\varkappa) = \det((2x\omega + 2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa)^k)_{k=0,\ldots,q_0-1;x=0,\ldots,\pm(x_1-1)} \neq 0,\ x_1 = \frac{q_0+1}{2},$$

$\Delta_{l_1,\varkappa}$ – *алгебраїчне доповнення елемента* $\wp_1^{l_1}(\alpha_\varkappa)$, $\Delta_{l_2,y_t}(\varkappa)$ – *алгебраїчне доповнення елемента* $\wp_2^{l_2}(2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa)$, $\Delta_{k,x}(y_t,\varkappa)$ – *алгебраїчне доповнення елемента* $(2x\omega + 2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa)^k$.

Тоді

$$D_{k,l_1,l_2} = \sum_{x=-x_1+1}^{x_1-1} \sum_{t=0}^{q-1} \sum_{\varkappa=0}^{q-1} f(2x\omega + 2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa) \frac{\Delta_{l_1,\varkappa}}{\Delta} \frac{\Delta_{l_2,y_t}(\varkappa)}{\Delta(\varkappa)} \frac{\Delta_{k,x}(y_t,\varkappa)}{\Delta(y_t,\varkappa)}.$$

Лема 8 ([6]). *Нехай $\wp(z)$ – еліптична функція Вейєрштрасса, $\widetilde{\omega_1}$ та $\widetilde{\omega_2}$ – деяка фіксована пара їх основних періодів, $\widetilde{\omega}(n,m) = 2n\widetilde{\omega_1} + 2m\widetilde{\omega_2}$, $0 < \delta < 1$, $Z_0(\delta)$ – множина точок основного паралелограма періодів, які не входять в області $|\widetilde{\omega}(n_1,n_2) - 2z| < 4\delta$ $(n_1,n_2 = 0,1,2)$. Розділимо $Z_0(\delta)$ на вісім частин $Z_i(\delta)$ (i=1,...,8) діагоналями основного паралелограма і прямими, що проходять через середини його сторін. До кожної з цих частин приєднаємо всі точки, віддалені не більше як на δ^2 від її межі. Отримані замкнені області позначимо $Y_i(\delta)$ (i=1,...,8). Тоді $\exists\delta_1\forall\delta < \delta_1\exists C_0$ такі, що для $z_1 = \widetilde{\omega}(m_1,m_2) + v_1$, $z_2 = \widetilde{\omega}(k_1,k_2) + v_2$, $m_1,m_2,k_1,k_2 \in \mathbb{Z}$, $v_1,v_2 \in Y_i(\delta)$ отримаємо*

$$|\wp(z_1) - \wp(z_2)| \geqslant C_0|v_1 - v_2|.$$

Лема 9 ([2], с. 107). *Нехай $a_1,...,a_m$ – різні числа, Δ – визначник Вандермонда $|a_g^b|_{g=1,\dots,m,b=0,\dots,m-1}$, Δ_g^b – алгебраїчне доповнення елемента $|a_g^b|$. Тоді*

$$\sum_{b=0}^{m-1} \left|\frac{\Delta_g^b}{\Delta}\right| \leqslant \prod_{t=1,t\neq g}^{m} \frac{1+|a_t|}{|a_g - a_t|}.$$

Доведення теореми. Нехай для достатньо великого $\lambda \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$|\omega - \xi_0| + |g_{1,2} - \xi_1| + |g_{1,3} - \xi_2| + |g_{2,2} - \xi_3| + |g_{2,3} - \xi_4| < \exp(-\lambda^9 N^3). \tag{3}$$

Позначимо через $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ твірні елементи поля $\mathbb{Q}(\xi_0,\dots,\xi_4)$,

$$s_0 = [\lambda^{5,5}N^2],\ x_0 = [\lambda N],\ x_1 = [\lambda^3 N],\ q = [\lambda^{2,25}N],\ q_0 = 2[\lambda^3 N] - 1. \tag{4}$$

Розглянемо функцію

$$\begin{gathered} f(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l_1=0}^{q-1} \sum_{l_2=0}^{q-1} C_{k,l_1,l_2} z^k \wp_1^{l_1}(z) \wp_2^{l_2}(z), \\ C_{k,l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{k,l_1,l_2,\tau}\zeta_\tau,\ C_{k,l_1,l_2,\tau} \in \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{5}$$

З леми 1 та (5) отримаємо

$$\begin{gathered} f^{(s)}((2x+1)\omega) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l_1=0}^{q-1} \sum_{l_2=0}^{q-1} \sum_{\tau=1}^{n} C_{k,l_1,l_2,\tau}\zeta_\tau \sum_{s_1+s_2+s_3=s} \frac{s!}{s_1!s_2!s_3!} \times \\ \times \frac{k!}{(k-s_3)!}((2x+1)\omega)^{k-s_3} \prod_{i=1}^{2} \sum_{2a_i+4c_i=s_i+2l_i} d^{(i)}_{a_i,0,c_i}(l_i,s_i)\wp_i^{a_i}(\omega)(\wp_i''(\omega))^{c_i}. \end{gathered} \tag{6}$$

Розглянемо $f^{(s)}((2x+1)\omega)$ як лінійні форми від $C_{k,l_1,l_2,\tau}$. З леми 1 та (4) отримаємо оцінку коефіцієнтів $A_{k,l_1,l_2,\tau}(x,s)$ форм (6) при $(x,s) \in \Omega[4x_1,s_0]$

$$|A_{k,l_1,l_2,\tau}| < \exp(-C_1\lambda^{5,6} N^2 \ln N). \tag{7}$$

Покладемо $m_0 = 2(2x_0 - 1)$, $\mu = nq_0q^2$, $N_0 = [\exp(\lambda^{6,25}N^3)] + 1$. З леми 2, (4) та (7) випливає, що існує нетривіальний набір $C_{k,l_1,l_2,\tau}$, для яких справджуються оцінки

$$|f^{(s)}((2x+1)\omega| < \exp(-\lambda^{6,25}N^3), (x,s) \in \Omega[x_0, s_0],$$
$$|C_{k,l_1,l_2,\tau}| < \exp\left(5\lambda^{5,75}\frac{N^3}{n}\right). \tag{8}$$

Нехай β_1 – найближчий до $\wp_1(\xi_0)$ корінь рівняння $4z^3 - \xi_1 z - \xi_2 = 0$, β_2 – найближчий до $\wp_2(\xi_0)$ корінь рівняння $4z^3 - \xi_3 z - \xi_4 = 0$. Тоді з (3) та (4) отримаємо

$$|\wp_i(\omega) - \beta_i| < C_2 \exp\left(-\frac{\lambda^9}{3}N^3\right), \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

Якщо $\gamma_1 = 6\beta_1^2 - \xi_1/2$, $\gamma_2 = 6\beta_2^2 - \xi_3/2$, то з (9) матимемо

$$|\wp_i''(\omega) - \gamma_i| < C_3 \exp\left(-\frac{\lambda^9}{3}N^3\right), \quad i = 1, 2. \tag{10}$$

Визначимо числа $f_{x,s}$:

$$f_{x,s} = \sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l_1=0}^{q-1}\sum_{l_2=0}^{q-1}\sum_{\tau=1}^{n} C_{k,l_1,l_2,\tau}\zeta_\tau \sum_{s_1+s_2+s_3=s} \frac{s!}{s_1!s_2!s_3!}\frac{k!}{(k-s_3)!}\times$$
$$\times((2x+1)\xi_0)^{k-s_3}\prod_{i=1}^{2}\sum_{2a_i+4c_i=s_i+2l_i} d_{a_i,0,c_i}^{(i)}(l_i, s_i)\beta_i^{a_i}\gamma_i^{c_i}. \tag{11}$$

З (4), (9) і (10) для $(x,s) \in \Omega[4x_1, s_0]$ отримаємо

$$|f^{(s)}((2x+1)\omega) - f_{x,s}| < \exp\left(-\frac{\lambda^9}{4}N^3\right). \tag{12}$$

Для $(x,s) \in \Omega[x_0, s_0]$ з (8) і (12) випливає

$$|f_{x,s}| < \exp\left(-\frac{\lambda^{6,75}}{2}N^3\right). \tag{13}$$

Розглянемо числа $2^{s_0}f_{x,s}$ як значення многочленів $P_{x,s} \in \mathbb{Z}[\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \beta_1, \beta_2]$. При $(x,s) \in \Omega[4x_1, s_0]$

$$L(P_{x,s}) < \exp\left(6\lambda^{5,75}\frac{N^3}{n}\right). \tag{14}$$

З лемм 3, 4 і оцінки (14) для $f_{x,s} \neq 0, (x,s) \in \Omega[x_0, s_0]$ отримаємо

$$|f_{x,s}| > \exp(-\lambda^6 N^3). \tag{15}$$

Оцінки (13) та (15) суперечливі, тому

$$f_{x,s} = 0, \quad (x,s) \in \Omega[x_0, s_0]. \tag{16}$$

З (12) і (16) маємо

$$|f^{(s)}((2x+1)\omega)| < \exp\left(-\frac{\lambda^9}{4}N^3\right), \quad (x,s) \in \Omega[x_0, s_0]. \tag{17}$$

Покажемо, що (17) виконується для $(x,s) \in \Omega[2x_1, s_0]$.

Основна лема. *Нехай (16) і (17) виконуються для* $(x,s) \in \Omega[\widetilde{x}_p, s_0]$, $\widetilde{x}_p = 2^p x_0$, $2^p < 2\lambda^2$. *Тоді вони виконуються і для* $(x,s) \in \Omega[\widetilde{x}_{p+1}, s_0]$.

Доведення леми. Позначимо через δ паралелограм, який обмежує область $\{z : z = 2t\omega + 2t_1\omega_1, |t|, |t_1| < \widetilde{x}_{p+1}\}$,

$$|z|_\delta = C_4 \widetilde{x}_p. \tag{18}$$

Визначимо

$$\begin{gathered}\rho = \frac{1}{2}\min(|u\omega + u_1\omega_1|, |v\omega + v_2\omega_2|), u, u_1, v, v_2 \in \mathbb{Z},\, u^2 + u_1^2 \neq 0,\\ v^2 + v_2^2 \neq 0; \quad R_1 = C_4\widetilde{x}_p + \rho, \quad R_2 = 12R_1,\end{gathered} \tag{19}$$

де C_4 визначається в (18). Нехай $\Delta_i = \{z : z = (2t+1)\omega + +(2t_i+1)\omega_i, |t| \leqslant T, |t_i| \leqslant T_i, i = 1,2\}$, $\quad \delta_1 = \partial(\Delta_1 \cap \Delta_2)$.

Виберемо T, T_1 і T_2 найменшими цілими числами, для яких круг $|z| \leqslant R_2$ міститься в $\partial(\Delta_1 \cap \Delta_2)$. Покладемо

$$T = C_5\widetilde{x}_p,\, T_1 = C_6\widetilde{x}_p,\, T_2 = C_7\widetilde{x}_p,\, |z|_{\delta_1} < C_8\widetilde{x}_p, \tag{20}$$

$$F(z) = f(z)\sigma_1^{2q}(z)\sigma_2^{2q}(z). \tag{21}$$

З (20) і леми 5 отримаємо

$$|F(z)|_{\delta_1} < \exp\left(6\lambda^{5,75}\frac{N^3}{n} + 2C_9\lambda^{4,25}2^{2p}N^3\right). \tag{22}$$

З леми 5 і включення $(x,s) \in \Omega[\widetilde{x}_p, s_0]$ матимемо

$$|(\sigma_1^{2q}(z)\sigma_2^{2q}(z))^{(s)}|_{z=(2x+1)\omega} < \exp(\lambda^{5,7}N^2\ln N + 2C_9\lambda^{4,25}2^{2p}N^3). \tag{23}$$

Використовуючи припущення леми 1 і (23), для $(x,s) \in \Omega[\widetilde{x}_p, s_0]$ отримаємо таку оцінку:

$$|F^{(s)}((2x+1)\omega)| < \exp\left(-\frac{\lambda^9}{5}N^3\right). \tag{24}$$

З леми 6, (2), (19), (22) і (24) маємо, що

$$|F(z)|_{|z| \leqslant R_1} < \exp(-2^{2p}\lambda^{6,5}N^3). \tag{25}$$

Оскільки з леми 5 випливає, що для достатньо малого ε-околу $V(\varepsilon, (2x+1)\omega)$ точки $(2x+1)\omega$ при $|x| \leqslant \widetilde{x}_{p+1}$ виконується оцінка

$$\min_{z \in V(\varepsilon,(2x+1)\omega)} |(\sigma_1^{2q}(z)\sigma_2^{2q}(z))^{(s)}| > \exp(-2^{2p}\lambda^{4,35}N^3), \tag{26}$$

то з (21), (25) і (26) для $|x| \leqslant \widetilde{x}_{p+1}$ отримаємо

$$|f(z)|_{V(\varepsilon,(2x+1)\omega)} < \exp(-2^{p-1}\lambda^{6,5}N^3). \tag{27}$$

З (27) для $(x,s) \in \Omega[\widetilde{x}_{p+1}, s_0]$ випливає оцінка

$$|f^{(s)}((2x+1)\omega)| < \exp\left(-\frac{2^p}{3}\lambda^{6,5}N^3\right). \tag{28}$$

З (12) і (28) для $(x,s) \in \Omega[\widetilde{x}_{p+1}, s_0]$ отримаємо

$$|f_{x,s}| < \exp(-2^{p-2}\lambda^{6,5}N^3). \tag{29}$$

Оцінки (15) і (29) суперечливі, тому $f_{x,s} = 0, \quad (x,s) \in \Omega[\widetilde{x}_{p+1}, s_0]$, що разом з (12) і доводить основну лему.

Оцінимо $|C_{k,l_1,l_2}|$ зверху. Нехай δ_1', δ_1'' дорівнюють числу δ_1, визначеному в лемі 8, застосованій до $\wp_1(z), \wp_2(z)$ відповідно,

$$\delta_2 = |m\omega + m_1\omega_1 + m_2\omega_2|, \; m, m_2 \in \mathbb{Z}, \; m_1 = 1, \ldots, 9. \tag{30}$$

Покладемо в лемі 8

$$\delta = \frac{1}{4}\min(\delta_1', \delta_1'', \delta_2, \rho). \tag{31}$$

Нехай $a = \frac{2\omega+\omega_1}{4} \in Y_1$, де Y_1 визначене в лемі 8, застосованій до $\wp_1(z)$. Виберемо ε_1 з умови $V(\varepsilon_1, a) = \{z : |z - a| < \varepsilon_1\} \subset Y_1$. Для $\alpha_\varkappa = \left(1 - \frac{\varkappa+1}{\lambda q}\right)a, \quad \varkappa = 0, 1, \ldots, (q-1)$, з леми 8 отримаємо

$$|\wp_1(\alpha_\varkappa) - \wp_1(\alpha_t)| > C_{10}(\lambda q)^{-1}, \quad \varkappa \neq t. \tag{32}$$

Тепер оцінимо знизу потрібні нам величини вигляду

$$|\wp_2(2y\omega_1 + \alpha_\varkappa) - \wp_2(2y'\omega_1 + \alpha_\varkappa)|, \quad y \neq y'.$$

Для цього використаємо лему 8, застосовану до $\wp_2(z)$. Нехай Y_1', Z_1' відповідають областям Y_1, Z_1 в лемі 8. Серед точок $2y\omega_1 + \alpha_\varkappa$, $y = 0, \pm 1, \cdots \pm (x_1 - 1)$, виберемо ті, для яких існують такі $y_t, l, h \in \mathbb{Z}$, що $2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa + 2l\omega + 2h\omega_2 \in Y_1'$. Нехай існують такі $y, m, k \in \mathbb{Z}$, що $2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa = m\omega + k\omega_2 + 2\theta\delta$, $|\theta| < 1$. Покладемо

$$2(y+v)\omega_1 + \alpha_\varkappa = u_v\omega + w_v\omega_2 + \mu_v, \quad v = 1, \ldots, 9.$$

Тоді $\quad 2v\omega_1 = (u_v - m)\omega + (w_v - k)\omega_2 + \mu_v - 2\theta\delta$. З (30) і (31) отримаємо

$$|\mu_v| \geqslant |2v\omega_1 - (u_v - m)\omega - (w_v - k)\omega_2| - 2\delta > 2\delta.$$

Остання рівність показує, що з кожних дев'яти точок $2y\omega 1 + \alpha\varkappa$, $y = l, \ldots, l+8$, лише одна не належить області $Z_0'(\delta)$. Серед областей $Z_i'(\delta)$, $i = 1, \ldots, 8$, існує хоча б одна (нехай $Z_1'(\delta)$), якій належать не менше $\frac{1}{9}(2x_1 - 1)$ точок вигляду $2y\omega_1 + \alpha_\varkappa + 2m\omega + 2k\omega_2$, $y = 0, \pm 1, \cdots \pm (x_1 - 1)$. Виберемо серед них рівно q і позначимо відповідні їм точки вигляду $2y\omega_1 + \alpha_\varkappa$ через $2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa$, $t = 0, \ldots, q-1$, $|y_t| < x_1$. Нехай

$$2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa = 2m_t\omega + 2k_t\omega_2 + \mu_t, \quad 2y_t'\omega_1 + \alpha_\varkappa = 2m_t'\omega + 2k_t'\omega_2 + \mu_t'.$$

З леми 8 і (1) отримаємо

$$|\wp_2(2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa) - \wp_2(2y_t'\omega_1 + \alpha_\varkappa)| > C_{11}|\mu_t - \mu_t'| > C_{12}\exp(-\lambda^6 N^2), \quad y \neq y'. \tag{33}$$

Згідно з лемою 9, (32) і (33),

$$\left|\frac{\Delta_{l_1,\varkappa}}{\Delta}\right| < \exp(\lambda^{3,5} N \ln N), \quad \left|\frac{\Delta_{l_2,y_t}(\varkappa)}{\Delta(\varkappa)}\right| < C_{13}^q (C_{12}\exp(-\lambda^6 N^2))^q < \exp(\lambda^{8,4} N^3),$$
$$\left|\frac{\Delta_{k,x}(y_t,\varkappa)}{\Delta(y_t,\varkappa)}\right| < C_{14}^{q_0} q_0^{q_0} < \exp(\lambda^5 N \ln N). \tag{34}$$

Оцінимо зверху $|f(2x\omega + 2y_t\omega_1 + \alpha_\varkappa)|$. Нехай $p_0 \in \mathcal{N}$, $\lambda^2 \leqslant 2^{p_0} < 2\lambda^2$, R_1, T, T_1, T_2 відповідає p_0 в (19) і (20). Тоді з (25) випливає

$$|F(z)|_{|z| \leqslant R_1} < \exp(-\lambda^{8,4} N^3). \tag{35}$$

Оскільки $V(\varepsilon_1, 2x\omega + 2y_t\omega_1) \subset \{z : |z| \leqslant R_1\}$, то оцінка (35) залишається правильною і для $z \in V(\varepsilon_1, 2x\omega + 2y_t\omega_1)$. З леми 5 випливає, що для тих самих z виконується нерівність

$$|\sigma_1^{2q}(z)\sigma_2^{2q}(z)| > \exp(-\lambda^{8,35}N^3). \tag{36}$$

З (21), (35) і (36) отримаємо

$$|f(z)|_{V(\varepsilon_1, 2x\omega+2y_t\omega_1)} < \exp\left(-\frac{\lambda^{8,35}}{2}N^3\right). \tag{37}$$

Використавши (34) і (37), з леми 2 матимемо

$$|C_{k,l_1,l_2}| < \exp\left(-\frac{\lambda^{8,5}}{3}N^3\right). \tag{38}$$

Оскільки $C_{k,l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{k,l_1,l_2,\tau}\xi_0^{u_0(\tau)} \cdot \ldots \cdot \xi_4^{u_4(\tau)}$, то їх можна розглядати як значення многочленів з $\mathbb{Z}[v_0, \ldots, v_4]$ у точці $(\xi_0, \ldots, \xi_4)$, довжини яких не перевищують $n \max |C_{k,l_1,l_2,\tau}|$, а степінь за змінною v_i не перевищує $n_i - 1$. З леми 3 для $C_{k,l_1,l_2} \neq 0$ отримаємо $|C_{k,l_1,l_2}| > \exp(-\lambda^7 N^3)$, що суперечить (38). Тому всі C_{k,l_1,l_2} дорівнюють нулю. Враховуючи, що серед $C_{k,l_1,l_2,\tau}$ є число відмінне від нуля, то серед C_{k,l_1,l_2} також є число відмінне від нуля. Отримана суперечність показує, що (3) не виконується. Вибравши $\Lambda \geqslant \lambda^9$, отримаємо, що виконується (2), тобто теорема правильна.

1. Schneider T. *Trascenden. periodisher Functionen. 2*// J. reine und angew. Math. – 1934. – 172, N 1. – P. 65–79.
2. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. – М.: 1982. – 311 с.
3. Reyssat E. *Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exp*// Bull. Soc. Math. France. – 1980. – N 1. – P.47–79.
4. Холявка Я.М. О совместных приближениях инвариантов эллиптической функции алгебраическими числами. – Диофантовы приближения, ч.2, Изд. МГУ, 1986. – С. 114-121.
5. Masser D. *Elliptic functions and transcendence*// Lect. Notes Math. – 1975. – Vol.437. – P.1–143.
6. Фельдман Н.И. *Эллиптический аналог одного неравенства А.О.Гельфонда*// Труды Моск. мат. о-ва. – 1968. – Т. 18. – С. 65-76.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997

УДК 512.553

СПЕКТР РОЗШАРОВАНИХ ДОБУТКІВ КІЛЕЦЬ

Р. В. Вовк

Vovk R.V. Spectrum of fiber products of rings. Torsion theory over fibre products of associative rings and spectrum as set of prime torsion theories are investigated. Connection between a spectrum of fibre product of rings and spectra of the appropriate multipliers is studied.

Дослідження розшарованих добутків об'єктів різних категорій займає вагоме місце в топології, алгебраїчній K-теорії, алгебраїчній геометрії, в теорії асоціативних кілець тощо. Ряд праць присвячено вивченню розшарованих добутків комутативних і некомутативних кілець [3-7], [10], [14], [15], проективних і ін'єктивних модулів над розшарованими добутками кілець [11], [18]. Разом з тим важливим є вивчення спектру розшарованого добутку кілець. Поряд із загальноприйнятим розумінням спектру в комутативному випадку існує відмінність при розгляді спектру некомутативних кілець. Існує ряд статтей, в яких досліджується спектр як множина всіх первинних ідеалів кільця. Загальновідомим є також поняття первинного скруту і вивчення спектру кільця як множини первинних скрутів, відомого ще в літературі як спектру Попеску. Дана праця присвячена дослідженню спектру розшарованого добутку кілець саме в такому розумінні. Основним результатом є теорема 9, яка показує структуру спектру розшарованого добутку кілець.

1. Основні терміни і позначення. Всі кільця вважатимемо асоціативними з одиницею, всі модулі – унітарні ліві модулі. Нехай $\mathcal{C}$ абелева категорія, $\alpha_1 : C_1 \to C_0$ і $\alpha_2 : C_2 \to C_0$ морфізми в $\mathcal{C}$. Розшарованим добутком морфізмів α_1 і α_2, або, іншими словами об'єктів C_1 і C_2 над C_0, є об'єкт C із $\mathcal{C}$ разом з такими морфізмами $\pi_1 : C \to C_1$ і $\pi_2 : C \to C_2$, що виконуються умови:

1) $\alpha_1\pi_1 = \alpha_2\pi_2$;

2) для кожного об'єкта X і будь-яких морфізмів $\xi_1 : X \to C_1$ і $\xi_2 : X \to C_2$, таких, що $\alpha_1\xi_1 = \alpha_2\xi_2$, існує і єдиний такий морфізм $\gamma : X \to C$, що $\pi_1\gamma = \xi_1$ і $\pi_2\gamma = \xi_2$. Діаграма

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\pi_1} & C_1 \\ {\scriptstyle\pi_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_1} \\ C_2 & \xrightarrow[\alpha_2]{} & C_0 \end{array}$$

називається діаграмою розшарованого добутку або універсальним квадратом. Розшарований добуток визначається однозначно, з точністю до ізоморфізму (див. [16]) і позначатимемо його через $C_1 \times_{C_0} C_2$.

Дуальним до розшарованого добутку є поняття корозшарованого добутку, який також визначається однозначно, з точністю до ізоморфізму (див. [16]). Корозшарований добуток позначатимемо $C_1 \sqcup_{C_0} C_2$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 13B30, 13D30.

У категорії A-Mod розшарований добуток задається більш конкретно:

$$C_1 \times_{C_0} C_2 = \{(x,y) \in C_1 \times C_2 \mid \alpha_1(x) = \alpha_2(y) \in C_0\}.$$

Для корозшарованого добутку має місце зображення:

$$C_1 \sqcup_{C_0} C_2 = (C_1 \oplus C_2)/C', \text{ де } C' = \{(\beta_1(x), -\beta_2(x)) \mid x \in C_0\}.$$

У категорії асоціативних кілець Rings розшаровані і корозшаровані добутки також існують і задаються цілком аналогічним чином.

Нехай A_1, A_2, A_0 – кільця і задано гомоморфізми $f_1 : A_1 \to A_0$, $f_2 : A_2 \to A_0$. Побудуємо розшарований добуток A кілець A_1 і A_2 над A_0, який задається універсальним квадратом

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"'] & A_0 \end{tikzcd} .$$

Надалі будемо вважати, що f_2 і p_1 сюр'єктивні гомоморфізми. Використовуватимемо такі позначення:

$$\begin{aligned} P_1 &= Hom_A(A_1, -) : A\text{-}Mod \to A_1\text{-}Mod, \\ P_2 &= Hom_A(A_2, -) : A\text{-}Mod \to A_2\text{-}Mod, \\ F_1 &= Hom_{A_1}(A_0, -) : A_1\text{-}Mod \to A_0\text{-}Mod, \\ F_2 &= Hom_{A_2}(A_0, -) : A_2\text{-}Mod \to A_0\text{-}Mod. \end{aligned}$$

Деталі можна знайти в [9], [11].

Побудуємо розшарований добуток категорій A_1-Mod і A_2-Mod. Позначимо через $\mathcal{C}$ категорію, об'єктами якої є трійки (M_1, M_2, α), де $M_1 \in A_1$-Mod, $M_2 \in A_2$-Mod і $\alpha : F_2M_2 \to F_1M_1$ є A_0-ізоморфізмом. Морфізмами з об'єкта (M_1, M_2, α) в об'єкт (M_1', M_2', α') в категорії $\mathcal{C}$ є такі пари (σ_1, σ_2), де $\sigma_1 : M_1 \to M_1'$ – A_1-гомоморфізм і $\sigma_2 : M_2 \to M_2'$ – A_2-гомоморфізм, що діаграма

$$\begin{tikzcd} F_1M_1 \arrow[r, "F_1\sigma_1"] & F_1M_1' \\ F_2M_2 \arrow[r, "F_2\sigma_2"'] \arrow[u, "\alpha"] & F_2M_2' \arrow[u, "\alpha'"'] \end{tikzcd}$$

є комутативною.

Категорія $\mathcal{C}$ є адитивною зі скінченними добутками (див., наприклад, [1], [8]).

Для кожного об'єкта $(M_1, M_2, \alpha) \in \mathcal{C}$ можна побудувати діаграму

$$\begin{tikzcd} M & M_1 \arrow[l, "\pi_1"'] \\ M_2 \arrow[u, "\pi_2"] & M_0 \arrow[l, "\varphi_2"] \arrow[u, "\varphi_1\alpha"'] \end{tikzcd} ,$$

яка є коуніверсальним квадратом в категорії A-Mod, де $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ і $M_0 = F_2M_2$. Отриманий модуль $M \in A$-Mod є корозшарованим добутком модулів M_1 та M_2 над M_0.

Для кожного об'єкта $(M_1, M_2, \alpha) \in \mathcal{C}$ покладемо $M = T(M_1, M_2, \alpha)$. Тоді $T : \mathcal{C} \to A - Mod$ є функтором, який індукує еквівалентність між повною підкатегорією категорії $\mathcal{C}$, яка породжена об'єктами $(E_1, E_2, \alpha) \in \mathcal{C}$, де E_1 і E_2 – ін'єктивні A_1- і A_2-модулі, і повною підкатегорією категорії A-Mod, яка породжена ін'єктивними A-модулями (див. [11]).

Гратку всіх скрутів, визначених в категорії A-Mod, будемо позначати через A-$Tors$. Якщо τ і σ скрути в категорії A-Mod такі, що виконуються еквівалентні умови: 1) кожний τ-періодичний лівий A-модуль є σ-періодичним; 2) кожний σ-напівпростий лівий A-модуль є τ-напівпростим, писатимемо $\tau \leqslant \sigma$. Для будь-якого скруту τ в категорії A-Mod можна стверджувати, що $\xi \leqslant \tau \leqslant \chi$, де ξ – тривіальний скрут, а χ – невласний скрут.

Нагадаємо, що два ін'єктивних A-модулі E_1 і E_2 є еквівалентними, якщо кожен з них вкладається в прямий добуток копій іншого. Еквівалентні модулі є котвірними одного і того ж скруту.

Нехай S непорожня підмножина в A-$Tors$. Для кожного елемента $\tau \in S$ візьмемо модуль E_τ, який є ін'єктивним котвірним даного скруту τ. Тоді $E = \prod\limits_{\tau \in S} E_\tau$ є ін'єктивним лівим A-модулем. Скрут, копороджений модулем E, позначатимемо через $\bigwedge S$.

Якщо $\tau \in S$, то кожний τ-напівпростий лівий A-модуль вкладається в прямий добуток копій ін'єктивного модуля E_τ і, отже, в прямий добуток копій модуля E. Тому кожний такий модуль є також $\bigwedge S$-напівпростим. Звідси робимо висновок, що $\wedge S \leqslant \tau$ для кожного скруту $\tau \in S$.

Легко бачити, що $\bigwedge S$ є точною нижньою межею для S, де S – непорожня підмножина в A-$Tors$. Точну верхню межу множини S позначатимемо через $\bigvee S$. Це буде скрут $\bigwedge S'$, де S' – множина всіх тих скрутів σ в A-$Tors$, що $\tau \leqslant \sigma$ для кожного елемента $\tau \in S$. Відповідно до наведених вище позначень покладемо $\bigvee \varnothing = \xi$ і $\bigwedge \varnothing = \chi$. Таким чином, сім'я всіх скрутів A-$Tors$ є повною граткою.

Нагадаємо, що гомоморфізмом (антигомоморфізмом) граток $\mathcal{L}$ і $\mathcal{L}_1$ є відображення $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_1$ таке, що для будь-яких $a, b \in \mathcal{L}$ виконується

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \quad (f(a \vee b) = f(a) \wedge f(b)),$$

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \quad (f(a \wedge b) = f(a) \vee f(b)).$$

Відомо, що $a \leqslant b$ тоді і тільки тоді, коли $a = a \wedge b$, і, отже, гратковий гомоморфізм зберігає порядок. Аналогічно антигомоморфізм обертає порядок. Бієктивний гомоморфізм (антигомоморфізм) граток є ізоморфізмом (антиізоморфізмом).

Зрозуміло, що кожний кільцевий гомоморфізм $f : R \to S$ повинен індукувати певну відповідність між гратками скрутів R-$Tors$ і S-$Tors$. Така відповідність вивчалась у тому випадку, коли f є плоским епіморфізмом у категорії кілець. Вона випливає з результатів А. І. Кашу про поведінку скрутів в ситуації спряження між категоріями R-Mod та S-Mod. Деяку інформацію з цього наведено в [13] та [18].

2. Відповідність між скрутами в категоріях модулів, визначена гомоморфізмом кілець. У цьому параграфі ми ставимо за мету побудувати гомоморфізм граток $\widetilde{f}^{-1} : S\text{-}Tors \longrightarrow R\text{-}Tors$, який повинен відображати лівий спектр кільця S в лівий спектр кільця R. Нас будуть також цікавити ті властивості скрутів, які зберігаються при дії гомоморфізму $\widetilde{f}^{-1}$.

Наведемо спочатку формальне означення дії граткового гомоморфізму $\widetilde{f}^{-1}$ і переконаємося в його коректності. Після цього пояснимо мотиви, які викликають таке позначення цього гомоморфізму.

Нехай $\sigma \in S$-$Tors$ і M – деякий ін'єктивний котвірний скруту σ. Будемо розглядати M як R-модуль, структура якого на M задається за допомогою гомоморфізму f. Тоді через $\widetilde{f}^{-1}(\sigma)$ позначимо скрут в категорії R-Mod, копороджений ін'єктивною оболонкою $E({}_RM)$

модуля ${}_RM$. Нам потрібно переконатися, що дія $\widetilde{f}^{-1}$ не залежить від конкретного вибору ін'єктивного котвірного модуля M скруту σ. Іншими словами, нам необхідно встановити, що еквівалентні ін'єктивні S-модулі ${}_SM$ і ${}_SN$ в категорії S-Mod мають еквівалентні образи $E({}_RM)$ і $E({}_RN)$ в категорії R-Mod. Цей факт випливає з такої леми.

Лема 1. *Якщо $E_1 \geqslant E_2$ – ін'єктивні модулі в категорії S-Mod, то $E({}_RE_1) \geqslant E({}_RE_2)$ в категорії R-Mod.*

Доведення. Нехай ін'єктивний S-модуль E_1 є підмодулем ін'єктивного S-модуля $({}_SE_2)^I$, де I – деяка множина індексів. Тоді $(E({}_RE_2))^I$, розглядуваний як R-модуль, є ін'єктивним. Крім цього, $E({}_RE_1) \subseteq (E({}_RE_2))^I$, оскільки ${}_RE_1 \subseteq (E({}_RE_2))^I$. Отже, $E({}_RE_1) \geqslant E({}_RE_2)$. Лемуа доведено.

Лема 2. *Відображення $\widetilde{f}^{-1}$: S-$Tors \longrightarrow R$-$Tors$ є гомоморфізмом повних граток.*

Доведення. Нехай $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ – деяка сім'я скрутів у категорії S-Mod. Для кожного $i \in I$ виберемо деякий ін'єктивний котвірний E_i скруту σ_i. Тоді згідно з означенням ін'єктивним котвірним скруту $\sigma = \bigwedge\limits_{i\in I} \sigma_i$ буде модуль $\prod\limits_{i\in I} E_{\sigma_i}$. Отже, скрут $\widetilde{f}^{-1}(\sigma)$ копороджується ін'єктивним модулем $E({}_R(\prod\limits_{i\in I} E_i)) = (\prod\limits_{i\in I} E({}_RE_i))$. Тому $\widetilde{f}^{-1}(\bigwedge\limits_{i\in I} \sigma_i) = \bigwedge\limits_{i\in I} \widetilde{f}^{-1}(\sigma_i)$, бо скрут $\bigwedge \widetilde{f}^{-1}(\sigma_i)$ копороджується ін'єктивним модулем $\prod\limits_{i\in I} E({}_RE_i)$. Ін'єктивний котвірний модуль скруту $\bigvee \sigma_i$ будується таким чином. Нехай V – множина всіх скрутів з S-$Tors$, які не менші за всі скрути σ_i, $i \in I$. Для кожного $\tau \in V$ нехай E_τ деякий ін'єктивний котвірний скруту τ. Тоді ін'єктивним котвірним скруту $\bigvee\limits_{i\in I} \sigma_i$ буде модуль $\prod\limits_{\tau\in V} E_\tau$. Отже, $\bigvee\limits_{i\in I} \sigma_i = \bigwedge\limits_{\tau\in V} \tau$. Оскільки $\bigvee \sigma_i \geqslant \sigma_i$, то $\widetilde{f}^{-1}(\bigvee\limits_{i\in I} \sigma_i) \geqslant \widetilde{f}^{-1}(\sigma_i)$ для кожного $i \in I$. Звідси одержуємо нерівність $\widetilde{f}^{-1}(\bigvee\limits_{i\in I} \sigma_i) \geqslant \bigvee\limits_{i\in I} \widetilde{f}^{-1}(\sigma_i)$.

Встановимо тепер протилежну нерівність до цієї. Ми маємо, що

$$\widetilde{f}^{-1}(\bigvee_{i\in I} \sigma_i) = \widetilde{f}^{-1}(\bigwedge_{\tau\in V} \tau) = \bigwedge_{\tau\in V} f^{-1}(\tau).$$

Отже, ін'єктивним котвірним для скруту $\widetilde{f}^{-1}(\bigvee\limits_{i\in I} \sigma_i)$ буде модуль $\prod\limits_{\tau\in V} E({}_RE_\tau)$. Далі знайдемо ін'єктивний котвірний для скруту $\bigvee\limits_{i\in I} \widetilde{f}^{-1}(\sigma_i)$. Розглянемо множину W всіх скрутів з R-$Tors$, що не є меншими за всі $\widetilde{f}^{-1}(\sigma_i)$, $i \in I$. Оскільки $\widetilde{f}^{-1}(\sigma_i) \leqslant \widetilde{f}^{-1}(\tau)$ для будь-яких $i \in I$ і $\tau \in V$, то $\widetilde{f}^{-1}(V) \subseteq W$. Якщо насправді $\widetilde{f}^{-1}(V) = W$, то скрут $\bigvee \widetilde{f}^{-1}(\sigma_i)$ має цей самий котвірний $\prod\limits_{\tau\in V} E({}_RE_\tau)$ і ми одержимо потрібну рівність. Припустимо тепер, що $W \neq \widetilde{f}^{-1}(V)$. Тоді існує скрут $\tau_0 \in W \setminus \widetilde{f}^{-1}(V)$. такий, що $\tau_0 \geqslant \widetilde{f}^{-1}(\sigma_i)$ для кожного $i \in I$ і τ_0 не можна одержати як $\widetilde{f}^{-1}(\tau)$ для кожного $\tau \in V$. Нехай E_0 ін'єктивний котвірний для скруту τ_0. Переведемо E_0 в S-модуль подіявши функтором $Hom_R(S,-)$ і одержимо S-модуль $Hom_R(S, E_0)$, який є ін'єктивним S-модулем. Цей модуль задає скрут σ_0 в S-$Tors$. Як відомо, функтор $Hom_R(S,-)$ зберігає порядок між ін'єктивними модулями, і тому $\sigma_0 \geqslant \sigma_i$ для кожного $i \in I$. Тепер модуль $E_0' = Hom_R(S, E_0)$ розглянемо як R-модуль і нехай τ_0' скрут, ін'єктивним котвірним якого є $E({}_RE_0')$. Покажемо, що $\tau_0' = \tau_0$. Для цього досить встановити, що $E({}_RE_0') \leqslant E_0$ і $E_0 \leqslant E({}_RE_0')$. Розглянемо відображення

$$E({}_RE_0') = E\big({}_R(Hom_R(S, E_0))\big) \xrightarrow{\xi} \prod_S E_0,$$

яке кожному R-гомоморфізму $\alpha : S \longrightarrow E_0$ ставить у відповідність елемент $(\alpha(s))_{s\in S}$. Очевидно, що ξ є гомоморфізмом R-модулів. Воно ін'єктивне, оскільки з рівності $(\alpha(s))_{s\in S} = (\alpha'(s))_{s\in S}$ випливає, що $\alpha = \alpha'$. Ми одержали вкладення $E_0' \longrightarrow \prod\limits_S E_0$, яке говорить, що $E_0' \geqslant E_0$. Лему доведено.

Нехай Λ – частково упорядкована множина. Нагадаємо, що функція ρ, визначена в категорії A-Mod із значеннями в Λ називається радикальною, якщо для кожної точної послідовності $0 \to N \to M$ в категорії A-Mod виконується $\rho(M) \leqslant \rho(N)$. Якщо Λ є граткою і $\rho : A\text{-}Mod \to \Lambda$ є радикальною функцією, то для кожного $\lambda \in \Lambda$ можна визначити іншу радикальну функцію $\rho' : A\text{-}Mod \to \Lambda$ за правилом $\rho' : M \mapsto \rho(M) \wedge \lambda$.

Якщо задано радикальну функцію $\rho : R\text{-}Mod \to \Lambda$, де Λ – частково упорядкована множина, то лівий A-модуль M називається ρ-первинним, якщо $\rho(M) = \rho(N)$ для будь-якого ненульового підмодуля N в M.

Функція $\chi(\_)$ є радикальною функцією, визначеною в A-Mod із значеннями в A-$Tors$. При цьому, кожному A-модулю M ставиться у відповідність скрут, копороджений ін'єктивною оболонкою $E(M)$. Модуль $M \in A\text{-}Mod$ є $\chi(\_)$-первинним тоді і тільки тоді, коли $\chi(M) = \chi(N)$ для будь-якого підмодуля N в M. Тобто ін'єктивні оболонки $E(M)$ і $E(N)$ копороджують один і той самий скрут. Кожний кокритичний лівий A-модуль є $\chi(\_)$-первинним.

Лема 3. *Нехай $f : A \to B$ – гомоморфізм кілець. Якщо модуль $M \in B\text{-}Mod$ є $\chi(\_)$-первинним, то він є $\chi(\_)$-первинним і як A-модуль.*

Доведення. Нехай модуль $M \in B\text{-}Mod$ є $\chi(\_)$-первинним. Тоді ін'єктивна оболонка $E(M)$ копороджує деякий скрут $\tau \in B\text{-}Tors$. Розглянемо $E(M)$ як A-модуль і знайдемо його ін'єктивну оболонку $\widetilde{E}(E(M))$. Позначимо через σ скрут, копороджений ін'єктивним модулем $\widetilde{E}(E(M))$.

Нехай $L \in A\text{-}Mod$ – будь-який ненульовий підмодуль A-модуля $E(M)$. Оскільки M є суттєвим в $E(M)$, то перетин $L' = L \cap M$ є ненульовим. Розглянемо B-модуль $BL' \subset {}_BM$. З того, що B-модуль M є $\chi(\_)$-первинним, отримуємо $\chi(BL') = \chi(M)$, тобто ін'єктивні модулі $E(BL')$ і $E(M)$ копороджують один скрут τ. Це означає, що існує деяка множина Ω така, що $E(M) \subset (E(BL'))^\Omega$. Розглядаючи ці котвірні як A-модулі, можна записати, що між їхніми ін'єктивними оболонками існує таке включення $\widetilde{E}(E(M)) \subset \widetilde{E}((E(BL'))^\Omega)$.

Враховуючи те, що модуль M є суттєвим в $E(M)$ і $E(M)$ є суттєвим в $\widetilde{E}(E(M))$, M є суттєвим підмодулем ін'єктивного модуля $\widetilde{E}(E(M))$, а це означає, що останній є ін'єктивною оболонкою для модуля M, тобто справджується рівність $\widetilde{E}(M) = \widetilde{E}(E(M))$. Аналогічно $\widetilde{E}(L) = \widetilde{E}(E(L))$. Таким чином, ми можемо записати

$$\widetilde{E}(M) \subset \widetilde{E}((E(BL'))^\Omega) = (\widetilde{E}(E(BL')))^\Omega \subset (\widetilde{E}(E(L)))^\Omega = (\widetilde{E}(L))^\Omega.$$

Включення $\widetilde{E}(L) \subset \widetilde{E}(M)$ є очевидним.

Таким чином, ми отримали, що ін'єктивні A-модулі $\widetilde{E}(L)$ і $\widetilde{E}(M)$ є еквівалентними. Це означає, що $\chi(L) = \chi(M)$ і тому A-модуль M є $\chi(\_)$-первинним. Лему доведено.

Нагадаємо, що скрут $\tau \subset A\text{-}Tors$ є первинним тоді і тільки тоді, коли $\tau = \chi(M)$ для деякого τ-кокритичного модуля M.

Нехай дано гомоморфізм кілець $f : A \to B$, первинний скрут $\tau \in B\text{-}Tors$ і τ-кокритичний модуль $M \in B\text{-}Mod$, тобто $E(M)$ копороджує скрут τ. Тоді через $\widetilde{f}^{-1}(\tau)$ позначатимемо скрут, копороджений ін'єктивною оболонкою $\widetilde{E}(E(M))$ в категорії $A\text{-}Mod$.

Лема 4. *Нехай $f : A \to B$ – гомоморфізм кілець. Якщо скрут $\tau \in B\text{-}Tors$ є первинним, то скрут $\widetilde{f}^{-1}(\tau) \in A\text{-}Tors$ також є первинним.*

Доведення. Нехай τ – первинний скрут в категорії $B\text{-}Mod$. Тоді існує деякий кокритичний B-модуль M, такий, що $\tau = \chi(M)$, тобто, іншими словами, ін'єктивна оболонка $E(M)$ копороджує скрут τ. B-модуль $E(M)$ можна разглядати як A-модуль. Позначимо через $\widetilde{E}(E(M))$ ін'єктивну оболонку модуля $E(M)$ в категорії $A\text{-}Mod$. Модуль M є суттєвим підмодулем в $E(M)$, який є суттєвим в $\widetilde{E}(E(M))$, тому можна стверджувати, що $\widetilde{E}(_AM) = \widetilde{E}(E(M))$.

Розглянемо скрут $\sigma \in A\text{-}Tors$, копороджений ін'єктивним модулем $\widetilde{E}(_AM)$. Покажемо, що модуль M є σ-кокритичним. Для цього досить переконатися, що M є σ-напівпростим (це випливає безпосередньо з означення) і кожний ненульовий підмодуль $N \subset M$ є σ-щільний в M. Для перевірки останнього розглянемо фактор-модуль M/N. Припустимо, що $Hom_A(M/N, \widetilde{E}(_AM)) \neq 0$. Тоді існує ненульовий гомоморфізм $g : M/N \to \widetilde{E}(_AM)$. Оскільки модуль $E(M)$ є суттєвим в $\widetilde{E}(_AM)$, перетин $K = g(M/N) \cap E(M)$ є ненульовим. Тоді $g^{-1}(K) = K'/N$ для деякого підмодуля $K' \subset M$. Тому $g(K'/N) \subset E(M)$ і $g(K'/N) \neq 0$. Враховуючи те, що модуль M є B-модулем, отримуємо, що K' і N є теж B-модулями і $g : K'/N \to E(M)$ є B-гомоморфізмом.

Таким чином, ми отримали, що існує ненульовий гомоморфізм $g \in Hom_B(K'/N, E(M))$, але це неможливо, бо модуль M є τ-кокритичним, і кожний його підмодуль, а тому і K', є τ-кокритичним. Звідси отримуємо, що модуль N є τ-щільним, тобто K'/N є τ-періодичним, а це означає, що $Hom_B(K'/N, E(M)) = 0$. Отримана суперечність доводить, що $Hom_A(M/N, \widetilde{E}(M)) = 0$; це означає, що A-модуль M/N є σ-періодичним, тобто N – σ-щільний в M і M є σ-кокритичним A-модулем. Тому, згідно з означенням, скрут $\sigma \in A\text{-}Tors$ є первинним. Лему доведено.

Теорема 5. *Нехай $f : A \to B$ – епіморфізм кілець, $M \in A\text{-}Mod$. Ін'єктивна оболонка $E(M)$ копороджує первинний скрут $\tau \in A\text{-}Tors$ тоді і тільки тоді, коли ін'єктивний B-модуль $Hom_A(B, E(M))$ копороджує первинний скрут $\sigma \in B\text{-}Tors$. Крім цього, $\tau = \widetilde{f}^{-1}(\sigma)$.*

Доведеня. Розглянемо модуль $E_1 = Hom_A(B, E(M)) \in B\text{-}Mod$.

Оскільки функтор $Hom_A(B, -)$ зберігає ін'єктивність, модуль E_1 є ін'єктивним. З того, що гомоморфізм $f : A \to B$ є сюр'єктивним, випливає існування мономорфізму $h : Hom_A(B, E(M)) \to E(M)$. Даний гомоморфізм отримується в результаті дії функтора $Hom_A(-, E(M))$ на послідовність $Kerf \to A \to B \to 0$. Точність зліва даного функтора, який є контраваріантним, забезпечує ін'єктивність гомоморфізму h.

Нехай τ – первинний скрут у категорії $A\text{-}Mod$ і M – довільний τ-кокритичний A-модуль. Такий модуль обов'язково існує і його ін'єктивна оболонка $E(M)$ копороджує скрут τ.

Нехай σ – скрут, копороджений модулем E_1. Нехай N – довільний підмодуль в E_1. Розглянемо фактор-модуль E_1/M і множину гомоморфізмів $Hom_B(E_1/M, E_1)$. Припустимо, що існує ненульовий гомоморфізм $g : E_1/N \to E_1$. Тоді

$$h \circ g : E_1/N \to E(M) \text{ і } (h \circ g)(E_1/N) \neq 0.$$

Оскільки модуль M є суттєвим в $E(M)$, то $L = (h \circ g)(E_1/N) \cap M \neq 0$. Тоді отримаємо модуль $L'/N = (h \circ g)^{(-1)}(L)$, який є підмодулем в E_1/N. Крім цього, маємо вкладення $E_1/N \to E(M)/N$, тому можемо знайти ненульовий модуль $L'' = L' \cap M$. Таким чином, ми отримали фактор-модуль $L''/N \subset M/N$ і ненульовий гомоморфізм $h \circ g : L''/N \to E(M)$. Але це неможливо, бо модуль M є τ-кокритичним і для будь-якого підмодуля $N \subset M$ фактор-модуль M/N є τ-періодичним. Таким чином, кожний підмодуль K в M/N повинен бути τ-періодичним, тобто $Hom_A(K, E(M)) = 0$. Отже, ми отримали, що кожний підмодуль в E_1 є σ-щільним. Те, що модуль E_1 є σ-напівпростим, випливає безпосередньо з означення. Тому, можна сказати, що модуль E_1 є σ-кокритичним, а це означає, що скрут σ є первинним.

Навпаки, нехай модуль $E_1 = Hom_A(B, E(M)) \in B\text{-}Mod$ копороджує первинний скрут $\sigma \in B\text{-}Tors$. Модуль E_1 є ще й A-модулем, і його ін'єктивна оболонка $E(E_1)$ копороджує деякий скрут $\tau' \in A\text{-}Tors$. За лемою 4 скрут $\tau' = f^{-1}(\sigma)$ є первинним. З того, що модуль $E(E_1)$ є ін'єктивним A-модулем і існує мономорфізм $h : Hom_A(B, E(M)) \to E(M)$, отримуємо існування такого мономорфізму $\xi : E(M) \to E(E_1)$, що діаграма

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r] \arrow[d] & E(M) \arrow[dl, "\xi"] \\ E(E_1) & \end{tikzcd}$$

є комутативною.

Так само можна побудувати комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r] \arrow[d] & E(E_1) \arrow[dl, "\eta"] \\ E(M) & \end{tikzcd},$$

де η є мономорфізмом.

Існування мономорфізмів ξ і η вказує на те, що ін'єктивні модулі $E(E_1)$ і $E(M)$ є еквівалентними, тобто вони копороджують один і той же скрут. Тому отримуємо, що $\tau = \tau_1$. Теорему доведено.

3. Структура спектру розшарованого добутку кілець. Множину всіх первинних скрутів у гратці $A\text{-}Tors$ позначатимемо через $A\text{-}Sp$ і назвемо її спектром кільця A.

Лема 6. *Нехай $f : A \to B$ – гомоморфізм кілець, $M \in A\text{-}Mod$, M – τ-кокритичний для деякого $\tau \in A\text{-}Sp$. Якщо $M \in B\text{-}Mod$, то існує скрут $\sigma \in B\text{-}Sp$, такий, що M є σ-кокритичним, і $\tau = \widetilde{f}^{-1}(\sigma)$.*

Доведення. Нехай M – τ-кокритичний A-модуль. Тоді M є τ-напівпростим і будь-який підмодуль $N \subset M$ є τ-щільним в M, тобто $Hom_A(M/N, E(M)) = 0$.

Розглянемо ін'єктивну оболонку $\widetilde{E}(M)$ модуля M як B-модуля. Очевидно, що кожний A-підмодуль $N \subset M$ є B-підмодулем. Нехай σ – скрут, копороджений ін'єктивним модулем $\widetilde{E}(M)$. Покажемо, що скрут σ є первинним.

Припустимо, що $Hom_B(M/N, \widetilde{E}(M)) \neq 0$. Нехай таким ненульовим гомоморфізмом буде $g : M/N \to \widetilde{E}(M)$. Оскільки модуль M є суттєвим в $\widetilde{E}(M)$, то $g(M/N) \cap M = L \neq 0$. Тому існує B-модуль L', такий, що $L'/N \subset M/N$ і $g(M/N) = L$. Таким чином, отримаємо, що існує ненульовий гомоморфізм $g : L'/N \to \widetilde{E}(M)$. B-модуль $\widetilde{E}(M)$ є одночасно і A-модулем, і його ін'єктивна оболонка $E(\widetilde{E}(M)) \in A\text{-}Mod$ містить підмодуль M, який є суттєвим в $\widetilde{E}(M)$, а тому і в $E(\widetilde{E}(M))$. Отже, $E(\widetilde{E}(M)) = E(M)$. Звідси отримуємо $\widetilde{E}(M) \subseteq E(M)$. Таким чином, ми маємо, що гомоморфізм g діє із L'/N в $E(M)$, що є неможливо. Отримана суперечність доводить σ-періодичність фактор-модуля M/N, тобто

σ-щільність будь-якого підмодуля N в M. Те, що модуль M є σ-напівпростим очевидно. Отже, B-модуль M є σ-кокритичним, і згідно з означенням скрут σ є первинним. Лему доведено.

Для описання структури спектру розшарованого добутку кілець встановимо такий факт.

Лема 7. *Нехай $f : A \to B$ – епіморфізм кілець, $\tau \subset A\text{-}Sp$. Якщо $Kerf \nsubseteq Ann_A M$ для кожного τ-кокритичного A-модуля M, то скрут, копороджений модулем $Hom_A(B, E(KerfM))$, є невласним.*

Доведення. Нехай τ – первинний скрут в категорії $A\text{-}Mod$ і M – будь-який τ-кокритичний лівий A-модуль. Тоді $KerfM \neq 0$. Оскільки $KerfM$ є підмодулем в M, то $KerfM$ є τ-кокритичним і $\chi(KerfM) = \chi(M)$. З того, що гомоморфізм f є сюр'єктивним випливає

$$Hom_A(B, E(KerfM)) = Ann_{E(KerfM)}Kerf = \{m \in E(KerfM) | Kerfm = 0\}$$

(див.[11]). Оскільки модуль $KerfM$ є суттєвим в $E(KerfM)$, то

$$Ann_{E(KerfM)}Kerf \cap KerfM = L \neq 0.$$

Для будь-якого $l \in L$ маємо, що $Kerfl = 0$. Модуль L є підмодулем в M, тому він є τ-кокритичним і $KerfL = 0$, тобто $Kerf \subseteq Ann_A L$. Це суперечить умові леми, тому $L = 0$. Звідси отримуємо, що $Ann_{E(KerfM)}Kerf = 0$. Таким чином, скрут, копороджений ін'єктивним модулем $Hom_A(B, E(KerfM))$, є невласним. Лему доведено.

Введемо наступні позначення:

$$S_0 = \{\Phi^{-1}(\tau_0) \mid \tau_0 \in C\text{-}Sp\};$$

$$S_1 = \{p_1^{-1}(\tau_1) \mid \tau_1 \in A_1\text{-}Sp \;\; i \;\; Kerf_1 \nsubseteq Ann_{A_1}M \;\; i \;\; \chi(M) = \tau_1, \text{ де } M \in A_1\text{-}Mod\};$$

$$S_2 = \{p_2^{-1}(\tau_2) \mid \tau_2 \in Imp_2\text{-}Sp \;\; i \;\; Kerf_2 \nsubseteq Ann_{Imp_2}M \;\; i \;\; \chi(M) = \tau_1,$$
$$\text{де } M \in Imp_2\text{-}Mod\},$$

Теорема 8. *Нехай $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ - розшарований добуток кілець, заданий універсальним квадратом.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"'] & A_0 \end{tikzcd},$$

де p_1 – епіморфізм, $C = f_1(A_1) \cap f_2(A_2)$ – підкільце в A_0, $\Phi = f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2$ – гомоморфізм кілець $A \to A_0$. Якщо S – множина всіх власних первинних скрутів в категорії $A\text{-}Mod$, тоді $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$.

Доведення. Розглянемо ядро гомоморфізму Φ. Відповідно до зображення розшарованих добутків в категорії модулів можна записати, що

$$Ker\Phi = (Kerf_1, Kerf_2) = (Kerf_1, 0) \oplus (0, Kerf_2) = Kerp_2 \oplus Kerp_1.$$

Нехай $\tau \in S$ і M – будь-який τ-кокритичний A-модуль. Якщо $Ker\Phi \subseteq Ann_A M$, тоді для будь-яких $c \in C \subseteq A_0$ і $m \in M$ покладемо $c \cdot m = \Phi^{-1}(c)m$. Задане таким чином множення є коректним, оскільки якщо існують такі елементи $a_1, a_2 \in A$, що $\Phi(a_1) = \Phi(a_2) = c$, то

$a_1 - a_2 \in Ker\Phi$ і $(a_1 - a_2) \cdot m = 0$, тобто $a_1 m = a_2 m$. Існування прообразу $\Phi^{-1}(c)$ для кожного елемента $c \in C$ випливає з того, що обмеження гомоморфізму Φ на підкільце C є епіморфізмом. Таким чином M є C-модулем. За теоремою 5 існує скрут $\sigma \in C\text{-}Sp$, такий, що модуль M є σ-кокритичним і $\tau = (\Phi|_C)^{-1}(\sigma)$.

Якщо $Ker\Phi \not\subseteq Ann_A M$, тоді можливі такі випадки.

1) $Kerp_1 \subseteq Ann_A M$ і $Kerp_2 \not\subseteq Ann_A M$. У цьому випадку, оскільки p_1 є епіморфізмом, отримуємо ситуацію, подібну до описаної вище, і можемо знайти скрут $\sigma_1 \in A_1\text{-}Sp$, такий, що $p_1^{-1}(\sigma_1) = \tau \in S$.

2) $Kerp_1 \not\subseteq Ann_A M$ і $Kerp_2 \subseteq Ann_A M$. У цьому випадку так само можна знайти скрут $\sigma_2 \in Imp_2\text{-}Sp$, такий, що $p_2^{-1}(\sigma_2) = \tau \in S$.

3) $Kerp_1 \not\subseteq Ann_A M$ і $Kerp_2 \not\subseteq Ann_A M$. Тоді $Kerp_1 M \neq 0$ і $Kerp_2 M \neq 0$. Використовуючи зображення розшарованого добутку кілець, можна записати, що

$$A_1 \times_{A_0} A_2 = \{(a_1, a_2) A_1 \times A_2 \mid f_1(a_1) = f_2(a_2)\}$$

$$\text{і} \quad A_1 \times_{A_0} Imp_2 = \{(a_1, a_2) A_1 \times Imp_2 \mid f_1(a_1) = f_2(a_2)\}.$$

Наведені розшаровані добутки кілець є рівними. Справді, включення

$$A_1 \times_{A_0} Imp_2 \subseteq A_1 \times_{A_0} A_2$$

виконується, оскільки $Imp_2 \subseteq A_2$. Покажемо справедливість оберненого включення. Нехай $(a_1, a_2) \in A_1 \times_{A_0} A_2$; тоді з комутативності діаграми рзшарованого добутку отримаємо, що $f_1 p_1(a_1, a_2) = f_2 p_2(a_1, a_2)$. Гомоморфізми p_1 і p_2 є проекціями на першу і другу компоненту відповідно, тому $f_1(a_1) = f_2(a_2)$, де $a_2 \in Imp_2$. Таким чином, ми отримали рівність

$$A = A_1 \times_{A_0} A_2 = A_1 \times_{A_0} Imp_2.$$

За лемою 7 скрути τ_1 і τ_2 копороджені модулями

$$Hom_A(A_1, E(Kerp_1 M)) \text{ і } Hom_A(Imp_2, E(Kerp_2 M))$$

є невласними скрутами з $A_1\text{-}Tors$ і $Imp_2\text{-}Tors$.

Оскільки скрут τ є первинним і модуль M є τ-кокритичним, то скрут τ копороджується також модулями $E(Kerp_1 M), E(Kerp_2 M)$ і $E(Kerp_1 M \cap Kerp_2 M)$. Нехай $\tau_0 \in A_0\text{-}Tors$ – скрут, копороджений модулем $F_2 P_2(E(Kerp_1 M \cap Kerp_2 M))$. Тоді розшарований добуток скрутів $\tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2$ дорівнює скруту τ.

Розшарований добуток невласних скрутів τ_1 і τ_2 є невласним. Тому скрут τ є невласним. Підсумовуючи сказане, отримуємо, що кожний власний скрут в категорії $A\text{-}Mod$ належить одній із множин S_0, S_1 або S_2. Те, що $S_1 \subseteq S$, $S_2 \subseteq S$ і $S_0 \subseteq S$ прямо випливає із леми 4. Теорему доведено.

1. Басс Х. Алгебраическая K-теория. – М.: Мир, 1973.
2. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. – М.: Мир, 1972. – 259с.
3. Вовк Р.В. *Абсолютно σ-чистые модули над расслоенным произведением колец* // VI симпозиум по теории колец, алгебр и модулей, Львов, 1990, Тезисы сообщений, С.33.
4. Вовк Р.В., Комарницький М.Я. *Розшаровані добутки деяких некомутативних нетерових кілець* // Алгебра і топологія, Тематичний збірник наукових праць, Київ, 1993. – С.26–32.

5. Вовк Р.В. *Розшаровані добутки скрутів* // Математичні студії. – 1997. – Т.7, N2. – С.113-124.

6. Вовк Р.В. *Кільця дробів розшарованого добутку кілець* // Вісник Львівського університету, серія механіко-математична. – 1997. – В.47. – С.5-16.

7. Вовк Р.В. *Про відносно нетерові модулі над розшарованим добутком кілець* // Міжнародна алгебраїчна конференція присвячена пам'яті Л.М.Глускіна, (Слов'янськ, 25-29 серпня). - 1997. - С.79.

8. Милнор Дж. Введение в алгебраическую K-теорию. – М.: Мир, 1974.

9. Anderson F., Fuller K. Rings and categories of modules. – Berlin: Springer-Verlag, 1974. – 339p.

10. Facchini A. *Fibre product and Morita duality for commutative rings* // Rend. Sem. Math. Univ. Padova. – 1981. – V. 67, P.143 – 156.

11. Facchini A., Vamos P. *Injective modules over pullbacks* // J. London Math. Soc. – 1985. – V.31,N.2. – P.425 – 438.

12. Gabriel P. *Des catégories abéliennes* // Bull. Soc. Math. France. – 1962. – V. 90. – P.323 – 448.

13. Golan J.S. Torsion theories. – New York: J. Willey & Sons, 1986. – 651p.

14. Ogoma T. *Fibre products of Noetherian rings and their applications* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1985. –V. 97. – P.231 – 241.

15. Ogoma T. *Fibre products of Noetherian rings* // Advanced Studies in Pure Mathematics 11. – 1987. – P.173 – 182.

16. Stenström B. Rings of quotients. – Berlin: Springer-Verlag. – 1975. – 309p.

17. Vovk R.V. *On a spectrum of fibre product of rings* // Representation theory and computer algebra, (Kyiv, March 18-23), – 1997. – P.46.

18. Wiseman A.N. *Proective modules over pullback rings* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1985. – V. 97. – P.399 – 406.

Стаття надійшла до редколегії 31.03.1998

УДК 512.58+515.12

ON EXTENSION OF THE CONTRAVARIANT FUNCTOR C_p ONTO CATEGORIES OF MULTIVALUED MAPS

V. S. Levyts'ka

Levyts'ka V. S. On extension of the contravariant functor C_p onto categories of multivalued maps. It is proved that the contravariant functor C_p (the pointwise convergence function functor) has an extension onto the category of Tychonov spaces and finite-valued maps and has no extension onto the category of Tychonov spaces and compact-valued maps.

1°. Introduction

The general problem of extension of (covariant) functors onto the Kleisli category of a monad (see the definitions below) has been investigated by many authors (see [1],[2] for categorical results and [3] for the case of categories of compacta). In [4] the author considered the problem of extension of contravariant functors to the Kleisli categories and found a criterion for existence of such an extension.

In this note we consider the contravariant functor C_p acting in the category $Tych$ of Tychonov spaces and continuous maps and the problem of extension of this functor onto the categories of finite-valued and compact-valued maps. These categories can be naturally identified with the Kleisli categories of the finite hyperspace monad and the hyperspace monad respectively.

2°. Definition and auxilary results

A monad on a category $\mathcal{C}$ is a triple $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$, where $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ is a covariant functor and $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to T$, $\mu : T^2 \to T$ are natural transformations satisfying the conditions: $\mu \circ \eta T = \mu \circ T\eta = 1_T$ and $\mu \circ \mu T = \mu \circ T\mu$. The *Kleisli category* of $\mathbb{T}$ is the category $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ defined as follows: $|\mathcal{C}_{\mathbb{T}}| = |\mathcal{C}|$, $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}(X,Y) = \mathcal{C}(X, TY)$, and the composition $g * f$ of morphisms $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{T}}(X,Y)$, $g \in \mathcal{C}_{\mathbb{T}}(Y,Z)$ is given by $g * f = \mu Z \circ Tg \circ f$.

Define the functor $I\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ by $IX = X$, $X \in |\mathcal{C}|$ and $If = \eta Y \circ f$ for $f \in \mathcal{C}(X,Y)$.

A functor $\overline{F} : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ called an extension of the functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ on the Kleisli category $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ iff $IF = \overline{F}I$.

The following proposition gives a criterion for existence of extension of contravariant functors onto the Kleisli categories [2].

1991 *Mathematics Subject Classification.* 18C20, 54B30, 54C40.

Proposition 1. *There exists a bijective correspondence between the extensions of a contravariant functor F onto the category $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ and the natural transformations $\xi : F \to TFT$ satisfying the conditions:*

(i) $TF\eta \circ \xi = \eta F$;

(ii) $TF\mu \circ \xi = \mu FT^2 \circ T\xi T \circ \xi$.

The proof is given in [4]; here we only note that the extension which corresponds to ξ is defined as follows: $\overline{F}f = TFf \circ \xi Y$, for $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{T}}(X,Y)$

In this situation, the natural transformation ξ is called *associated* to the extension $\overline{F}$.

Let $Tych$ denote the category of Tychonov spaces and their continuous maps. For a Tychonov space X we denote by C_pX the space of real-valued functions on X endowed with the topology of pointwise convergence. This construction determines a contravariant functor in $Tych$: for a map $f : X \to Y$ we have $C_pf(\varphi) = \varphi \circ f$, $\varphi \in C_pY$.

3°. Finite hyperspace monad

Let X be a Tychonov space. We denote by $\exp X$ the space of all non-empty compact subsets of X equipped with the Vietoris topology. Recall that the sets

$$\langle U_1, \dots, U_n\rangle = \{A \in \exp X \mid A \subset U_1 \cup \dots \cup U_n, A \cap U_i \neq \emptyset,$$

for all $i = 1, \dots, n\}$, where U_i run over the topology of X, form a base of the Vietoris topology.

For a continuous mapping $f : X \to Y$ the mapping $f : \exp X \to \exp Y$ is defined by the formula: $\exp f(A) = f(A) \in \exp Y$, $A \in \exp X$. Define the natural transformations $s : 1_{Tych} \to \exp$ and $u : \exp^2 \to \exp$ as follows: $sX(x) = \{x\}$ for each $x \in X$; $uX(\mathcal{A}) = \cup\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \in \exp^2 X$. This construction determines the hyperspace monad $\mathbb{H} = (\exp, s, u)$ on the category $Tych$ (as well as on the category $Comp$)(see [5]).

We consider also its submonad $\mathbb{H}_f = (\exp_f, s, u)$ of hyperspace of finite sets on the category $Tych$. Here $\exp_f X = \{A \in \exp X \mid A \text{ is a finite set}\}$.

Note that the morphisms of the Kleisli category of the monad $\mathbb{H}$ (respectively $\mathbb{H}_f$) are compact-valued (respectively finite-valued) maps.

We consider the following problem: is there an extension of the contravariant functor C_p on the Kleisli category of the monad $\mathbb{H}_f = (\exp_f, s, u)$?

Let $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ be a monad on $Tych$ and $(\mathbb{R}, \alpha)$ a $\mathbb{T}$-algebra. Define the map $\xi X : C_pX \to TC_pTX$ as follows:

$$\xi X(\varphi) = \eta C_pTX(\alpha \circ T\varphi) \quad \varphi \in C_pX.$$

Lemma 1. *Suppose ξX is the continuous mapping for every Tychonov space X. Then $\xi = (\xi X)_{X \in |Tych|}$ is a natural transformation which satisfies conditions (i) and (ii) from Proposition 1.*

Proof. Check that ξ is a natural transformation. Let $f \in Tych(X,Y)$ and $\varphi \in C_pY$. Then

$$\begin{aligned}\xi X(C_pf(\varphi)) &= \eta C_pTX(\alpha \circ TC_pf(\varphi)) = \eta C_pTX \circ C_pTf(\alpha \circ T\varphi) \\ &= TC_pTf \circ \eta C_pTY(\alpha \circ T\varphi) = TC_pTf(\xi Y(\varphi)).\end{aligned}$$

Show that ξ satisfies conditions (i) and (ii) from Proposition 1. Let $\varphi \in C_pX$, then

$$\begin{aligned}TC_p\eta X \circ \xi X(\varphi) &= TC_p\eta X \circ \eta C_pTX(\alpha \circ T\varphi) = \eta C_pX \circ C_p\eta X(\alpha \circ T\varphi) \\ &= \eta C_pX(\alpha \circ T\varphi \circ \eta X) = \eta C_pX(\alpha \circ \eta\mathbb{R} \circ \varphi) = \eta C_pX(\varphi),\end{aligned}$$

thus, (i) is satisfied.

We have to check (ii):

$$
\begin{aligned}
TC_p\mu X \circ \xi X(\varphi) &= TC_p\mu X \circ \eta C_pTX(\alpha \circ T\varphi) = \eta C_pT^2X \circ C_p\mu X(\alpha \circ T\varphi) \\
&= \eta C_pT^2X(\alpha \circ T\varphi \circ \mu X) = \eta C_pT^2X(\alpha \circ \mu\mathbb{R} \circ T^2\varphi) = \eta C_pT^2X(\alpha \circ T\alpha \circ T^2\varphi),
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\mu C_pT^2X \circ T\xi TX \circ \xi X(\varphi) &= \mu C_pT^2X \circ T\eta C_pT^2X(\eta C_pT^2X(\alpha \circ T(\alpha \circ T\varphi))) \\
&= \eta C_pT^2X(\alpha \circ T\alpha \circ T^2\varphi).
\end{aligned}
$$

Consider the mapping $\alpha : \exp_f \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha(A) = \max A$, where $A \in \exp_f \mathbb{R}$. It is easy to see that the pair $(\mathbb{R}, \alpha)$ is an $\mathbb{H}_f$-algebra (see [5]).

By Lemma 1, the natural transformation ξ associated to the extension of C_p onto $Tych_{\mathbb{H}_f}$, can be considered as the composition of mappings,

$$\xi = \eta C_p \exp_f \circ \xi',$$

where $\xi' X : C_pX \to C_p \exp_f X$ is defined as follows: $\xi'(\varphi) = \alpha \circ \exp_f(\varphi), \varphi \in C_pX$.

Show that the mapping $\xi' X$ is continuous.

Let $\varphi_0 \in C_pX$ i $\xi'(\varphi_0) = \Phi_0$. Base neighbourhoods of Φ_0 in $C_p \exp_f X$ are sets of the form

$$O(\Phi_0; A_1, \dots, A_k; \varepsilon) = \{\Phi \in C_p \exp_f X \,|\, |\Phi(A_i) - \Phi_0(A_i)| < \varepsilon \text{ for all } i = 1, \dots, k\}.$$

Let $A_1 \cup \dots \cup A_k = \{x_1, \dots, x_l\}$. Consider the neighbourhood

$$O(\varphi_0; x_1, \dots, x_l; \varepsilon) = \{\varphi \in C_pX \,|\, |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \varepsilon \text{ for all } i = 1, \dots, l\}$$

of φ_0 in C_pX. It is easy to see that $\xi'(O(\varphi_0; x_1, \dots, x_l; \varepsilon)) \subset O(\Phi_0; A_1, \dots, A_k; \varepsilon)$.

Summing up, we have

Theorem 1. *There exists an extension of contravariant functor C_p onto the Kleisli category of the monad $\mathbb{H}_f$.*

Note that the structure of $\mathbb{H}_f$-algebra on $\mathbb{R}$ is not uniquely determined (we can consider, e. g., min instead of max in the above expressions). Thus, the extension of C_p onto $Tych_{\mathbb{H}_f}$ is not unique.

4°. Hyperspace monad

The following question naturally arizes: is there an extension C_p onto the category $Tych_{\mathbb{H}}$? Recall that the category $Tych_{\mathbb{H}}$ is a category of Tychonov spaces and compact-valued maps.

Lemma 2. *Suppose there is a natural transformation $\xi : C_p \to \exp C_p \exp$ associated to an extension of C_p onto the category $Tych_{\mathbb{H}}$. For $c \in \mathbb{R}$ let $\varphi \in C_pX$ be such that $\varphi(x) = c$ for all $x \in X$. Then $\xi X(\varphi) = \{\Psi\}$, where $\Psi \in C_p \exp X$ is such that $\Psi(A) = c$ for every $A \in \exp X$. (Thus, ξX preserves the constants.)*

Proof. Fix any one-point space $\{*\}$ and consider the only mapping $f : X \to \{*\}$. Since ξ is a natural transformation, we have $\xi X \circ C_pf = \exp C_p \exp f \circ \xi\{*\}$. Denote by $\chi_c \in C_p\{*\}$, $\chi'_c \in C_p \exp\{*\}$ the constant functions with the value $c \in \mathbb{R}$. Let $\chi_c \in C_p\{*\} \equiv \mathbb{R}$. Considering condition (i) of Proposition 1, we obtain:

$$\exp C_p\eta\{*\}(\xi\{*\}(\chi_c)) = \exp C_p\eta\{*\}(\{\chi'_{c_\alpha} \in C_p \exp\{*\}|\alpha \in \Gamma\}) = \{C_p\eta\{*\}(\chi'_{c_\alpha})|\alpha \in \Gamma\}$$
$$= \{\chi'_{c_\alpha} \circ \eta\{*\}|\alpha \in \Gamma\} = \eta C_p\{*\}(\chi_c) = \{\chi'_c\}.$$

Hence $\xi\{*\}(\chi_c) = \{\chi'_c\}$.

Obviously, $C_pf(\chi_c) \in C_pX$ is the constant function with the value c on X. We denote this mapping by φ. Then

$$\xi X \circ C_pf(\chi_c) = \xi X(\varphi) = \exp C_p \exp f(\xi\{*\}(\chi_c)) = \exp C_p \exp f(\{\chi'_c\}) = \{C_p \exp f(\chi'_c)\}$$
$$= \{\chi'_c \circ \exp f\} = \{\Psi\},$$

where $\Psi(A) = c$ for each $A \in \exp X$.

Theorem 2. *There is no extension of C_p onto $Tych_{\mathbb{H}}$.*

Proof. Suppose the opposite. Let K denote the middle-third Cantor set and let $\varphi \in C_pK$ be a function for which $\varphi(K) = \{0,1\}$. Obviously there exist two sequences of homeomorphisms $h_i\colon K \to K, g_i\colon K \to K$ such that $\varphi \circ h_i \longrightarrow 0, \varphi \circ g_i \longrightarrow 1$, if $i \longrightarrow \infty$.

Let $\xi K(\varphi) = \{\Phi_\alpha \in C_p \exp K|\alpha \in \Gamma\}$. Since ξ is a natural transformation, we have:

$$\exp C_p \exp h_i \circ \xi K(\varphi) = \exp C_p \exp h_i\{\Phi_\alpha|\alpha \in \Gamma\} = \{\Phi_\alpha \circ \exp h_i|\alpha \in \Gamma\} = \xi K(\varphi \circ h_i).$$

Consider the element $K \in \exp K$. We have

$$\xi K(\varphi \circ h_i)(K) = \{\Phi_\alpha \circ \exp h_i(K)|\alpha \in \Gamma\} = \{\Phi_\alpha(K)|\alpha \in \Gamma\}.$$

Similary for the sequence (g_i) we have

$$\exp C_p \exp g_i \circ \xi K(\varphi) = \{\Phi_\alpha \circ \exp g_i|\alpha \in \Gamma\} = \xi K(\varphi \circ g_i).$$

Since $\exp C_p \exp h_i \circ \xi K(\varphi)(K) = \exp C_p \exp g_i \circ \xi K(\varphi)(K)$, we see that $\xi K(\varphi \circ g_i)(K) = \xi K(\varphi \circ h_i)(K)$ for any $i \in \mathbb{N}$.

By Lemma 2 we have: $\{\Phi(K)|\Phi \in \xi K(\varphi \circ g_i)\} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \{\xi K(\chi'_1)(K)\} = \{1\}$, and, on the other hand, $\{\Phi(K)|\Phi \in \xi K(\varphi \circ h_i)(K)\} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \{\xi K(\chi'_0)(K) = \{0\}$. We have obtained a contradiction.

5°. Remarks and open question

Note that the method used in the proof of Theorem 1 works also in some other situations. Given a monad $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ on $Tych$ such that $\mathbb{R}$ is a $\mathbb{T}$-algebra and T is a functor with finite supports (see, e. g., [6] for the results concerning functors in $Tych$) we can argue similarly as in the proof of Theorem 1 in order to prove the existence of extensions of C_p onto $Tych_{\mathbb{T}}$.

It is well-known that the probability measure functor determines (a unique) monad onto the category $Comp$ (see, e. g., [7]). In [8] it is shown that the related functor P_τ of τ-smooth measures determines a unique monad on $Tych$ that extends the probability measure monad.

Question. *Is there an extension of the functor C_p onto the Kleisli category of the monad of τ-smooth probability measures?*

1. Arbib M., Manes E. *Fuzzy machines in a category*// Bull. Austral. Math. Soc. – 1975. – Vol. 13. – P. 169–210.
2. Vinárek J. *On extension of functors to the Kleisli category*// Comment. Math. Univ. Carol. – 1977. – Vol. 18. – P. 319–327.
3. Zarichnyi M. M. Topology of functors and monads in the category of compacta. – Kiev: Institute of System Investigations, 1993.
4. Levyts'ka V. *On extension of contravariant functors onto the Kleisli category*// Matem. studii. – 1998. – Vol. 9. – P.125–129.
5. Wyler O. *Algebraic theories of continuous lattices*// Lect. Notes in Math. – 1981. – Vol. 871. – P. 390–413.
6. Zarichnyi M. M. *On topological covariant functors, II*// Q&A in Gen. Top. – 1991. – Vol. 9. – P. 1–32.
7. Świrszcz T. *Monadic functors and convexity*// Bull. Acad. Pol. Sci. – 1974. – Vol. 22. – P.39–42.
8. Banakh T. O. *Topology of spaces of probability measures, II*// Matem. studii. – 1995. – Vol. 5. – P.88–106.

Стаття надійшла до редколегії 10.06.1998

УДК 512.581.2

ПРО ХАРАКТЕРИЗАЦІЮ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ОБ'ЄКТА В ДЕКАРТОВО ЗАМКНЕНІЙ КАТЕГОРІЇ

Р. Є. Кокорузь

Kokoruz' R. E. On the characterization of the object of integers in cartesian closed category. The axiom of integers is considered in cartesian closed categories. The object of integers in this category is characterized as a universal object in some auxiliary category. The axiom of integers and natural numbers' object in arbitrary elementary topos are equivalent.

У працях П.Джонстона [1] і К.Малвея [2] запропоновані деякі методи побудови об'єкта цілих чисел (ОЦЧ) у топосах з об'єктом натуральних чисел (ОНЧ). К.Зауз в [3] дав аксіоматичне означення ОЦЧ, незалежне від аксіоми ОНЧ. Мета цієї статті – отримати характеризацію об'єкта цілих чисел як універсального об'єкта у деякій спеціальній категорії і виділити клас категорій, в яких такий об'єкт існує.

Нехай $\mathfrak{K}$ – довільна декартово замкнена категорія. Вслід за Заусом, введемо до розгляду таку аксіому.

ZO*Існують об'єкт* $\mathbf{Z}$ *і такі стрілки* $o \in Hom_{\mathfrak{K}}(\mathbf{1}, \mathbf{Z})$ *і* $s \in Aut_{\mathfrak{K}}(\mathbf{Z})$, *що для довільного об'єкта* $A \in |\mathfrak{K}|$ *і довільних стрілок* $x : \mathbf{1} \to A$, $f : A \to B$, *де* f *– ізострілка, існує єдина стрілка* $h : \mathbf{Z} \to A$, *яка робить діаграму*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "o_{\mathbf{Z}}"] \arrow[dr, "x"'] & \mathbf{Z} \arrow[r, "s"] \arrow[d] & \mathbf{Z} \arrow[d] \\ & A \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd} \tag{1}$$

комутативною.

Категорію $\mathfrak{K}$ з аксіомою **ZO** називатимемо категорією з ОЦЧ. Зауважимо, що якщо в категорії $\mathfrak{K}$ виконується аксіома **ZO** , то $Hom_{\mathfrak{K}}(\mathbf{1}, \mathbf{Z}) \neq \emptyset$ і, взагалі, $\mathbf{Z} \ncong \mathbf{1}$. Тому в діаграмі (1) стрілкою $\mathbf{o}$ може бути будь-яка стрілка $\mathbf{1} \to A$. Надалі для зручності зафіксуємо якунебудь стрілку такого вигляду і позначимо її через $\mathbf{o_Z} : \mathbf{1} \to \mathbf{Z}$.

Теорема 1. *Якщо в категорії $\mathfrak{K}$ існує об'єкт цілих чисел, то він єдиний з точністю до ізоморфізму.*

Доведення. З комутативності діаграми (1) випливає, що в категорії $\mathfrak{D}$ діаграм вигляду $\mathbf{1} \xrightarrow{x} A \xrightarrow{f} A$, де $A \in |\mathfrak{K}|$, $f \in Aut_{\mathfrak{K}}(A)$, діаграма $\mathbf{1} \xrightarrow{o_{\mathbf{Z}}} \mathbf{Z} \xrightarrow{s} \mathbf{Z}$ є початковим

1991 *Mathematics Subject Classification.* 18D15, 18B25.

об'єктом. Оскільки у довільній категорії два початкові об'єкти ізоморфні, то $\mathbf{Z}$ – єдиний з точністю до ізоморфізму об'єкт, що володіє такою властивістю.

Теорема 2. *[3]. Нехай $\mathfrak{K}$ – декартово замкнена категорія з ОЦЧ. Тоді для довільної діаграми $A \xrightarrow{h_0} B \xrightarrow{f} B$, де $f : B \to B$ – автоморфізм, існує єдина стрілка $h : A \times \mathbf{Z} \to B$, що робить діаграму*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "(id_A, o_{\mathbf{Z}} \circ !)"] \arrow[dr, "h_0"'] & A \times \mathbf{Z} \arrow[r, "id_A \times s"] \arrow[d, "h"] & A \times \mathbf{Z} \arrow[d, "h"] \\ & B \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \tag{2}$$

комутативною.

Доведення. Оскільки категорія $\mathfrak{K}$ декартово замкнена, то вона допускає експоненціювання. Нехай морфізм $\hat{h}_0 : \mathbf{1} \to B^A$ експоненційно приєднаний до стрілки $h_0 : A \to B$. Тоді, оскільки $f^A : B^A \to B^A$ – автоморфізм, то для діаграми $\mathbf{1} \xrightarrow{\hat{h}_0} B^A \xrightarrow{f^A} B^A$ існує єдина стрілка $\hat{h} : \mathbf{Z} \to B^A$ така, що діаграма вигляду (1) є комутативною. Тоді експоненційно приєднана до неї стрілка $h : A \times \mathbf{Z} \to B$, яка визначається як композиція $\mathbf{ev} \circ (id_A \times \hat{h}) : A \times \mathbf{Z} \to B$, робить діаграму (2) комутативною, причому h – єдина така стрілка внаслідок бієкції $Hom_{\mathfrak{K}}(\mathbf{Z}, B^A) \cong Hom_{\mathfrak{K}}(A \times \mathbf{Z}, B)$. Теорему доведено.

Зазначимо, що попередня теорема є аналогом теореми Фрейда для натуральночислового об'єкта (див.[4]). Це дозволяє, використовуючи схему, описану в [5, гл. 15], отримати характеризацію ОЦЧ як деякого універсального об'єкта категорії.

Позначимо через $\mathfrak{K}^*$ допоміжну категорію, об'єктами якої є $\mathfrak{K}$-автоморфізми, а $\mathfrak{K}^*$-стрілками з $A^* : A \to A$ в $B^* : B \to B$ є $\mathfrak{K}$-стрілки $h : A \to B$, для яких діаграма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "A^*"'] & B \arrow[d, "B^*"] \\ A \arrow[r, "h"] & B \end{tikzcd}$$

є комутативною.

Теорема 3. *Нехай $\mathfrak{K}$ – декартово замкнена категорія.*

*1. $\mathfrak{K} \models$**ZO** тоді і тільки тоді, коли забуваючий функтор з $\mathfrak{K}^*$ в $\mathfrak{K}$, що переводить довільний об'єкт $A^* : A \to A$ з $\mathfrak{K}^*$ в об'єкт A з $\mathfrak{K}$, має спряжений зліва.*

2. ОЦЧ є універсальною стрілкою з фінального об'єкта у цей функтор.

Доведення. 1. Нехай $\mathbf{G} : \mathfrak{K}^* \to \mathfrak{K}$ – стираючий функтор і $\mathbf{G}(A^* : A \to A) = A$. Припустимо, що $\mathbf{G}$ має спряжений зліва $\mathbf{F} : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}^*$. Позначимо автоморфізм $\mathbf{F}(\mathbf{1})$ через $\mathbf{Z}^* : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, а одиницю спряження $\eta_1 : \mathbf{1} \to \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{1}))$ – через $o_{\mathbf{Z}} : \mathbf{1} \to \mathbf{Z}$. Тоді пара $(\mathbf{F}(\mathbf{1}), \eta_1)$ вільна над $\mathbf{1}$. Це означає,що для довільного $\mathfrak{K}^*$-об'єкта A^* і довільної стрілки $x : \mathbf{1} \to \mathbf{G}(A^*)$ існує єдина така стрілка $h : \mathbf{F}(\mathbf{1}) \to A^*$, для якої діаграма

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "{*\eta_1}"] \arrow[dr, "x"'] & \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{1})) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{G}(h)"] & \mathbf{F}(\mathbf{1}) \arrow[d, "h"] \\ & \mathbf{G}(A^*) \arrow[r] & A^* \end{tikzcd}$$

є комутативною. Позначимо автоморфізм $\mathbf{F}(\mathbf{1})$ через $\mathbf{Z}^* : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, а одиницю спряження $\eta_\mathbf{1} : \mathbf{1} \to \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{1}))$ – через $o_\mathbf{Z} : \mathbf{1} \to \mathbf{Z}$. Тоді діаграми

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "o"] \arrow[dr, "x"'] & \mathbf{Z} \arrow[d, "h"] \\
 & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{Z} \arrow[r, "\mathbf{Z}^*"] \arrow[d, "h"] & \mathbf{Z} \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "A^*"] & A
\end{tikzcd}
$$

є комутативними. Отже, $(\mathbf{Z}, \mathbf{F}(\mathbf{1}), \eta_\mathbf{1})$ є об'єктом цілих чисел в $\mathfrak{K}$.

Навпаки, нехай $\mathfrak{K} \models \mathbf{ZO}$. Розглянемо функтор $\mathbf{F} : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}^*$, який переводить $\mathfrak{K}$-об'єкт A в ізострілку $id_A \times s : A \times \mathbf{Z} \to A \times \mathbf{Z}$, а $\mathfrak{K}$-стрілку $f\colon A \to B$ в стрілку $f \times id_\mathbf{Z} : A \times \mathbf{Z} \to B \times \mathbf{Z}$. Оскільки $\mathfrak{K}$ допускає експоненціювання, то за теоремою 2 для довільного автоморфізму $B^* : B \to B$ і довільної стрілки $h_o : A \to B$ існує єдина стрілка h, для якої діаграма

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\langle id_A, o_A \rangle"] \arrow[dr, "h_0"'] & A \times \mathbf{Z} \arrow[r, "id_A \times s"] \arrow[d, "h"] & A \times \mathbf{Z} \arrow[d, "h"] \\
 & B \arrow[r, "B^*"] & B
\end{tikzcd}
$$

є комутативною (тут $o_A = o_\mathbf{Z} \circ !$, де $! : A \to \mathbf{1}$). Тоді є комутативною і діаграма

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "h_0"'] & \mathbf{G}(\mathbf{F}(A)) \arrow[d, "h"] \\
 & \mathbf{G}(B^*)
\end{tikzcd} .
$$

Таким чином, виникла ситуація спряження $\mathbf{F} \dashv \mathbf{G}$. Одиницею спряження $\eta_\mathbf{1}$ є стрілка $\langle id_\mathbf{1}, o_\mathbf{Z} \rangle : \mathbf{1} \to \mathbf{1} \times \mathbf{Z}$, від якої, враховуючи природний ізоморфізм $\mathbf{Z} \cong \mathbf{1} \times \mathbf{Z}$, приходимо до стрілки $o_\mathbf{Z} : \mathbf{1} \times \mathbf{Z}$.

2. Як було зазначено вище, пара ($\mathbf{Z} \xrightarrow{s} \mathbf{Z}$, $\mathbf{1} \xrightarrow{o} \mathbf{Z}$) є вільною над $\mathbf{1}$ стосовно $\mathbf{G}$, тобто, вона є універсальною стрілкою з $\mathbf{1}$ в стираючий функтор $\mathbf{G} : \mathfrak{K}^* \to \mathfrak{K}$.

Нагадаємо, що в елементарному топосі $\mathcal{E}$ існує об'єкт натуральних чисел (ОНЧ), якщо в ньому виконується аксіома.

NNO. *Існують об'єкт $\mathbf{N} \in |\mathcal{E}|$ і стрілки $o : \mathbf{1} \to \mathbf{N}, s_0 : \mathbf{N} \rightarrowtail \mathbf{N}$ такі, що для довільного об'єкта $A \in |\mathcal{E}|$ і стрілок $x : \mathbf{1} \to A$ і $f : A \to A$ існує єдина стрілка $h : \mathbf{N} \to A$, для якої діаграма*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "o"] \arrow[dr, "x"'] & \mathbf{N} \arrow[r, tail, "s_0"] \arrow[d] & \mathbf{N} \arrow[d] \\
 & A \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}
$$

є комутативною.

Лема 1. *Нехай $(\mathbf{N}, o, s_0)$ – об'єкт натуральних чисел в топосі $\mathcal{E}$. Тоді*
1. $\mathbf{N} \cong \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1}$;
2. існує ізострілка $\phi : \mathbf{N} \cong \mathbf{1} + s_0(\mathbf{N})$;
3. $s_0(\mathbf{N}) \cong \mathbf{N}$.

Доведення цієї леми можна знайти в [1] або [5].

Теорема 4. *$\mathcal{E} \models$ **NNO** тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{E} \models$**ZO**.*

Доведення. Необхідність. Нехай $(\mathbf{N}, o, s_0)$ – об'єкт натуральних чисел у топосі $\mathcal{E}$, і нехай $\eta : \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ – ізострілка, існування якої забезпечене лемою 1. Позначимо $\theta = \eta^{-1} : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1}$ і розглянемо стрілку $s = \theta + \eta : \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N} \to \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N}$. Оскільки θ і η – ізострілки, то s – ізострілка (вона мономорфна і епіморфна, в чому легко переконатись). За стрілку η можна взяти стрілку $o_{\mathbf{N}} + s_0$, якщо врахувати умови 2, 3 леми 1. Отже, діаграма $\mathbf{1} \xrightarrow{i_1} \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N} \xrightarrow{i_2 \circ \eta} \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N}$ задовольняє аксіому **NNO** (i_1,i_2 – вкладення в першу і другу компоненти відповідно). Тоді для довільної діаграми $\mathbf{1} \xrightarrow{x} A \xrightarrow{f} A$, де $f \in Aut_{\mathcal{E}}(A)$, існує єдина стрілка $h_1 : \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N} \to A$, для якої діаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "x"'] & \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N} \arrow[r, "i_2 \circ \eta"] \arrow[d, "h_1"] & \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N} \arrow[d, "h_1"] \\
& A \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

є комутативною. Аналогічно, існує єдина стрілка $h_2 : \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1} \to A$, для якої діаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "x"'] & \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1} \arrow[r, "\theta + id_1"] \arrow[d, "h_2"] & \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1} \arrow[d, "h_2"] \\
& A \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

є комутативною. Тоді відображення h, яке є амальгамою стрілок h_1 і h_2, робить діаграму

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "x"'] & \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N} \arrow[r, "\theta + \eta"] \arrow[d, "h"] & \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N} \arrow[d, "h"] \\
& A \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

комутативною. Оскільки h_1 і h_2 визначаються однозначно, то h – єдина стрілка, яка робить цю діаграму комутативною. Отже, в топосі $\mathcal{E}$ об'єкт $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N}$ разом зі стрілками $i_2 : \mathbf{1} \to \mathbf{N} \sqcup \mathbf{1} \sqcup \mathbf{N}$ і $s = \theta + \eta$ є об'єктом цілих чисел.

Доведення другої частини теореми опирається на допоміжні твердження; ми формулюємо їх у вигляді чотирьох лем, у кожній з яких $\mathcal{E}$ позначає довільний елементарний топос.

Лема 2. *Кожний комутативний квадрат*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"] & B \arrow[d, "\alpha"] \\
C \arrow[r, "g"] & D
\end{tikzcd}$$

де $f : A \to B$ і $g : C \to D$ – ізострілки в топосі $\mathcal{E}$, є універсальним.

Доведення. За стрілками g і α побудуємо декартовий квадрат

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] & & \\ & K \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\alpha^*"] & B \arrow[d, "\alpha"] \\ & C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

Оскільки в топосі зворотні образи зберігають моно- і епістрілки, а g – ізострілка, то g^* – також ізострілка. За умовою $\alpha \circ f = g \circ \beta$. Тому існує єдина стрілка $k : A \to K$, яка робить всю діаграму комутативною. Оскільки $g^* \circ k = f$, то $k = g^{*-1} \circ f$ – ізострілка, тобто $A \cong K$, а звідси випливає, що зовнішній периметр діаграми є універсальним квадратом.

Лема 3. *[5, гл.7]. Якщо квадрат*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & B \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

є універсальним, то існує стрілка $h : f(A) \to g(C)$, для якої правий квадрат діаграми

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "f^*"] \arrow[d, "u"] & f(A) \arrow[r, tail, "\mathrm{im} f"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, two heads, "g^*"] & g(C) \arrow[r, tail, "\mathrm{im} g"] & D \end{tikzcd}$$

також універсальний (тут всі стрілки з топоса $\mathcal{E}$).

Лема 4. *[3, тв.3] Нехай $(\mathbf{Z}, o_{\mathbf{Z}}, s)$ – об'єкт цілих чисел у топосі $\mathcal{E}$. Тоді існує стрілка $a : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ (операція додавання на $\mathbf{Z}$), для якої $a \circ \langle id_{\mathbf{Z}}, o_{\mathbf{Z}} \rangle = id_{\mathbf{Z}}$, $a \circ (id_{\mathbf{Z}} \times s) = s \circ a$.*

Лема 5. *[4] $\mathcal{E} \models$***NNO** *тоді і тільки тоді, коли існує монострілка $f : A \rightarrowtail A$ і елемент $x : \mathbf{1} \to A$ такі, що квадрат*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, tail, "f"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "x"] & A \end{tikzcd}$$

є універсальним.

Тепер, нехай $(\mathbf{Z}, o_{\mathbf{Z}}, s)$ – об'єкт цілих чисел в топосі $\mathcal{E}$. Тоді за аксіомою **ZO** існує єдина стрілка $h : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, для якої комутативні діаграми:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "o_{\mathbf{Z}}"] \arrow[dr, "o_{\mathbf{Z}}"'] & \mathbf{Z} \arrow[d, "h"] \\ & \mathbf{Z} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{Z} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"] & \mathbf{Z} \arrow[d, "h"] \\ \mathbf{Z} \arrow[r, "s \circ s"] & \mathbf{Z} \end{tikzcd}$$

З леми 4 випливає, що $a \circ \Delta \circ s = a \circ \langle s, s \rangle = s \circ s \circ a \circ \Delta$, тобто $h = a \circ \Delta$, Неважко бачити, що $a \circ \Delta$ – монострілка. За лемою 5 достатньо показати, що існує елемент $x : \mathbf{1} \to \mathbf{Z}$, для якого $h(\mathbf{Z})$ і x є диз'юнктивними.

Нехай $\mathbf{Z} \xrightarrow{h^*} A \xrightarrow{\mathrm{im}h} \mathbf{Z}$ — епі-монорозклад стрілки $h : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$. Оскільки за лемою 2 зовнішній периметр діаграми

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z} \arrow[r, two heads, "h^*"] \arrow[d, "s"] & A \arrow[r, tail, "\mathrm{im}h"] \arrow[d, "\hat{s}"] & \mathbf{Z} \arrow[d, "s \circ s"] \\
\mathbf{Z} \arrow[r, two heads, "h^*"] & A \arrow[r, tail, "\mathrm{im}h"] & \mathbf{Z}
\end{tikzcd}$$

є універсальним квадратом, то внаслідок леми 3 існує стрілка $\hat{s} : A \to A$, для якої правий і лівий квадрати також універсальні. Зауважимо ще, що $\hat{s}$ – ізострілка. Легко бачити, що h^* – ізоморфізм, тому трійка $(A, h^* \circ o_{\mathbf{Z}}, \hat{s})$ задовольняє аксіому $\mathbf{ZO}$ і $A \cong \mathbf{Z}$.

Розглянемо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "o_{\mathbf{Z}}"] \arrow[dr, "i_1"'] & \mathbf{Z} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "g"] & \mathbf{Z} \arrow[d, "g"] \\
& \mathbf{1} \sqcup \mathbf{1} \arrow[r, "\sigma"] & \mathbf{1} \sqcup \mathbf{1}
\end{tikzcd}.$$

Тут $i_1 : \mathbf{1} \to \mathbf{1} \sqcup \mathbf{1}$ – ін'єкція в першу компоненту, σ – перестановка компонент, $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{1} \sqcup \mathbf{1}$ – єдина стрілка, що робить цю діаграму комутативною. Нехай $f : K \rightarrowtail \mathbf{Z}$ – стрілка, що отримується підйомом стрілки $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ вздовж стрілки $[\top, \perp] \circ g : \mathbf{Z} \to \Omega$. Тоді

$$\chi_f = [\top, \perp] \circ g = [\top, \perp] \circ \sigma \circ \sigma \circ g = [\top, \perp] \circ g \circ s \circ s = \chi_f \circ s \circ s.$$

Отже, χ_f є характеристичною стрілкою підоб'єкта $A \rightarrowtail \mathbf{Z}$ і $f = \mathrm{im}h$.

У діаграмі

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r, tail] \arrow[d, tail, "!"] & K \arrow[r] \arrow[d, tail, "f"] & \mathbf{1} \arrow[d, "\top"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "s \circ o_{\mathbf{Z}}"] & \mathbf{Z} \arrow[r, "\chi_f"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

правий квадрат універсальний за означенням χ_f. Завдяки тому, що $\perp : \mathbf{1} \to \Omega$ є характеристичною стрілкою підоб'єкта $! : \mathbf{0} \rightarrowtail \mathbf{1}$ і $g \circ s \circ o_{\mathbf{Z}} = \sigma \circ g \circ o_{\mathbf{Z}} = \sigma \circ i_1 = i_2$, отримуємо рівність $\chi_f \circ s \circ o_{\mathbf{Z}} = [\top, \perp] \circ i_2 = \perp$; тому зовнішній квадрат у вищезгаданій діаграмі універсальний. Звідси випливає, що лівий квадрат також універсальний, тому підоб'єкти $f : K \rightarrowtail \mathbf{Z}$ і $s \circ o_{\mathbf{Z}} : \mathbf{1} \to \mathbf{Z}$ диз'юнктивні. Остаточно, отримуємо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathbf{0} \arrow[r, "!"] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[d, "s \circ o_{\mathbf{Z}}"] \\
\mathbf{Z} \arrow[r, two heads, "h^*"] & A \arrow[r, tail, "\mathrm{im}h"] & \mathbf{Z},
\end{tikzcd}$$

де обидва малі квадрати універсальні і, тим більше, універсальним є зовнішній квадрат. Це завершує доведення теореми.

1. Джонстон Р. Теория топосов. – М.;1986.
2. Mulvey C. *Intuitionistic algebra and representation of rings* // Mem. of Amer. Akad. of Sci. – 1983. – Vol.148, N 1. – P.3–56.
3. Szasz C. *Das objekt "Ganze Zahlen" in einem elementaren topos* // Analele sti. Univ. Lasi Sec. Math. – 1985. – Vol.1a, N 7. – P.88–89.
4. Freid P. *Aspects of topoi* // Bull. Austr. Math. Soc. – 1972. – Vol.7, N 1. – P.1–76.
5. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. – М.;1983.

Стаття надійшла до редколегії 06.03.1998

УДК 517.576.

ПРО МАКСИМАЛЬНИЙ ЧЛЕН ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ З КОМПЛЕКСНИМИ ПОКАЗНИКАМИ І МОНОТОННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

М. Р. Луцишин

Lutsyshyn M.R. On the maximal term of the entire Dirichlet series with complex exponents and monotonic coefficients. Let $F(z)$ be an entire function represented by a Dirichlet series. We establish the condition under which the relation $F(z) = (1+o(1))\mu(z)$ as $|z| \to +\infty$ $(z \in \gamma)$ holds outside of a sufficiently small set E, $\iint_E \frac{dxdy}{|z|^2} < +\infty$, $z = x+iy$, where $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln|\mu(tz)|}{t} = +\infty\}$ and $\mu(z)$ is the maximal term of the Dirichlet series.

Для цілих функцій $F(z)$, зображуваних абсолютно збіжними в $\mathbb{C}$ рядами Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \tag{1}$$

де $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$ $(n \geqslant 0)$ у праці [1] встановлено, що умова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mu_{n+1} - \mu_n} < +\infty, \tag{2}$$

де (μ_n) – послідовність $\left(\ln \frac{1}{|a_n|}\right)$ перенумерована за зростанням, є достатньою і необхідною для того, щоб для кожної функції вигляду (1) з фіксованою послідовністю (μ_n) співвідношення

$$M(x,F) \overset{\text{def}}{=} \sup\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\} \sim m(x,F) \overset{\text{def}}{=} \inf\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\} \sim$$
$$\sim \mu(x,F) \overset{\text{def}}{=} \max\{|a_n|e^{x\lambda_n} : n \geqslant 0\} \tag{3}$$

виконувалось при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної логарифмічної міри, тобто такої, що $\int\limits_{E\cap[1;+\infty)} d\ln x < +\infty$. При цьому припускається, що

$$\lambda_n < \sup\{\lambda_j : j \geqslant 0\} \overset{\text{def}}{=} \Delta \leqslant +\infty \quad (n \geqslant 0). \tag{4}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

З точки зору внутрішніх властивостей ряду вигляду (1) співвідношення (3), зокрема, означають, що максимальний член $\mu(x, F)$ домінує в (1) над іншими членами ряду. У даній замітці встановимо подібну властивість для абсолютно збіжних в $\mathbb{C}$ рядів вигляду (1) з комплексними показниками (λ_n), $\lambda_n \in \mathbb{C}$, які визначають цілі функції. Позначимо через H клас таких функцій і для $F \in H$ визначимо

$$\mu_F(z) = \max\{|a_n|e^{\mathrm{Re}(z\lambda_n)} : n \geqslant 0\},\ \ \nu_F(z) = \max\{n : |a_n|e^{\mathrm{Re}(z\lambda_n)} = \mu_F(z)\},$$
$$\check{\mu}_F(z) = \mu_F(z)e^{\mathrm{iIm}(z\lambda_{\nu_F(z)})},$$

а також визначимо множину $K_F = \{z : \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t}\ln\mu_F(tz) = +\infty\}$. Зауважимо, що $z \in K_F$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $\alpha > 0$, $\alpha z \in K_F$. Крім цього $z \in K_F$ лише в тому випадку, якщо $\sup\{\mathrm{Re}(z\lambda_n) : n \geqslant 0\} = +\infty$. Нехай (μ_n) – така послідовність, як і вище. Справедливе твердження.

Теорема 1. *Якщо для цілої функції $F \in H$ виконується умова (2), то для кожної множини K такої, що $\overline{K} \subset K_F$ співвідношення*

$$F(z) = (1 + o(1))\,\check{\mu}_F(z) \tag{5}$$

справджується при $z \to \infty$ $(z \in K \setminus E)$ рівномірно по $z \in K$, де $E \subset \mathbb{C}$ – деяка множина така, що

$$\tau(E \cap \{z : |z| \geqslant 1\}) < +\infty,\ \tau(E) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int \frac{d\tau_1(z)}{|z|^2},$$

τ_1 – міра Лебега на площині.

Доведення. Йдучи за [1], визначимо

$$\delta(l,j) = (j - l + 1)^{-1-\varepsilon}\sum_{m=l}^{j}(\mu_{m+1} - \mu_m)^{-1}, 0 < \varepsilon < 1,$$
$$\delta_k = \max\{\delta(l,j) : 0 \leqslant l \leqslant k - 1 \leqslant j < +\infty\}\,(k \geqslant 1), \delta_0 = \delta_1.$$

Тоді, якщо збіжний ряд (2), то (див.[1]) знайдеться послідовність $c_k \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$, $c_0 = 0$, така, що $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\varepsilon_k < +\infty$, $0 \leqslant \varepsilon_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} c_k\delta_k < \dfrac{1}{2}$ $(k \geqslant 0)$. Відзначимо також, що (див.[1])

$$\sum_{n\neq\nu}\exp\{-c_\nu|\mu_n - \mu_j|\} = o(1) \tag{6}$$

при $\nu \to +\infty$.

Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $\mu_n = -\ln|a_n|$ $(n \geqslant 0)$. Нехай $z_\theta = e^{i\theta}$, $\theta \in [0; 2\pi]$ – фіксоване число таке, що $z_0 \in K_F$. Розглянемо ряд

$$f(\sigma) = f_\theta(\sigma) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{\sigma\mu_n}, \qquad b_n = \exp\{\mathrm{Re}(z_\theta \cdot \lambda_n)\}.$$

Покажемо, що центральний індекс

$$\nu(\sigma, f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\{n : b_n e^{\sigma\mu_n} = \mu(\sigma, f)\} \to +\infty$$

при $\sigma \to -0$. Справді, при $\sigma = -\dfrac{1}{t}$, $t > 0$, $b_n e^{\sigma\mu_n} = \left(|a_n| e^{\mathrm{Re}(te^{i\theta}\cdot\lambda_n)}\right)^{1/t} \to 0$ $(n \to +\infty)$, тому для кожного $\sigma < 0$ маємо $\nu(\sigma, f) < +\infty$. Оскільки $\sup\{b_n : n \geqslant 0\} = +\infty$ і $\varliminf\limits_{\sigma\to-0} \mu(\sigma, f) \geqslant \varliminf\limits_{\sigma\to-0} b_n e^{\sigma\mu_n} = b_n (n \geqslant 0)$, то $\mu(\sigma, f) \uparrow +\infty$ $(\sigma \to -0)$, а, отже, $\nu(\sigma, f) \to +\infty \quad (\sigma \to -0)$.

Нехай (σ_n) – послідовність точок стрибка $\nu(\sigma, f)$, тобто, якщо $\sigma \in [\sigma_n, \sigma_{n+1})$, то $\nu(\sigma, f) = n$. Якщо ж $\nu(\sigma_{n+1} - 0, f) = n$ та $\nu(\sigma_{n+1}, f) = n + p$, то вважаємо $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+2} = \ldots = \sigma_{n+p} < \sigma_{n+p+1}$. Зауважимо, що $\sigma_n \to -0 \quad (n \to +\infty)$.

Якщо тепер $\sigma \in [\sigma_n, \sigma_{n+1})$, то рівності

$$\nu(\sigma(1 \pm \varepsilon_{\nu(\sigma,f)}), f) = \nu(\sigma, f) \tag{7}$$

виконуються одночасно для тих σ, що належать $\left[\dfrac{\sigma_n}{1+\varepsilon_n}, \dfrac{\sigma_{n+1}}{1-\varepsilon_n}\right)$. Тобто, для всіх $\sigma \in (-\infty; 0) \setminus E(\theta) \left(E(\theta) \overset{def}{=} \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \left([\sigma_n; \dfrac{\sigma_n}{1+\varepsilon_n}) \cup [\dfrac{\sigma_{n+1}}{1-\varepsilon_n}, \sigma_{n+1})\right)\right)$ правильні рівності (7). Для логарифмічної міри множини $E(\theta)$, отже, маємо

$$l_0\text{-meas}\, E(\theta) \overset{def}{=} \int\limits_{E(\theta)\cap[-1;0)} d \ln \frac{1}{|\sigma|} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln(1+\varepsilon_n) + \ln(\frac{1}{1-\varepsilon_n})\right) \leqslant$$

$$\leqslant 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n \overset{def}{=} A < +\infty, \tag{8}$$

тобто оцінка зверху логарифмічної міри множини $E(\theta)$ від θ не залежить. Нехай $E_1(\theta)$ – множина, яка є образом множини $E(\theta)$ при відображенні $t = -\dfrac{1}{\sigma}$. Логарифмічна міра цієї множини на $[1; +\infty)$, очевидно, пов'язана з логарифмічною мірою множини $E(\theta)$ на $[-1; 0)$ рівністю

$$l_{n-\mathrm{meas} E_1(\theta)} \overset{def}{=} \int\limits_{E_1(\theta)\cap[1;+\infty)} d \ln t = \int\limits_{E(\theta)\cap[-1;0)} d \ln \frac{1}{|\sigma|} = l_0\text{-meas}\, E(\theta) \leqslant A. \tag{9}$$

Якщо тепер $E_1 = \bigcup\limits_{0\leqslant\theta<2\pi} \{te^{i\theta} : t \in E_1(\theta), t \geqslant 1\}$, то з (8) і (9) маємо

$$\tau(E_1) = \iint\limits_{E_1} \frac{d\nu(z)}{|z|^2} = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_{[1;+\infty)\cap E_1(\theta)} \frac{dt}{t} \leqslant 2\pi A < +\infty.$$

Оскільки для $z = te^{i\theta} \notin E_1$ маємо $t \notin E_1(\theta)$ або $\sigma = -\dfrac{1}{t} \notin E(\theta)$, то із рівностей (7) за означенням максимального члена $\mu(\sigma, f)$ для всіх $n \geqslant 0$ при $\nu = \nu(\sigma, f)$ маємо

$$b_n e^{\sigma(1\pm\varepsilon_\nu)\mu_n} \leqslant \mu\left(\sigma(1 \pm \varepsilon_\nu), f\right) = b_\nu e^{\sigma(1\pm\varepsilon_\nu)\mu_\nu}.$$

Звідси, вибираючи оптимально знак, послідовно одержуємо

$$b_n e^{\sigma\mu_n} \leqslant \mu(\sigma, f) e^{-|\sigma|\varepsilon_\nu|\mu_n - \mu_\nu|}$$

і, отже, для всіх $n \geqslant 0$ і $t \notin E_1(\theta)$

$$|a_n| e^{t\mathrm{Re}(\lambda_n e^{i\theta})} \leqslant \mu_F(te^{i\theta}) e^{-\varepsilon_\nu|\mu_n - \mu_\nu|}.$$

Тобто, для всіх $z \in K_F \setminus E_1$

$$\sum_{n\neq\nu} |a_n| e^{\mathrm{Re}(z\lambda_n)} \leqslant \mu_F(z) \sum_{n\neq\nu} e^{-\varepsilon_\nu|\mu_n-\mu_\nu|},$$

де $\nu = \nu(-\frac{1}{|z|}, f_\theta)$. Звідси, із співвідношення (6) негайно одержуємо твердження теореми 1 у випадку $\nu \to +\infty$. Залишилось показати, що $\nu(-\frac{1}{|z|}, f_\theta) \to +\infty\, (z \to \infty, z \in K)$, або, що те ж саме, $\nu_F(z) = \max\{n : |a_n| e^{\mathrm{Re}\,(z\lambda_n)} = \mu_F(z)\} \to +\infty\, (z \to +\infty, z \in K)$.

Завершує доведення застосування такої леми.

Лема. *Нехай $F \in H$ – функція вигляду (1). Якщо послідовність $n_j \uparrow +\infty$ така, що $\lambda_n \to \infty$ $(n = n_j \to +\infty), a_n \neq 0$ $(n = n_j)$ і $\varphi_n = \arg\lambda_n \to \varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ $(n = n_j \to +\infty)$, то $[-\varphi_0 - \frac{\pi}{2}; -\varphi_0 + \frac{\pi}{2}] \subset \overline{K}_F$. При цьому для кожного $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ виконується*

$$\frac{1}{t}\ln\mu_F(te^{i\theta}) \to +\infty, \quad \nu_F(te^{i\theta}) \to +\infty$$

при $t \to +\infty$ рівномірно за $\theta \in [-\varphi_0 - \delta; -\varphi_0 + \delta]$.

Доведення леми негайно отримуємо із наступного. Оскільки $\ln|a_k| \leqslant c < +\infty$ $(k \geqslant 0)$, то при $n = n_j$ маємо

$$c + \nu_F(te^{i\theta}) \geqslant \frac{1}{t}\ln\mu_F(te^{i\theta}) \geqslant \frac{1}{t}\ln|a_n| + |\lambda_n|\cos(\theta+\varphi_n) \geqslant \frac{1}{t}\ln|a_n| + |\lambda_n|\cos\delta.$$

Тому, $c + \inf\{\nu_F(te^{i\theta}) \,:\, |\theta+\varphi_0| \leqslant \delta < \frac{\pi}{2}\} \geqslant \inf\{\frac{1}{t}\ln\mu_F(te^{i\theta}) \,:\, |\theta+\varphi_0| \leqslant \delta\} \geqslant$ $\geqslant \frac{1}{t}\ln|a_n| + |\lambda_n|\cos\delta$. Звідси, оскільки $|\lambda_{n_j}| \to +\infty$, отримуємо твердження леми, а з нею і теореми 1.

Зауваження. З леми випливає, що у випадку $0 < \beta - \alpha < \pi$, де $\beta = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}^{*} \arg\lambda_n$, $\alpha = \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}^{*} \arg\lambda_n$, (при цьому $\lim^*$ означає, що границя береться вздовж підпослідовностей $\lambda_{n_j} \to +\infty$) маємо

$$I \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(-\beta - \frac{\pi}{2}; -\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \subset K_F,\ \overline{I} = \overline{K}_F.$$

Непокращуваність умов теореми 1 (необхідність (2)) в класі всіх цілих рядів Діріхле вигляду (1) з фіксованою послідовністю $\mu_n = \ln\frac{1}{|a_n|} \uparrow +\infty$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\mu_n} < +\infty$ негайно отримуємо із цитованого вище результату із статті [1].

Зауважимо, що у випадку $\sup\{|\lambda_j| \,|\, j \geqslant 0\} < +\infty$ виконується $K_F = \emptyset$.

1. Скаскив О.Б. *О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей* // Матем. заметки. – 1994. – Т.56, N5. – С. 117–128.

Стаття надійшла до редколегії 01.04.1998

УДК 517.95

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ ПЕРШОЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ІЗ СИНГУЛЯРНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ

В. М. Флюд

Flyud V. M. Asymtotic expansion of a solution of the first boundary value problem with singular coefficient for the heat equation. Mathematical model of heat propagation in a strong non-homogeneous rod is considered. The full asymptotic expansion of a solution of the boundary value problem for singular perturbed heat equation is constructed.

У праці [1] була запропонована математична модель локально неоднорідного середовища, в рамках якої можна досліджувати явища, властиві лише композитним матеріалам. Зокрема, в задачах на власні значення описані ефекти т.з. локальних та глобальних коливань Е. Санчез-Паленсії [2-5]. У статті згадана вище модель застосована для дослідження еволюційного процесу — задачі розповсюдження тепла в композитному стержні.

Розглянемо стержень, розташований на осі OX з кінцями в точках $b_- < 0$ і $b_+ > 0$. Стержень виготовлений з двох матеріалів з різними властивостями, а саме: на інтервалі $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (вважаємо, що довжина стержня $b_+ - b_-$ є досить великою в порівнянні з ε, де ε – додатний параметр) стержень виготовлений з матеріалу, в якого добуток густини і питомої теплоємності є значно більший, ніж в інших точках стержня і є функцією змінної x. Задано початковий розподіл температури в стержні, а на кінцях підтримується нульова температура.

Нехай: $\Omega_\varepsilon^- = \{(t,x) :\ 0 < t < T,\ \ b_- < x < -\varepsilon\}$, $\omega_\varepsilon = \{(t,x) :\ 0 < t < T,\ \ -\varepsilon < x < \varepsilon\}$, $\Omega_\varepsilon^+ = \{(t,x) :\ 0 < t < T,\ \ \varepsilon < x < b_+\}$. Тоді $\Omega = \Omega_\varepsilon^- \cup \omega_\varepsilon \cup \Omega_\varepsilon^+$. Математичною моделлю даної задачі є мішана задача

$$\left(\rho(x) + \varepsilon^{-m}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} = f(t,x) \ \text{ в } \ \Omega, \tag{1}$$

$$u_\varepsilon(0,x) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$u_\varepsilon(t,b_-) = u_\varepsilon(t,b_+) = 0, \tag{3}$$

де $m \geqslant 3$, $\chi(\xi)$ – характеристична функція інтервалу (-1,1), $a = \text{const}$, $\rho(x) = \rho_0 = \text{const}$ для $x \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, $f(t,x) \equiv f(x)$ для $x \in \omega_\varepsilon$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35B25, 35K20.

Припустимо, що функції $\rho(x)$, $f(t,x)$, $\varphi(x)$ є достатньо гладкими для правильності проведених нижче викладок (гладкість цих функцій визначається порядком асимптотичного розвинення розв'язку досліджуваної задачі), а початкова і крайові умови (2), (3) узгоджені в кутових точках $(b_-,0)$ і $(0,b_+)$. Розв'язок задачі (1)-(3) шукатимемо в класі функцій двічі неперервно диференційовних за x і раз за t в Ω. Варто зауважити, що крім умов (2), (3) розв'язок u_ε задовольняє умови спряження на відрізках прямих $x=\pm\varepsilon$

$$u_\varepsilon(t,\pm\varepsilon-0)=u_\varepsilon(t,\pm\varepsilon+0), \qquad \frac{\partial u_\varepsilon(t,\pm\varepsilon-0)}{\partial x}=\frac{\partial u_\varepsilon(t,\pm\varepsilon+0)}{\partial x}. \tag{4}$$

Нехай N – фіксоване натуральне число. Асимптотичне розвинення розв'язку мішаної задачі (1)-(3) для $m=3$ при зроблених вище припущеннях будуватимемо у вигляді

$$u_\varepsilon(t,x)\sim\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{N}\varepsilon^{\frac{k}{2}}v_k^{\pm}(\tau,x)+\sum\limits_{k=0}^{N}\varepsilon^{\frac{k}{2}}V_k^{\pm}(t,x)+R_N^{\pm}(t,x;\varepsilon) & \text{в}\quad \Omega_\varepsilon^{\pm},\\ \sum\limits_{k=0}^{N+4}\varepsilon^{\frac{k}{2}}w_k(\tau,\xi)+\sum\limits_{k=0}^{N+6}\varepsilon^{\frac{k}{2}}(h_k^-(t,\zeta_-)+h_k^+(t,\zeta_+))+r_N(t,x;\varepsilon) & \text{в}\quad \omega_\varepsilon,\end{cases} \tag{5}$$

де $\tau=\varepsilon t$, $\xi=\frac{x}{\varepsilon}$, $\zeta_+=\dfrac{1-\xi}{\varepsilon^{\frac12}}=\dfrac{\varepsilon-x}{\varepsilon^{\frac32}}$, $\zeta_-=\dfrac{1+\xi}{\varepsilon^{\frac12}}=\dfrac{\varepsilon+x}{\varepsilon^{\frac32}}$. Опишемо ітераційний процес знаходження функцій з (5).

Підставивши замість функції u_ε її вигляд (5) у відповідній області в (1), (2), (3), (4), стандартним способом теорії сингулярних збурень [1] отримаємо задачі у відповідних областях для визначення функцій асимптотичного наближення (випишемо їх у порядку проведення рекурентного процесу).

Функції $w_k(\tau,\xi)$ є розв'язками другої мішаної задачі для рівняння теплопровідності в ω_ε :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w_k}{\partial\tau}-a^2\dfrac{\partial^2 w_k}{\partial\xi^2}=f_{k-4}(\xi)-\sum\limits_{s=0}^{k-6}\rho_s(\xi)\dfrac{\partial w_{k-s-6}}{\partial\tau},\\ w_k(0,\xi)=\varphi_k(\xi),\\ \dfrac{\partial w_k(\tau,\pm1)}{\partial\xi}=\sum\limits_{s=0}^{[\frac{k}{2}]-1}\dfrac{(\pm1)^s}{s!}\dfrac{\partial^{s+1}v_{k-2s-2}^{\pm}(\tau,0)}{\partial x^{s+1}}, \quad k=\overline{0,N+4};\end{cases} \tag{6}$$

де $\varphi_k(\xi)\equiv\begin{cases}0, & \text{для}\quad k=2i+1,\\ \dfrac{\xi^i}{i!}\dfrac{d^i\varphi(0)}{dx^i}, & \text{для}\quad k=2i,\end{cases}$ $\quad f_k(\xi)\equiv\begin{cases}0, & \text{для}\quad k=2i+1,\\ \dfrac{\xi^i}{i!}\dfrac{d^i f(0)}{dx^i}, & \text{для}\quad k=2i.\end{cases}$

Тут і надалі приймаємо, що сума, в якої верхній індекс сумування менший за нижній, а також функції з від'ємними індексами тотожно рівні нулеві.

Для визначення функцій $v_k^{\pm}(\tau,x)$ отримали крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку (τ виступає як параметр)

$$\begin{cases}a^2\dfrac{\partial^2 v_k^{\pm}}{\partial x^2}=\rho(x)\dfrac{\partial v_{k-2}^{\pm}}{\partial\tau},\\ v_k^{\pm}(\tau,b_\pm)=0,\\ v_k^{\pm}(\tau,0)=w_k(\tau,\pm1)-\sum\limits_{s=1}^{[\frac{k}{2}]}\dfrac{(\pm1)^s}{s!}\dfrac{\partial^s v_{k-2s}^{\pm}(\tau,0)}{\partial x^s}, \quad k=\overline{0,N}.\end{cases} \tag{7}$$

Функції $h_k^{\pm}(t,\zeta_\pm)$ ліквідують нев'язку, яку вносять функції $V_k^{\pm}$ у другу умову спряження (4) і мають характер функцій примежевого шару в околі границь $x=\pm\varepsilon$ області ω_ε

відповідно. Вони визначаються із задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_k^{\pm}}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 h_k^{\pm}}{\partial \zeta_{\pm}{}^2} = -\rho_0 \dfrac{\partial h_{k-6}^{\pm}}{\partial t}, \\ h_k^{\pm}(0, \zeta_{\pm}) = 0, \\ \dfrac{\partial h_k^{\pm}(t,0)}{\partial \zeta_{\pm}} = \mp \sum\limits_{s=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]-1} \dfrac{(\pm 1)^s}{s!} \dfrac{\partial^{s+1} V_{k-2s-3}^{\pm}(t,0)}{\partial x^{s+1}}, \quad k = \overline{0, N+6}. \end{cases} \tag{8}$$

Функції $V_k^{\pm}(t,x)$ визначаються як розв'язки першої мішаної задачі для рівняння теплопровідності

$$\begin{cases} \rho(x) \dfrac{\partial V_k^{\pm}}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 V_k^{\pm}}{\partial x^2} = f(t,x)\delta_k^0, \\ V_k^{\pm}(0,x) = \varphi(x)\delta_k^0 - v_k^{\pm}(0,x), \\ V_k^{\pm}(t, b_{\pm}) = 0, \\ V_k^{\pm}(t,0) = h_k^{\pm}(t,0) - \sum\limits_{s=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \dfrac{(\pm 1)^s}{s!} \dfrac{\partial^s V_{k-2s}^{\pm}(t,0)}{\partial x^s}, \quad k = \overline{0, N}, \end{cases} \tag{9}$$

де δ_k^0 – символ Кронекера;

Для залишкових членів $R_N^{\pm}(t,x;\varepsilon)$ асимптотичного розвинення (5) в областях Ω_ε^- і Ω_ε^+ відповідно отримуємо задачі

$$\rho(x) \frac{\partial R_N^{\pm}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 R_N^{\pm}}{\partial x^2} = -\varepsilon^{\frac{N+1}{2}} \rho(x) \left(\frac{\partial v_{N-1}^{\pm}}{\partial \tau} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial v_N^{\pm}}{\partial \tau} \right), \tag{10}$$

$$\begin{cases} R_N^{\pm}(0,x;\varepsilon) = 0, \quad R_N^{\pm}(t, b_{\pm}; \varepsilon) = 0, \\ R_N^{\pm}(t, \pm\varepsilon; \varepsilon) = -\,\varepsilon^{\frac{N+1}{2}} \sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} \dfrac{(\pm 1)^k}{k!} \left\{ \dfrac{\partial^k v_{N+1-2k}^{\pm}(\tau, \theta_{1,N+1-2k}^{\pm})}{\partial x^k} + \right. \\ \qquad\qquad \left. \dfrac{\partial^k V_{N+1-2k}^{\pm}(t, \theta_{2,N+1-2k}^{\pm})}{\partial x^k} \right\} - \\ \qquad \varepsilon^{\frac{N+2}{2}} \sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{N+2}{2}\right]} \dfrac{(\pm 1)^k}{k!} \left\{ \dfrac{\partial^k v_{N+2-2k}^{\pm}(\tau, \theta_{3,N+2-2k}^{\pm})}{\partial x^k} \dfrac{\partial^k V_{N+2-2k}^{\pm}(t, \theta_{4,N+2-2k}^{\pm})}{\partial x^k} \right\} + \\ \qquad \sum\limits_{k=N+1}^{N+6} \varepsilon^{\frac{k}{2}} h_k^{\pm}(t,0) + \sum\limits_{k=0}^{N+6} \varepsilon^{\frac{k}{2}} h_k^{\mp}(t, 2\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) + \sum\limits_{k=N+1}^{N+4} \varepsilon^{\frac{k}{2}} w(\tau, 1), \end{cases} \tag{11}$$

де $\theta_{1,N+1-2k}^{\pm}$, $\theta_{2,N+1-2k}^{\pm}$, $\theta_{3,N+2-2k}^{\pm}$, $\theta_{4,N+2-2k}^{\pm}$, – точки з ліво- і правостороннього ε-околу початку координат відповідно.

Залишковий член $r_N(t,x;\varepsilon)$ асимптотичного розвинення (5) в області ω_ε є розв'язком другої мішаної задачі для рівняння теплопровідності

$$(\rho_0+\varepsilon^{-3})\frac{\partial r_N}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 r_N}{\partial x^2}=\varepsilon^{\frac{N+1}{2}}f_{N+1}(\sigma_{N+1})+\varepsilon^{\frac{N+2}{2}}f_{N+2}(\sigma_{N+2})-\\ -\rho_0\sum_{k=N+1}^{N+6}\varepsilon^{\frac{k}{2}}\left(\frac{\partial w_{k-2}}{\partial\tau}+\frac{\partial h_k^+}{\partial t}+\frac{\partial h_k^-}{\partial t}\right),\quad(12)$$

$$\begin{cases} r_N(0,x;\varepsilon)=\varepsilon^{\frac{N+5}{2}}\varphi_{N+5}(\sigma_{N+5})+\varepsilon^{\frac{N+6}{2}}\varphi_{N+6}(\sigma_{N+6}),\\ \dfrac{\partial r_N(t,\pm\varepsilon;\varepsilon)}{\partial x}=\varepsilon^{\frac{N+3}{2}}\displaystyle\sum_{k=2}^{\left[\frac{N+3}{2}\right]}\frac{(\pm1)^k}{k!}\frac{\partial^{k+1}v^{\pm}_{N+3-2k}(\tau,\theta^{\pm}_{1,N+3-2k})}{\partial x^{k+1}}+\\ \varepsilon^{\frac{N+4}{2}}\displaystyle\sum_{k=2}^{\left[\frac{N+4}{2}\right]}\frac{(\pm1)^k}{k!}\left(\frac{\partial^{k+1}v^{\pm}_{N+4-2k}(\tau,\theta^{\pm}_{2,N+4-2k})}{\partial x^{k+1}}+\right.\\ \left.\dfrac{\partial^{k+1}V^{\pm}_{N+4-2k}(t,\theta^{\pm}_{3,N+4-2k})}{\partial x^{k+1}}\right)+\\ \varepsilon^{\frac{N+5}{2}}\displaystyle\sum_{k=3}^{\left[\frac{N+5}{2}\right]}\frac{(\pm1)^k}{k!}\frac{\partial^{k+1}V^{\pm}_{N+5-2k}(t,\theta^{\pm}_{4,N+5-2k})}{\partial x^{k+1}}\mp\\ \varepsilon^{-\frac{3}{2}}\displaystyle\sum_{k=0}^{N+6}\varepsilon^{\frac{k}{2}}\frac{\partial h_k^{\mp}(t,2\varepsilon^{-\frac{1}{2}})}{\partial\zeta_{\mp}}, \end{cases}\quad(13)$$

де $\theta^{\pm}_{1,N+3-2k}$, $\theta^{\pm}_{2,N+4-2k}$, $\theta^{\pm}_{3,N+4-2k}$, $\theta^{\pm}_{4,N+5-2k}$ – точки з ліво- і правостороннього ε-околу початку координат відповідно; σ_{N+1}, σ_{N+2}, σ_{N+5}, σ_{N+6} – точки з інтервалу $\left(-\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Роз'язок задачі (8) має вигляд [2]:

$$h_k^{\pm}(t,\zeta_{\pm})=\pm\frac{a}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]-1}\frac{(\pm1)^s}{s!}\int_0^t\frac{e^{-\frac{\zeta_{\pm}^2}{4a^2(t-\mu)}}}{\sqrt{t-\mu}}\cdot\frac{\partial^{s+1}V^{\pm}_{k-2s-3}(\mu,0)}{\partial x^{s+1}}d\mu-\\ -\frac{\rho_0}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\mu}{\sqrt{t-\mu}}\int_0^{\infty}\left[e^{-\frac{(\zeta_{\pm}-\nu)^2}{4a^2(t-\mu)}}-e^{-\frac{(\zeta_{\pm}+\nu)^2}{4a^2(t-\mu)}}\right]\frac{\partial h^{\pm}_{k-6}(\mu,\nu)}{\partial\mu}d\nu,\quad k=\overline{0,N+6}.\quad(14)$$

Беручи до уваги гладкість функцій ρ, f, φ і обмеженість $w_k(\tau,\xi)$, $v_k^{\pm}(\tau,x)$, $V_k^{\pm}(t,x)$ і їх похідних як розв'язків задач (6), (7), (9) відповідно, з (14) неважко отримати, що $h_k^{\pm}(t,\zeta_{\pm})$ і їх похідні є функціями порядку $O(\varepsilon^{\frac{N+1}{2}})$.

Застосовуючи принцип максимуму, для розв'язків задач (10),(11) і (12),(13) отримуємо оцінки:

$$|R_N^{\pm}(t,x;\varepsilon)|\leqslant C^{\pm}\varepsilon^{\frac{N+1}{2}},\qquad|r_N(t,x;\varepsilon)|\leqslant c\varepsilon^{\frac{N+1}{2}},\quad(15)$$

де $C^{\pm}$ і c – незалежні від ε додатні сталі.

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

Теорема. *Нехай функції* $\rho(x)$, $f(t,x)$, $\varphi(x)$ *є достатньо гладкими функціями в* Ω. *Тоді для достатньо малого значення параметра* ε *розв'язок* u_ε *задачі (1)-(3) з умовами спряження (4) допускає асимптотичне розвинення (5), де функції* $w_k(\tau,\xi)$, $v_k^{\pm}(\tau,x)$, $h_k^{\pm}(t,\zeta_\pm)$, $V_k^{\pm}(t,x)$ *- розв'язки задач (6), (7), (8), (9) відповідно, для залишкових членів* $R_N^{\pm}(t,x;\varepsilon)$ *та* $r_N(t,x;\varepsilon)$ *правильні оцінки (15).*

Зауваження. Міркування, наведені вище, залишаються правильними у випадку мішаної задачі для рівняння (1) з крайовими умовами (3) і початковою умовою

$$u_\varepsilon(0,x)=\varphi(x)+\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

де ψ є достатньо гладкою функцією, носієм якої є інтервал $(-1,1)$. Асимптотичне розвинення такої задачі має вигляд (5). Функції w_k, v_k, $h_k^{\pm}$, $V_k^{\pm}$, за винятком w_0, визначаються як розв'язки задач (6), (7), (8), (9) відповідно. Функція w_0 є розв'язком однорідного рівняння і крайових умов (6) при початковій умові $w_0(0,\xi)=\varphi(0)+\psi(\xi)$. Для $R_N^{\pm}(t,x;\varepsilon)$ та $r_N(t,x;\varepsilon)$ правильні оцінки (15).

1. Olejnik O.A. *Homogenization problems in elasticity.Spectrum of singularily perturbed operators*// Non-classical continuum mechanics. Lecture Notes series. Cambridge University Press. – 1987. – 122. – P.188-205.
2. Sanchez-Palensia E. *Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses*// Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics. Berlin: Springer-Verlag. – 1984. – P.346-368.
3. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А., Соболева Т.С. *О собственных колебаниях струны с присоединенной массой* // Сиб. мат. журн. – 1988. – Т.29, N5. – С.71-91.
4. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А. *Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями* // Труды Математ. ин–та им. В.А.Стеклова.— 1990.— Т.192.— С.42–60.
5. Головатый Ю.Д. *Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами: эффект локальних колебаний* // Труды Московского мат. о–ва.— 1992.— Т.54.— С.29–72.
6. Вишик М. И., Люстерник Л. А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром*// Успехи матем. н..– 1957.–Т. 12, Вып. 5.–С.3-122.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука. 1966.

Стаття надійшла до редколегії 2.06.1998

УДК 531

ПРО УМОВИ СТІЙКОСТІ РУХУ ЗА ДВОМА МІРАМИ ПРУЖНИХ ТІЛ В ЛІНЕАРИЗОВАНОМУ ФОРМУЛЮВАННІ ЗАДАЧІ

П. П. Доманський

Domanskyj P.P. On the conditions of two measures stability of movement of elastic bodies in linearized problem setting. The sufficient conditions for stability of the zero-solution under two special measures for the stability movement linearized equations of isotropic elastic solids under power loading with kinematic, dynamic and mixed boundary conditions are established. The analysis of the stability conditions is illustrated on the solids of Murnagan material as well as standard materials of the first and second orders.

1.**Вихідні співвідношення.** Розглянемо однорідне ізотропне пружне тіло K. Задамо фіксовану γ_0-конфігурацію цього тіла (область X_0 , обмежену поверхнею ∂X_0), яку назвемо відліковою. Місце частинки $k \in K$ в цій конфігурації задається радіус-вектором $\vec{r}_0$– неперервною і потрібне число разів диференційовною вектор-функцією $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, де $\{\xi^i\}$– лагранжеві координати. За $\{\xi^i\}$ $(i = \overline{1,3})$ приймаємо координати місця частинки $k \in K$ у відліковій γ_0-конфігурації в єдиній для всіх конфігурацій прямокутній декартовій системі координат

$$\vec{r}_0 = \xi^1 \vec{\ni}_1^{\,0} + \xi^2 \vec{\ni}_2^{\,0} + \xi^3 \vec{\ni}_3^{\,0} \equiv \xi^i \vec{\ni}_i^{\,0}.$$

З моменту часу $\tau = \tau_0$ (початковий момент часу) на тіло починають діяти зовнішні масові і поверхневі сили. Внаслідок цього у момент часу τ тіло займе в просторі конфігурацію γ_τ, яку називаємо актуальною. Положення частинки $k \in K$ в γ_τ-конфігурації визначається радіус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3; \tau) = \vec{r}_0 + \vec{u}_0$, де $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3; \tau) \equiv \vec{u}_0(\vec{r}_0; \tau)$– вектор переміщення із γ_0 в γ_τ-конфігурацію.

Напружений стан γ_τ-конфігурації будемо характеризувати тензором напружень Піоли-Кірхгофа

$$\hat{P}_0 = \hat{P}_0 \left(\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{r} \right) = \frac{dU_0}{d \overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{r}},$$

де $\hat{P}_0(\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{r})$– тензорна функція, що характеризує зв'язок між тензором напружень і градієнтом місця; U_0– густина потенціальної енергії деформації; $\overrightarrow{\nabla}_0 = \vec{\ni}_0^{\,i} \frac{\partial}{\partial \xi^i}$– набла - оператор Гамільтона в γ_0-конфігурації; $\{\vec{\ni}_0^{\,i}\}$– база, біортогональна до бази $\{\vec{\ni}_i^{\,0}\}$; " $\otimes$ " - операція тензорного (зовнішнього) добутку.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35B35, 73C99.

Поряд з актуальною γ_τ-конфігурацією, яку вважаємо базовою (незбуреною), розглядаємо ще одну актуальну γ_τ^*-конфігурацію, яку назвемо збуреною. Приймаємо, що збурення викликані збуренням (варіацією) початкових умов в γ_τ-конфігурації. Місце частинки $k \in K$ і тензор напружень Піоли-Кірхгофа в γ_τ^*-конфігурації будемо позначати

$$\vec{r}_* = \vec{r}_*(\xi^1, \xi^2, \xi^3; \tau) = \vec{r}_0 + \vec{u}_*, \qquad \hat{P}_* = \hat{P}_0(\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{r}_*),$$

де $\vec{u}_* = \vec{u}_*(\xi^1, \xi^2, \xi^3; \tau)$– вектор переміщення з γ_0 в γ_*-конфігурацію.

Приймаємо, що

$$\vec{u}_* = \vec{u}_0 + \vec{u}, \qquad \hat{P}_* = \hat{P}_0 + \hat{P}.$$

Величини $\hat{P}$ і $\vec{u}$ назвемо збуренням (варіацією) тензора напружень Піоли-Кірхгофа і вектора переміщення в γ_τ-конфігурації відповідно.

Вважаючи, що напружено-деформівний стан γ_τ-конфігурації є відомим, у праці [1] отримано рівняння стосовно збурень

$$\overrightarrow{\nabla}_0 \cdot \hat{P} + \rho_0 \left(\vec{f}_* - \vec{f}_0 \right) = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}, \tag{1}$$

яке є рівнянням стійкості руху пружного тіла K. Тут $\vec{f}_0$ – вектор масових сил, віднесений до одиниці маси, $\vec{f}_*$ – його значення в γ_τ-конфігурації, ρ_0 – густина розподілу маси стосовно γ_0-конфігурації.

Надалі масові сили будемо вважати "мертвими". Тоді $\vec{f}_* = \vec{f}_0$ і рівняння стійкості руху (1) набуде вигляду

$$\overrightarrow{\nabla}_0 \cdot \hat{P} = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}. \tag{2}$$

На межі ∂X_0 будемо розглядати [2] або кінематичні граничні умови вигляду

$$\vec{u}|_{\partial X_0} = 0, \tag{3}$$

або динамічні граничні умови

$$\vec{n}_0 \cdot \hat{P}\Big|_{\partial X_0} = \left(\vec{q}_* \frac{d\Sigma_*}{d\Sigma_0} - \vec{q} \frac{d\Sigma}{d\Sigma_0} \right)\Bigg|_{\partial X_0}, \tag{4}$$

або умови змішаного вигляду

$$\vec{\ni}_i^0 \cdot \vec{u}\Big|_{\partial X_0} = 0, \qquad \vec{\ni}_j^0 \cdot \left(\vec{n}_0 \cdot \hat{P} \right)\Big|_{\partial X_0} = \vec{\ni}_j^0 \cdot \left(\vec{q}_* \frac{d\Sigma_*}{d\Sigma_0} - \vec{q} \frac{d\Sigma}{d\Sigma_0} \right)\Bigg|_{\partial X_0}. \tag{5}$$

Тут $\vec{q}$ – вектор поверхневих сил, віднесений до одиниці площі γ_τ-конфігурації; $\vec{q}_*$ – його значення в γ_τ^*-конфігурації; $d\Sigma_0$, $d\Sigma$, $d\Sigma_*$ – площі елементарної площадки в γ_0, γ_τ, γ_τ^*-конфігураціях відповідно; $\vec{n}_0$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні ∂X_0. У формулах (5) індекс i приймає одне або два значення із множини $\{1, 2, 3\}$, а індекс j приймає два або одне значення із цієї ж множини, причому $i \neq j$.

Крім умов вигляду (3), (4) або (5) будемо розглядати також випадок, коли на різних ділянках поверхні ∂X_0 задаються відмінні граничні умови. Точніше, якщо $\partial X_0 = \partial X_u \cup \partial X_p \cup \partial X_{up}$, то на ∂X_u задаються умови (3), на ∂X_p – умови вигляду (4), а на ∂X_{up} – умови вигляду (5).

Зауважимо, що коли поверхневе навантаження є "мертвим", то $\vec{q}_* d\Sigma_* = \vec{q} d\Sigma$ і тому праві частини в умовах (4) і (5) дорівнюють нулеві.

Початкові умови в усіх задачах мають вигляд

$$\vec{u}|_{\tau=\tau_0} = \vec{\varphi}(\vec{r}_0), \qquad \left.\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right|_{\tau=\tau_0} = \vec{\psi}(\vec{r}_0), \tag{6}$$

де $\vec{\varphi}$, $\vec{\psi}$ – збурення векторів переміщення і швидкості в початковий момент часу.

Записані співвідношення стійкості руху пружних тіл (2), (4), (5) є, взагалі кажучи, геометрично і фізично нелінійними. Якщо лінеаризувати їх в околі базової конфігурації, тобто наближено прийняти, що

$$\hat{P} = \hat{P}_0\left(\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{r}_*\right) - \hat{P}_0\left(\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{r}\right) \approx \hat{P}_0^{\bullet}\left(\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0\right),$$
$$\vec{q}_* \frac{d\Sigma_*}{d\Sigma_0} - \vec{q}\frac{d\Sigma}{d\Sigma_0} \approx \vec{Q}_0^{\bullet}\left(\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0, \vec{q}\right),$$

де $\hat{P}_0^{\bullet}$, $\vec{Q}_0^{\bullet}$ – лінійні стосовно аргумента $\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$ функції, то одержимо відповідні лінеаризовані співвідношення стійкості руху при великих (скінченних) початкових деформаціях

$$\overrightarrow{\nabla}_0 \cdot \hat{P}_0^{\bullet} = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}, \tag{7}$$

$$\vec{u}|_{\partial X_0} = 0, \tag{8}$$

$$\vec{n}_0 \cdot \hat{P}_0^{\bullet}\Big|_{\partial X_0} = \vec{Q}_0^{\bullet}\Big|_{\partial X_0}, \tag{9}$$

$$\vec{\ni}_i^{\,0} \cdot \vec{u}\Big|_{\partial X_0} = 0, \qquad \vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \left(\vec{n}_0 \cdot \hat{P}_0^{\bullet}\right)\Big|_{\partial X_0} = \vec{\ni}_j^{\,0} \vec{Q}_0^{\bullet}\Big|_{\partial X_0}. \tag{10}$$

Надалі вважаємо, що поверхневе навантаження і збурення початкових умов в γ_τ-конфігурації є такими, що розв'язок рівняння (7) при кожному з варіантів сформульованих граничних умов і початковими умовами (6) існує і напружено-деформівний стан тіла K визначається однозначно.

У тих випадках, коли певні компоненти тензора деформації базового розв'язку є малими, то можливі відповідні спрощення (7), (9), (10) з метою отримання варіантів лінеаризованих співвідношень стійкості руху при малих початкових деформаціях.

2. Достатні умови стійкості руху. Рівняння (7) при будь-якому із варіантів граничних умов, що розглядаються, має розв'язок $\vec{u} \equiv 0$. При дослідженні стійкості цього розв'язку виберемо за міру відхилення базового розв'язку від збуреного функціонали

$$d_0\left[h(\cdot;\tau)\right] = \iiint\limits_{X_0} \left[\varkappa \vec{u}^2 + \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right)^2 + \left|\hat{P}_0^{\bullet} \cdot\cdot\, \vec{u} \otimes \overrightarrow{\nabla}_0\right|\right] dV_0, \tag{11}$$

$$d\left[h(\cdot;\tau)\right] = \iiint\limits_{X_0} \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right)^2 + \left|\hat{P}_0^{\bullet} \cdot\cdot\, \vec{u} \otimes \overrightarrow{\nabla}_0\right|\right] dV_0, \tag{12}$$

визначені на функціях

$$h(\vec{r}_0,\tau)=\left(\vec{u}(\vec{r}_0;\tau),\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}(\vec{r}_0;\tau)\right),$$

де $\vec{u}$ – розв'язки сформульованих крайових задач для рівняння (7), $\varkappa$ – розмірна стала. Очевидно, що $d_0[0]=d[0]=0$.

Означення. *Розв'язок $\vec{u}(\vec{r}_0;\tau)\equiv 0$ називаємо стійким за мірами (11), (12), якщо*

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta(\varepsilon)>0)\,(\forall h)\,(\forall\tau\geqslant\tau_0)\,[d_0[h(\cdot;\tau_0)]<\delta\implies d[h(\cdot;\tau)]<\varepsilon].$$

Розглянемо функціонал

$$V\left[h(\cdot,\tau)\right]=\iiint\limits_{X_0}\left[\rho_0\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\right)^2+\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0\right]dV_0.$$

Легко бачити, що функціонали d і V є неперервними в момент часу $\tau=\tau_0$ за мірою d_0 при $d_0=0$.

Обчислимо $\dfrac{dV}{d\tau}$:

$$\frac{dV}{d\tau}=\iiint\limits_{X_0}\left[2\rho_0\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2}+\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\cdot\,\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0+\frac{\partial\hat{P}_0^{\bullet}}{\partial\tau}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0\right]dV_0. \tag{13}$$

Перетворимо третій доданок підінтегрального виразу (13). Оскільки $\hat{P}_0^{\bullet}$ – лінійна тензорна функція стосовно аргумента $\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}$, то її можна подати у вигляді

$$\hat{P}_0^{\bullet}(\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u},\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0)=A^{ijst}\frac{\partial u_i}{\partial\xi^j}\vec{\ni}_s^{\,0}\otimes\vec{\ni}_t^{\,0}, \tag{14}$$

де A^{ijst} – величини, що залежать від градієнта базового розв'язку $\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0$. В залежності від характеру навантаження вони можуть залежати від часу, а можуть і не залежати. Із (14) знаходимо

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{P}_0^{\bullet}}{\partial\tau}&=\frac{\partial A^{ijst}}{\partial\tau}\frac{\partial u_i}{\partial\xi^j}\vec{\ni}_s^{\,0}\otimes\vec{\ni}_t^{\,0}+A^{ijst}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial u_i}{\partial\xi^j}\right)\vec{\ni}_s^{\,0}\otimes\vec{\ni}_t^{\,0}=\\&=\hat{L}(\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u})+\hat{P}_0^{\bullet}\left(\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau},\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0\right).\end{aligned} \tag{15}$$

Тут

$$\hat{L}(\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u})=\frac{\partial A^{ijst}}{\partial\tau}\frac{\partial u_i}{\partial\xi^j}\vec{\ni}_s^{\,0}\otimes\vec{\ni}_t^{\,0}=\hat{P}_0^{\bullet}(\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u},\frac{\partial}{\partial\tau}(\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0))\ -$$

лінійна тензорна функція, яка дорівнює нулеві у випадку, якщо градієнт $\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0$ не залежить від часу.

Із (15) випливає, що

$$\frac{\partial\hat{P}_0^{\bullet}}{\partial\tau}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0=\hat{L}(\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u})\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0+\hat{P}_0^{\bullet}\left(\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau},\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0\right)\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0. \tag{16}$$

Як відомо [4], для тензора $\hat{P}_0^{\bullet}$ характерна властивість взаємності. Тобто

$$\hat{P}_0^{\bullet}\left(\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau},\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0\right)\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0=\hat{P}_0^{\bullet}\left(\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u},\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0\right)\cdot\cdot\,\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0. \qquad (17)$$

Якщо підставити (16) і (17) в (13) і використати формулу Гауса - Остроградського, то одержимо

$$\frac{dV}{d\tau}=\iiint\limits_{X_0}\left[2\rho_0\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2}+2\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\cdot\,\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0+\hat{L}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0\right]dV_0=$$
$$=\iiint\limits_{X_0}\left[2\rho_0\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2}+2\overrightarrow{\nabla}_0\cdot\left(\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\right)-2\left(\overrightarrow{\nabla}_0\cdot\hat{P}_0^{\bullet}\right)\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}+\hat{L}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0\right]dV_0= \quad (18)$$
$$=\iiint\limits_{X_0}\left[2\left(\rho_0\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2}-\overrightarrow{\nabla}_0\cdot\hat{P}_0^{\bullet}\right)\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}+\hat{L}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0\right]dV_0+2\iint\limits_{\partial X_0}\vec{n}_0\cdot\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}dS.$$

Функціонал V запишемо у вигляді

$$V\left[h(\cdot,\tau)\right]=d\left[h(\cdot,\tau)\right]+\iiint\limits_{X_0}\left[\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0-\left|\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0\right|\right]dV_0. \qquad (19)$$

Із (19) випливає, що коли виконується нерівність

$$W(\vec{u})=\iint\limits_{X_0}\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0 dV_0\geqslant 0, \qquad (20)$$

то V є знаковизначеним додатним за мірою d.

Якщо використати теорему про стійкість руху за двома мірами систем з розподіленими параметрами [3], то із (18) і умови (20) знаковизначеності функціонала V за d приходимо до таких теорем.

Теорема 1. *Якщо при силовому поверхневому навантаженні тіла K виконується нерівність (20) і нерівність*

$$\iiint\limits_{X_0}\hat{L}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0\ dV_0\leqslant 0, \qquad (21)$$

то розв'язок $\vec{u}\equiv 0$ рівняння (7) при граничних умовах (8) є стійким за мірами (11), (12). Якщо ж при цьому градієнт базового розв'язку не залежить від часу, то достатньою умовою стійкості є виконання лише нерівності (20).

Теорема 2. *Якщо при силовому поверхневому навантаженні тіла K виконується нерівність (20) і нерівність*

$$\iiint\limits_{X_0}\hat{L}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0 dV_0+2\iint\limits_{\partial X_0}\vec{Q}_0^{\bullet}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}dS\leqslant 0, \qquad (22)$$

то розв'язок $\vec{u}\equiv 0$ рівняння (7) при граничних умовах (9) є стійким за мірами (11), (12). Якщо ж при цьому поверхневе навантаження $\vec{q}$ є "мертвим", то нерівність (22) слід замінити нерівністю (21).

Якщо градієнт базового розв'язку не залежить від часу, то замість нерівності (22) слід розглядати нерівність

$$\iint\limits_{\partial X_0} \vec{Q}_0^{\bullet} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} dS \leqslant 0.$$

Для стійкості розв'язку у випадку "мертвого" поверхневого навантаження і за умови, що градієнт базового розв'язку не залежить від часу, достатньо виконання лише нерівності (20).

Теорема 3. *Якщо при силовому поверхневому навантаженні тіла K виконується нерівність (20) і нерівність*

$$\iiint\limits_{X_0} \hat{L} \cdot\cdot\ \vec{u} \otimes \overleftarrow{\nabla}_0 dV_0 + 2 \iint\limits_{\partial X_0} \sum_j \left(\vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \vec{Q}_0^{\bullet} \right) \left(\vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right) dS \leqslant 0, \tag{23}$$

то розв'язок $\vec{u} \equiv 0$ рівняння (7) при граничних умовах (10) є стійким за мірами (11), (12). Якщо ж при цьому поверхневе навантаження є "мертвим", то нерівність (23) слід замінити нерівністю (21).

Якщо градієнт базового розв'язку не залежить від часу, то замість нерівності (23) слід розглядати нерівність

$$\iint\limits_{\partial X_0} \sum_j \left(\vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \vec{Q}_0^{\bullet} \right) \left(\vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right) dS \leqslant 0.$$

Для стійкості розв'язку у випадку "мертвого" поверхневого навантаження і за умови, що градієнт базового розв'язку не залежить від часу, достатньо виконання лише нерівності (20).

Теорема 4. *Для стійкості розв'язку $\vec{u} \equiv 0$ рівняння (7) при граничних умовах*

$$\vec{u}|_{\partial X_u} = 0, \qquad \vec{n}_0 \cdot \hat{P}_0^{\bullet}\Big|_{\partial X_p} = \vec{Q}_0^{\bullet}\Big|_{\partial X_p},$$
$$\vec{\ni}_i^{\,0} \cdot \vec{u}\Big|_{\partial X_{up}} = 0, \qquad \vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \left(\vec{n}_0 \cdot \hat{P}_0^{\bullet} \right)\Big|_{\partial X_{up}} = \vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \vec{Q}_0^{\bullet}\Big|_{\partial X_{up}}.$$

достатньо, щоб при силовому поверхневому навантаженні виконувалася нерівність (20) і нерівність

$$\iiint\limits_{X_0} \hat{L} \cdot\cdot\ \vec{u} \otimes \overleftarrow{\nabla}_0 dV_0 + 2 \iint\limits_{\partial X_p} \vec{Q}_0^{\bullet} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} dS + 2 \iint\limits_{\partial X_{up}} \sum_j \left(\vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \vec{Q}_0^{\bullet} \right) \left(\vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right) dS \leqslant 0. \tag{24}$$

· *Якщо поверхневе навантаження є "мертвим", то нерівність (24) слід замінити нерівністю (21).*

Якщо градієнт базового розв'язку не залежить від часу, то замість нерівності (24) слід розглядати нерівність

$$\iint\limits_{\partial X_p} \vec{Q}_0^{\bullet} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} dS + \iint\limits_{\partial X_{up}} \sum_j \left(\vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \vec{Q}_0^{\bullet} \right) \left(\vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right) dS \leqslant 0.$$

У випадку "мертвого" поверхневого навантаження і за умови, що градієнт базового розв'язку не залежить від часу, достатньою умовою стійкості є виконання лише нерівності (20).

3. Стійкість циліндричного тіла з матеріалу Мурнагана. Нехай циліндричне тіло квадрованого поперечного перерізу D висоти b перебуває під дією рівномірно розподіленого по граничних поперечних перерізах "мертвого" осьового стискуючого навантаження інтенсивності N_0. Вісь тіла сумістимо з віссю $O\xi^3$ $(0 \leqslant \xi^3 \leqslant b)$. Бокову поверхню вважаємо вільною від силових навантажень.

Граничні умови задамо у вигляді

$$\vec{\ni}_1^{\,0} \cdot \vec{u}\Big|_{\xi^3=0,b} = 0, \quad \vec{\ni}_2^{\,0} \cdot \vec{u}\Big|_{\xi^3=0,b} = 0, \quad \vec{\ni}_3^{\,0} \cdot \hat{P}_0^{\bullet}\Big|_{\xi^3=0,b} = 0, \quad \hat{P}_0^{\bullet}\Big|_{\partial D\times[0,b]} = 0. \tag{25}$$

На підставі одержаних результатів знайдемо достатні умови стійкості циліндричного тіла з матеріалу Мурнагана.

Густина потенціальної енергії деформації U_0 матеріалу Мурнагана задається формулою [4]

$$U_0 = \frac{1}{4}\left[\left(-3\lambda - 2\mu + \frac{9}{2}l + \frac{n}{2}\right) I_1(\hat{G}) + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu - 3l - 2m)\, I_1^2(\hat{G}) + \right.$$
$$\left. + \left(-2\mu + 3m - \frac{n}{2}\right) I_2(\hat{G}) - m I_1(\hat{G}) I_2(\hat{G}) + \frac{1}{6}(l + 2m)\, I_1^3(\hat{G}) + \frac{n}{2}\left(I_3(\hat{G}) - 1\right)\right].$$

Тут λ, μ – сталі Ляме; l, m, n – сталі Мурнагана; $\hat{G} = \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^{\;T}$ – міра деформації Коші-Гріна; $I_k(\hat{G})$ – алгебраїчні інваріанти тензора $\hat{G}$ (індексом "T" позначено транспонований тензор).

Якщо знайти похідну від U_0 за градієнтом місця $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}$, то з точністю до членів другого порядку стосовно градієнта $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0$ одержимо

$$\hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}) = \hat{T}(\vec{u}_0) + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot \hat{T}(\vec{u}_0) + \frac{1}{2}\left[\lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^{\;T} + \right.$$
$$\left. + (n - 2m + 2l)\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0\right)^2 + (2m - n)\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)\right] \hat{I} +$$
$$(2m - n)\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \hat{\varepsilon}\,(\vec{u}_0) + n\hat{\varepsilon}^2\,(\vec{u}_0) + \mu \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^{\;T} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0, \tag{26}$$

де

$$\hat{T}(\vec{u}_0) = \lambda \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \hat{I} + 2\mu\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0), \qquad \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0) = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^{\;T}\right) -$$

тензор напружень Коші і тензор деформації лінійної теорії пружності, $\hat{I}$ – одиничний тензор.

Із (26) отримуємо

$$\hat{P}_0^{\bullet}(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0) = \left(\hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0\right) \cdot \hat{T}(\vec{u}) + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \hat{T}(\vec{u}_0) +$$
$$+ \left[\lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot\, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + (n - 2m)\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u} - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot\, \hat{\varepsilon}(\vec{u})\right) + \right.$$
$$\left. + 2l\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\right)\right] \hat{I} + (2m - n)\left[\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \hat{\varepsilon}(\vec{u}) + \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)\right] +$$

$$+\mu\left[\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0^{\;T}\cdot\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}+\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}^{\;T}\cdot\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0\right]+n\left[\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)\cdot\hat{\varepsilon}(\vec{u})+\hat{\varepsilon}(\vec{u})\cdot\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)\right].$$

Позначимо

$$\vec{u}=u_k\vec{\ni}_0^{\,k},\ \overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0=a^{mn}\vec{\ni}_m^{\,0}\otimes\vec{\ni}_n^{\,0},\hat{T}(\vec{u}_0)=t^{mn}\vec{\ni}_m^{\,0}\otimes\vec{\ni}_n^{\,0},\ \overrightarrow{\nabla}_0\cdot\vec{u}_0=a,\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)=\varepsilon^{mn}\vec{\ni}_m^{\,0}\otimes\vec{\ni}_n^{\,0}.$$

Після перетворень квадратичну форму $\hat{\Phi}(\vec{u})=\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0$ для матеріалу Мурнагана можна привести до вигляду

$$\hat{\Phi}(\vec{u})=M^{kips}\frac{\partial u_k}{\partial\xi^i}\frac{\partial u_p}{\partial\xi^s},\tag{27}$$

де

$$\begin{aligned}M^{kips}&=\delta^{ik}\left[\lambda\left(\delta^{ps}+a^{sp}\right)+(2m-n)\left(\varepsilon^{sp}-a\delta^{ps}\right)+2la\delta^{ps}\right]+\\&+\delta^{ps}\left[\lambda a^{ki}+\frac{2m-n}{2}\left(a^{ki}+a^{ik}\right)\right]+\delta^{kp}\left[\mu\left(\delta^{is}+a^{si}+a^{is}\right)+\frac{2m-n}{2}a\delta^{is}+\frac{n}{2}\varepsilon^{si}\right]+\\&+\delta^{ip}\left[\mu\left(\delta^{ks}+a^{sk}\right)+\frac{2m-n}{2}a\delta^{ks}+\frac{n}{2}\varepsilon^{sk}\right]+\delta^{is}\left(t^{kp}+\frac{n}{2}\varepsilon^{kp}\right)+\delta^{ks}\left(\mu a^{ip}+\frac{n}{2}\varepsilon^{ip}\right),\end{aligned}$$

δ^{ij} – символи Кронекера.

За базовий розв'язок виберемо, як це робиться в літературі [4], розв'язок відповідної задачі, сформульованої в рамках статичної лінійної теорії пружності

$$\vec{u}_0=\frac{N_0}{ES}\left[\nu\left(\xi^1\vec{\ni}_1^{\,0}+\xi^2\vec{\ni}_2^{\,0}\right)-\xi^3\vec{\ni}_3^{\,0}\right].\tag{28}$$

Тут S – площа області D в γ_0-конфігурації; $\nu=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ – коефіцієнт Пуассона; $E=2\mu(1+\nu)$ – модуль пружності.

Із (28) знаходимо

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0=\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u}_0^T=\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)=\frac{N_0}{ES}\left[\nu\left(\vec{\ni}_1^{\,0}\otimes\vec{\ni}_1^{\,0}+\vec{\ni}_2^{\,0}\otimes\vec{\ni}_2^{\,0}\right)-\vec{\ni}_3^{\,0}\otimes\vec{\ni}_3^{\,0}\right],\\&\overrightarrow{\nabla}_0\cdot\vec{u}_0=(2\nu-1)\frac{N_0}{ES},\qquad\hat{T}(\vec{u}_0)=-\frac{N_0}{S}\,\vec{\ni}_3^{\,0}\otimes\vec{\ni}_3^{\,0}.\end{aligned}\tag{29}$$

Для базових параметрів (29) квадратична форма (27) набуває вигляду

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{u})&=A_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi^1}\right)^2+2A_2\frac{\partial u_1}{\partial\xi^1}\frac{\partial u_2}{\partial\xi^2}+2A_3\frac{\partial u_1}{\partial\xi^1}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+A_4\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi^2}\right)^2+2A_4\frac{\partial u_1}{\partial\xi^2}\frac{\partial u_2}{\partial\xi^1}+\\&+A_5\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}\right)^2+2A_6\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^1}+A_4\left(\frac{\partial u_2}{\partial\xi^1}\right)^2+A_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial\xi^2}\right)^2+2A_3\frac{\partial u_2}{\partial\xi^2}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+\\&+A_5\left(\frac{\partial u_2}{\partial\xi^3}\right)^2+2A_6\frac{\partial u_2}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^2}+A_7\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^1}\right)^2+A_7\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^2}\right)^2+A_8\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)^2.\end{aligned}\tag{30}$$

Тут

$$A_1=\lambda+2\mu+2(\lambda+2\mu+2m+2l)\frac{\nu N_0}{ES}-\frac{2lN_0}{ES},\quad A_2=\lambda+2(\lambda+2l)\frac{\nu N_0}{ES}+$$

$$+(2m-n-2l)\frac{N_0}{ES}, \quad A_3=\lambda+(\lambda-2m+n+4l)\frac{\nu Q}{ES}-(\lambda+2l)\frac{N_0}{ES},$$
$$A_4=\mu+2(\mu+m)\frac{\nu N_0}{ES}-\frac{2m-n}{2}\frac{N_0}{ES}, \quad A_5=\mu+\left(2m-\frac{n}{2}\right)\frac{\nu N_0}{ES}-(2\mu+m)\frac{N_0}{ES},$$
$$A_6=\mu+\left(\mu+2m-\frac{n}{2}\right)\frac{\nu N_0}{ES}-(\mu+m)\frac{N_0}{ES}, \quad A_7=\mu+\left(2\mu+2m-\frac{n}{2}\right)\frac{\nu N_0}{ES}-$$
$$-m\frac{N_0}{ES}-\frac{N_0}{S}, \quad A_8=\lambda+2\mu-2(\lambda+l+2\mu+2m)\frac{N_0}{ES}+\frac{4l\nu N_0}{ES}-\frac{N_0}{S}.$$

Оскільки параметри базового розв'язку (29) не залежать від часу і силове навантаження є "мертвим", то, як випливає з теореми 4, достатньою умовою стійкості є виконання нерівності

$$W(\vec{u})=\iiint\limits_{X_0}\hat{P}_0^{\bullet}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0 dV_0=\iint\limits_D d\xi^1 d\xi^2\int\limits_0^b\Phi(\vec{u})d\xi^3\geqslant 0.$$

Для оцінки критичного навантаження використаємо апріорне задання вектора $\vec{u}$

$$u_1=0, \qquad u_2=f(\xi^3,\tau), \qquad u_3=-\xi^2 f'_{\xi^3}(\xi^3,\tau). \tag{31}$$

Це відповідає заданню бокового зміщення в напрямку осі $O\xi^2$ і повороту незмінного поперечного перерізу навколо осі $O\xi^1$. Для такого задання збурення вектора переміщення квадратична форма (30) запишеться

$$\hat{\Phi}(\vec{u})=(A_5-2A_6+A_7)\left(f'\right)^2+A_8\left(\xi^2\right)^2\left(f''\right)^2,$$

а граничні умови (25) стосовно функції $f(\xi^3,\tau)$ наберуть вигляду

$$f(0,\tau)=f(b,\tau)=0, \qquad f''(0,\tau)=f''(b,\tau)=0. \tag{32}$$

Функціонал $W(\vec{u})$ тепер набуває вигляду

$$W(\vec{u})=\int\limits_0^b\left[(A_5-2A_6+A_7)S\left(f'\right)^2+A_8 J\left(f''\right)^2\right]d\xi^3, \tag{33}$$

де

$$J=\iint\limits_D\left(\xi^2\right)^2 d\xi^1 d\xi^2$$

момент інерції області D відносно осі $O\xi^1$.

Можна показати [5], що при умовах закріплення (32)

$$\int\limits_0^b\left(f''\right)^2 d\xi^3\geqslant\frac{\pi^2}{b^2}\int\limits_0^b\left(f'\right)^2 d\xi^3. \tag{34}$$

Якщо врахувати нерівність (34), то із (33) отримаємо оцінку

$$W(\vec{u}) \geqslant \int\limits_0^b \left[\frac{\pi^2 J A_8}{b^2} + S(A_5 - 2A_6 + A_7)\right] (f')^2 d\xi^3.$$

З умови $W(\vec{u}) \geqslant 0$ випливає, що

$$\pi^2 J A_8 + b^2 S(A_5 - 2A_6 + A_7) \geqslant 0.$$

Розв'язавши цю нерівність щодо N_0 , одержимо

$$N_0 \leqslant N_E \frac{1 + \frac{2\nu^2}{1-\nu-2\nu^2}}{1 + \left(1 + \frac{2(\lambda+2\mu+2m+l)-4\nu l}{E}\right) \frac{\pi^2 J}{Sb^2}} = \alpha N_E. \tag{35}$$

Тут

$$N_E = \pi^2 EJ/b^2$$

– Ейлерове значення критичної сили.

Для порівняння задамо поле вектора $\vec{u}$ співвідношеннями

$$u_1 = \nu\xi^1\xi^2 f''(\xi^3, \tau), \qquad u_2 = \frac{1}{2}\nu \left[(\xi')^2 - (\xi')^2\right] f'' + f, \qquad u_3 = -\xi^2 f'. \tag{36}$$

Це формули для переміщень в задачі Сен-Венана про чистий згин. Для подання (36) квадратична форма (30) запишеться

$$\Phi(\vec{u}) = \left[2\nu^2(A_1 + A_2) - 4\nu A_3 + A_8\right] (\xi^2)^2 (f'')^2 + (A_5 - 2A_6 + A_7)(f')^2 +$$
$$+ \frac{\nu^2}{4} A_5 \left[(\xi^2)^2 - (\xi^1)^2\right]^2 (f''')^2 + \nu(A_5 - A_6)\left[(\xi^2)^2 - (\xi^1)^2\right] f' f'''.$$

Зберігши тут лише перші два доданки, за умов закріплення (32) з нерівності $W(\vec{u}) \geqslant 0$ отримаємо

$$\pi^2 J \left[2\nu^2(A_1 + A_2) - 4\nu A_3 + A_8\right] + b^2(A_5 - 2A_6 + A_7)S \geqslant 0.$$

Розв'язок цієї нерівності має вигляд

$$N_0 \leqslant \frac{N_E}{1 + (1+\gamma)\frac{\pi^2 J}{Sb^2}} = \beta N_E, \tag{37}$$

де

$$\gamma = \frac{2(\lambda + 2\mu + 2m + l) - 4\nu(\lambda + 3l) + 2\nu^2(2\lambda - 6m + 3n + 12l) - 8\nu^3(\lambda + \mu + m + 2l)}{E}.$$

Якщо у формулах (35) і (37) сталі Мурнагана l, m, n прийняти рівними нулеві, то одержимо значення критичних параметрів для стандартного матеріалу другого порядку. Відповідні коефіцієнти пропорційності позначимо α_1 і β_1. Результати числових розрахунків коефіцієнтів α_1 і β_1 в залежності від матеріалу і від геометричних характеристик

циліндричного тіла, в поперечному перерізі якого є квадрат зі стороною a, наведено в таблиці 1. Значення сталих Ляме для відповідних матеріалів наведено в монографії [4].

4. Стійкість циліндричного тіла з напівлінійного матеріалу Джона. Густина потенціальної енергії деформації для напівлінійного матеріалу Джона (стандартний матеріал першого порядку) задається у вигляді [4,6]

$$U_0 = \frac{1}{2}\lambda I_1^2\left(\hat{U}-\hat{I}\right) + \mu I_1\left(\left(\hat{U}-\hat{I}\right)^2\right).$$

Тут тензор $\hat{U} = \hat{G}^{\frac{1}{2}}$ носить назву лівої міри спотворення.

Якщо виконати диференціювання U_0 за градієнтом $\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{r}$, то одержимо

$$\hat{P}_0 = \left[\left(\lambda I_1\left(\hat{U}-\hat{I}\right) - 2\mu\right)\hat{U}^{-1} + 2\mu\hat{I}\right]\cdot\overrightarrow{\nabla}_0 \otimes \vec{r}.$$

Надалі обмежимося випадком лінійних перетворень γ_0-конфігурації в актуальні конфігурації γ_τ, при яких зберігаються головні напрямки. При таких перетвореннях тензор $\hat{P}_0$ є симетричним і триедр $\vec{\ni}_s^{\,0}$ визначає його головні напрямки

$$\hat{P}_0 = \sum_{s=1}^{3} P_s \vec{\ni}_s^{\,0}\otimes\vec{\ni}_s^{\,0} = \left(\lambda I_1\left(\hat{U}-\hat{I}\right) - 2\mu\right)\hat{I} + 2\mu\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{r}, \quad P_s = \lambda I_1\left(\hat{U}-\hat{I}\right) - 2\mu + 2\mu v_s. \tag{38}$$

У монографії [4] показано, що за таких умов

$$\hat{P}_0^{\bullet} = \lambda\overrightarrow{\nabla}_0\cdot\vec{u}\hat{I} + \mu\left(\overrightarrow{\nabla}_0\otimes\vec{u} + \vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0\right) + \frac{1}{2}\sum_{s,k=1}^{3}\alpha_{sk}\frac{\partial u_s}{\partial\xi^k}\left(\vec{\ni}_k^{\,0}\otimes\vec{\ni}_s^{\,0} - \vec{\ni}_s^{\,0}\otimes\vec{\ni}_k^{\,0}\right), \tag{39}$$

де

$$\alpha_{sk} = (P_s + P_k)/(v_s + v_k).$$

Можна показати, що для напівлінійного матеріалу Джона квадратична форма $\Psi(\vec{u}) = \hat{P}_0^{\bullet}\cdot\cdot\,\vec{u}\otimes\overrightarrow{\nabla}_0$ має вигляд

$$\Psi(\vec{u}) = \sum_{s,k,m,n=1}^{3} D^{skmn}\frac{\partial u_s}{\partial\xi^k}\frac{\partial u_m}{\partial\xi^n}, \tag{40}$$

де

$$D^{skmn} = \lambda\delta^{sk}\delta^{mn} + \left(\mu + \frac{\alpha_{sk}}{2}\right)\delta^{ms}\delta^{nk} + \left(\mu - \frac{\alpha_{sk}}{2}\right)\delta^{sn}\delta^{km}.$$

Варто відзначити, що вираз (39) для тензора $\hat{P}_0^{\bullet}$ відрізняється від виразу для тензора напружень Коші $\hat{T}$ лінійної теорії пружності тільки наявністю доданків, що характеризуються ротором вектора $\vec{u}$.

Розглянемо задачу стійкості, яка сформульована в попередньому пункті. Згідно з (29) і (38)

$$P_1 = P_2 = 0, \quad P_3 = -\frac{N_0}{S}, \quad v_1 = v_2 = 1 + \frac{\nu N_0}{ES}, \quad v_3 = 1 - \frac{N_0}{ES}. \tag{41}$$

Для параметрів (41) квадратична форма (40) приводиться до вигляду

$$\Psi(\vec{u}) = (\lambda+2\mu)\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial\xi^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)^2\right] + 2\lambda\left[\frac{\partial u_1}{\partial\xi^1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right) + \frac{\partial u_2}{\partial\xi^2}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right] +$$

$$+\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi^2}+\frac{\partial u_2}{\partial\xi^1}\right)^2+(\mu-k)\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial\xi^3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^2}\right)^2\right]+$$

$$+2(\mu+k)\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^1}+\frac{\partial u_2}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^2}\right), \tag{42}$$

де

$$k=\frac{N_0E}{2(2SE-(1-\nu)N_0)}.$$

Для апріорного задання вектора $\vec{u}$ у вигляді (31) квадратична форма (42) запишеться

$$\Psi(\vec{u})=(\lambda+2\mu)\left(\xi^2\right)^2\left(f''\right)^2-4k\left(f'\right)^2.$$

Якщо використати нерівність (34), то одержуємо таку оцінку для функціоналу $W(\vec{u})$

$$W(\vec{u})\geqslant\int\limits_0^b\left[\frac{\pi^2}{b^2}(\lambda+2\mu)J-4kS\right]\left(f'\right)^2d\xi^3.$$

З умови $W(\vec{u})\geqslant 0$ випливає, що $\pi^2(\lambda+2\mu)J-4b^2kS\geqslant 0$, або

$$N_0\leqslant N_E\frac{1+\frac{2\nu^2}{1-\nu-2\nu^2}}{1+\left(1-\frac{\nu-3\nu^2}{1-\nu-2\nu^2}\right)\frac{\pi^2J}{2Sb^2}}=\alpha_2N_E. \tag{43}$$

Задамо поле вектора $\vec{u}$ співвідношеннями (36). Квадратична форма (42) у цьому випадку має вигляд

$$\Psi(\vec{u})=\left[\lambda+2\mu-4\nu\lambda+4\nu^2(\lambda+\mu)\right]\left(\xi^2\right)^2\left(f''\right)^2-4k\left(f'\right)^2+$$
$$+\frac{\nu^2}{4}(\mu-k)\left[\left(\xi^1\right)^2+\left(\xi^2\right)^2\right]^2\left(f'''\right)^2-2k\nu\left(\left(\xi^2\right)^2-\left(\xi^2\right)^2\right)f'f'''.$$

Збережемо тут лише перші два доданки. Тоді з умови $W(\vec{u})\geqslant 0$ одержимо нерівність

$$N_0\leqslant\frac{N_E}{1+(1-\nu)\frac{\pi^2J}{2b^2S}}=\beta_2N_E. \tag{44}$$

У таблиці 2 наведено результати числових розрахунків для коефіцієнтів α_2 і β_2, які задаються формулами (43), (44).

З даних, наведених в таблицях 1 і 2, можна зробити висновок, що при апріорному заданні вектора $\vec{u}$ у вигляді (36) критичне значення параметра навантаження практично збігається із значенням критичної сили Ейлера для всіх тестованих матеріалів. При заданні вектора $\vec{u}$ у вигляді (31) критичні значення параметра навантаження одержуються дещо вищими від критичної сили Ейлера. Це пояснюється тим, що апріорне задання еквівалентне накладанню в'язей, які обмежують деформівність стержня.

b/a	10		20	
Коефіцієнт / *Матеріал*	α_1	β_1	α_1	β_1
Сталь Hecla 17	1,261	0,976	1,289	0,994
Оргскло	1,48	0,975	1,517	0,994
Вольфрам	1,174	0,975	1,199	0,994
Мідь	1,524	0,975	1,563	0,994

Таблиця 1

b/a	10		20	
Коефіцієнт / *Матеріал*	α_2	β_2	α_2	β_2
Сталь Hecla 17	1,294	0,977	1,289	0,999
Оргскло	1,524	0,977	1,529	0,999
Вольфрам	1,272	0,977	1,276	0,999
Мідь	1,57	0,977	1,575	0,999

Таблиця 2

1. Доманський П.П. *Метод розкладу за тензорними функціями в побудові рівнянь стійкості руху пружних циліндричних тіл* // Доп. НАН України. – 1997. – N 6. – С. 53 - 59.

2. Ильюшин А.А. Механика сплошной сред . – М.: Изд - во Моск. ун - та, 1978. – 287 с.

3. Мовчан А.А. *Устойчивость процессов по двум метрикам* // ПММ. – 1960. – Т. XXIX. – С. 3 - 20.

4. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.

5. Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. - Новосибирск: Наука, 1987. – 153 с.

6. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.

Стаття надійшла до редколегії 24.04.1998

УДК 517.95

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ДЕЯКИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМ

С. П. Лавренюк

Lavrenyuk S. P. On the uniqueness of a solution of some degenerated evolutional systems. In the paper is considered some degenerated evolutional system with second time derivative. There are obtained sufficient conditions of the uniqueness of a weak solution the boundary problem for this system.

У працях [1–4] було вивчено коректність задач для параболічних рівнянь і систем з першою похідною за часом, які вироджуються на початковій гіперплощині. Еволюційні системи з другою похідною за часом, які вироджуються в початковий момент часу і містять, як частковий випадок, гіперболічні рівняння другого порядку, вивчено у працях [5–10].

Метою запропонованої праці є дослідження умов єдиності узагальненого розв'язку задачі в нециліндричних областях для деякого класу еволюційних систем з другою похідною за часом, які вироджуються на початковій гіперплощині в еліптичні системи.

Нехай $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – обмежена область, яка лежить в шарі $\{0 < t < T\}$, і множина $\Omega_\tau = Q \bigcap \{t = \tau\}$ для кожного $\tau \in (0,T)$ така, що $\operatorname{mes}\Omega_\tau > 0$, причому $\Omega_{\tau_1} \subset \Omega_{\tau_2}$, якщо $\tau_1 < \tau_2$; $\overline{\Omega}_0 = \overline{Q} \bigcap \{t = 0\}$; $\overline{\Omega}_T = \overline{Q} \bigcap \{t = T\}$. Позначимо $S = \bigcup\limits_{\tau \in (0,T)} \partial\Omega_\tau$, ν_t – кут між нормаллю до поверхні S і віссю t, $Q_{t_1,t_2} = Q \bigcap \{t_1 < t < t_2\}$. Будемо припускати, що $S \in C^1$, $\nu_t \neq 0$.

Розглянемо в Q систему рівнянь

$$(\Phi(x,t)u_t)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} G_\alpha(x,t) D^\alpha u + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} C_\alpha(x,t) D^\alpha u_t = \sum_{|\alpha|\leqslant p} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t) \qquad (1)$$

з крайовими умовами

$$D^\alpha u|_S = 0, \quad |\alpha| \leqslant l-1, \quad D^\alpha u_t|_S = 0, \quad |\alpha| = l-1, \qquad (2)$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35G15.

де $l \geqslant m$; $m \geqslant 1$; $0 \leqslant p \leqslant m$; Φ, $A_{\alpha\beta}$, $|\alpha| = |\beta| \leqslant m$, $B_{\alpha\beta}$, $|\alpha| = |\beta| \leqslant l$, G_α, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, C_α, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant l$ – квадратні матриці порядку N; $u = \operatorname{colon}(u_1, ..., u_N)$; $F_\alpha = \operatorname{colon}(F_{\alpha_1}, ..., F_{\alpha_N})$, $|\alpha| \leqslant p$; $x = (x_1, ..., x_n)$; $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Будемо припускати, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються такі умови.

Умова (Φ_0). *$\Phi \in L^\infty(Q)$; $\varphi(t)|\xi|^2 \leqslant (\Phi(x,t)\xi, \xi) \leqslant \varphi_0\varphi(t)|\xi|^2$ для майже всіх $(x,t) \in Q, \forall \xi \in \mathbb{R}^N$, де $\varphi(t) \in C([0,T])$; $\varphi(0) = 0$; $\varphi(t) > 0$, $t \in (0,T]$; $\Phi(x,t) = \Phi^*(x,t)$, для майже всіх $(x,t) \in Q$; $\varphi_0 = \text{const} > 0$;*

Умова (Φ_1). *$\Phi_t \in L^\infty(Q_{\varepsilon,T})$ $\forall \varepsilon > 0$; $(\Phi_t(x,t)\xi, \xi) \geqslant \varphi_1(t)|\xi|^2$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, де $\varphi_1(t) \in C((0,T])$; $\varphi_1(t) \geqslant 0$, $t \in (0,T]$.*

Умова (A_0). *$A_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta t} \in L^\infty(Q)$;*

$$\int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta v, D^\alpha v)dx \geqslant a_0 \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 dx, \quad a_0 = \text{const} > 0,$$

$$\text{для майже всіх} \quad t \in (0,T), \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_t); \; A_{\alpha\beta}(x,t) = A_{\beta\alpha}(x,t),$$
$$A_{\alpha\beta}(x,t) = A^*_{\beta\alpha}(x,t) \quad \text{для майже всіх} \quad (x,t) \in Q, \quad |\alpha| = |\beta| \leqslant m.$$

Умова (B_0). *$B_{\alpha\beta} \in L^\infty(Q)$;*

$$\int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta v, D^\alpha v)dx \geqslant b_0\psi(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v|^2 dx, \quad b_0 = \text{const} > 0,$$

$$\text{для майже всіх} \quad t \in (0,T), \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega_t),$$
$$\text{де } \psi \in C([0,T]), \quad \psi(0) \geqslant 0, \quad \psi(t) > 0 \quad \forall t \in (0,T].$$

Тут $\overset{\circ}{H}{}^k(\Omega_t)$ – замикання простору функцій $C_0^\infty(\Omega_t)$ за нормою простору $H^k(\Omega_t)$.

Введемо простір функцій $H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}(Q)$ як замикання множини нескінченно диференційовних функцій в $\overline{Q}$, які дорівнюють нулю в околі S, за нормою

$$\|u\|^2 = \int\limits_Q \left(|u_t|^2\varphi(t) + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 + \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2 \right) dxdt.$$

Зауважимо, що $D^\alpha u = 0$ на S для всіх $|\alpha| \leqslant m - 1$, $D^\alpha u_t = 0$ на S для всіх $|\alpha| \leqslant l - 1$, якщо $u \in H^{l,1}_{0,\psi,\varphi}(Q)$ і, зокрема, $u(\cdot,t) \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_t)$, $u_t(\cdot,t) \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega_t)$ для майже всіх $t \in (0,T)$.

Розглянемо початкові умови

$$\lim_{t\to+0} u(x,t) = 0, \quad \lim_{t\to+0} \int\limits_{\Omega_t} \varphi(t) u_t^2(x,t)\, dx = 0. \tag{3}$$

Означення. *Функція u, яка задовольняє включення $u \in H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}(Q) \cap C([0,T]; L^2(\Omega_t))$, $u_t \in C((0,T]; L^2(\Omega_t))$, рівність*

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-(\Phi(x,t)u_t, v_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u, D^\alpha v) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t, D^\alpha v) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t)D^\alpha u, v) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t, v) - \sum_{|\alpha|\leqslant p} (F_\alpha(x,t), D^\alpha v)\Big] dxdt +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_{t_2}} (\Phi(x,t)u_t, v)dx - \int\limits_{\Omega_{t_1}} (\Phi(x,t)u_t, v)dx = 0$$

для довільної функції $v \in H^{l,1}_{0,\mathrm{loc}}(Q)$ *і всіх* $t_1, t_2, 0 < t_1 < t_2 \leqslant T$, *та початкові умови (3) називається узагальненим розв'язком задачі (1)-(3).*

Тут $H^{l,1}_{0,\mathrm{loc}}(Q)$ – множина функцій, які належать простору $H^{l,1}_0(Q_{t_1,t_2})$ для довільних $t_1, t_2,\ 0 < t_1 < t_2 \leqslant T$; $H^{l,1}_0(Q_{t_1,t_2})$ – замикання множини нескінченно диференційовних функцій в $\overline{Q}_{t_1,t_2}$, які дорівнють нулю в околі $S_{t_1,t_2} = \bigcup\limits_{t\in(t_1,t_2)} \partial\Omega_t$, за нормою простору $H^{l,1}(Q_{t_1,t_2})$.

Надалі будемо використовувати відомі оцінки Фрідріхса ([11], с. 50)

$$\int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha v|^2 dx \leqslant \gamma_{k,j}(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha v|^2 dx, \quad j = 0, ..., k,$$

які справджуються для функцій $v \in \overset{\circ}{H}{}^k(\Omega_t)$.

Введемо позначення:

$$\alpha_0 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \frac{\varphi_1(t)}{\psi(t)}; \quad \omega(t) = \begin{cases} \psi(t), & \text{якщо} \quad \alpha_0 = 0, \\ \varphi_1(t), & \text{якщо} \quad \alpha_0 > 0. \end{cases};$$

$$\Gamma_k(t) = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{k,j}(t);\ g_0(t) = \sup_{\Omega_t} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} \frac{\|G_\alpha(x,t)\|}{\omega(t)};\ c_0(t) = \sup_{\Omega_t} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} \frac{\|C_\alpha(x,t)\|}{\omega(t)\psi(t)},$$

де $\|\cdot\|$ – евклідова норма матриці.

Теорема. *Нехай коефіцієнти системи (1) задовольняють умови* $(\Phi_0), (\Phi_1), (A_0), (B_0)$ *і, крім того,* $\nu_t \neq 0$, $G_\alpha (1 \leqslant |\alpha| \leqslant m), C_\alpha (1 \leqslant |\alpha| \leqslant l) \in L^\infty(Q_{\varepsilon,T})$, $\forall\varepsilon > 0$; $c_0, g_0 \in L^\infty(0,T)$; $\inf\limits_{[0,T]} \sup\limits_{[0,\tau]} c_0(t) > 0$; *якщо* $\alpha_0 = 0$, *то* $\inf\limits_{[0,T]} \sup\limits_{[0,\tau]} \sqrt{\Gamma_l(t)\gamma_{l,0}(t)c_0(t)} < 2b_0$; *якщо* $\alpha_0 > 0$, *то* $\inf\limits_{[0,T]} \sup\limits_{[0,\tau]} \Gamma_l(t)c_0(t) < 2b_0$. *Тоді задача (1)-(3) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення. Припустимо, що існують два узагальнених розв'язки $u^1(x,t), u^2(x,t)$ задачі (1)-(3). Тоді на підставі означення функція $u(x,t) = u^2(x,t) - u^1(x,t)$ буде задовольняти рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[\frac{1}{2}(\Phi_t(x,t)u_t, u_t) + \frac{\lambda}{2}(\Phi(x,t)u_t, u_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u, D^\alpha u_t) +$$

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}u_t,D^{\alpha}u_t)+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}(G_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u,u_t)+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(C_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u_t,u_t)\Big]e^{-\lambda t}dxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}}(\Phi(x,t_2)u_t,u_t)e^{-\lambda t_2}dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}}(\Phi(x,t_1)u_t,u_t)e^{-\lambda t_1}dx=0 \tag{5}$$

(за v вибрано функцію $u_t e^{-\lambda t}$, $\lambda>0$).

Перетворимо і оцінимо кожний доданок в (5) окремо. На підставі умов теореми маємо:

$$\mathcal{I}_1=\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}[(\Phi_t(x,t)u_t,u_t)+\lambda(\Phi(x,t)u_t,u_t)]e^{-\lambda t}dxdt\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\varphi_1(t)|u_t|^2e^{-\lambda t}dxdt;$$

$$\mathcal{I}_2=\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}u,D^{\alpha}u_t)e^{-\lambda t}dxdt=$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}u,D^{\alpha}u)e^{-\lambda t_2}dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}u,D^{\alpha}u)e^{-\lambda t_1}dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}((\lambda A_{\alpha\beta}(x,t)-A_{\alpha\beta t}(x,t))D^{\beta}u,D^{\alpha}u)e^{-\lambda t}dxdt\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(\lambda a_0-a_1)\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\sum_{|\alpha|=m}|D^{\alpha}u|^2e^{-\lambda t}dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}u,D^{\alpha}u)e^{-\lambda t_1}dx;$$

a_1 – стала, яка залежить від $\|A_{\alpha\beta t}\|(|\alpha|=|\beta|\leqslant m)$, області Ω_T і чисел m,l;

$$\mathcal{I}_3=\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}u_t,D^{\alpha}u_t)e^{-\lambda t}dxdt\geqslant b_0\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^{\alpha}u_t|^2e^{-\lambda t}dxdt;$$

$$\mathcal{I}_4=\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}(G_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u,u_t)e^{-\lambda t}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Big[\frac{1}{\delta_1}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}\frac{\|G_{\alpha}(x,t)\|^2}{\omega(t)}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}|D^{\alpha}u|^2+\delta_1|u_t|^2\omega(t)\Big]e^{-\lambda t}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Big[\frac{1}{\delta_1}\Gamma_m(t)g_0(t)\sum_{|\alpha|=m}|D^{\alpha}u|^2+\delta_1\omega(t)|u_t|^2\Big]e^{-\lambda t}dxdt,\quad \delta_1>0;$$

$$\mathcal{I}_5=\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(C_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u_t,u_t)e^{-\lambda t}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Big[\frac{1}{\delta_2}\Gamma_l(t)c_0(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^{\alpha}u_t|^2+\delta_2\omega(t)|u_t|^2\Big]e^{-\lambda t}dxdt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_5$ і те, що

$$\lim_{t_1 \to +0} \int\limits_{\Omega_{t_1}} \Big[\big(\Phi(x,t_1)u_t, u_t\big) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} \big(A_{\alpha\beta}(x,t_1)D^\beta u, D^\alpha u\big) \Big] e^{-\lambda t_1} dx = 0,$$

з рівності (5) отримаємо нерівність

$$\int\limits_{Q_{0,t_2}} \Big[\Big(a_0\lambda - a_1 - \frac{1}{\delta_1}\Gamma_m(t)g_0(t)\Big) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 + \Big(2b_0 - \frac{1}{\delta_2}\Gamma_l(t)c_0(t)\Big)\psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2 +$$

$$+ \Big(\frac{\varphi_1(t)}{\psi(t)} - (\delta_1 + \delta_2)\frac{\omega(t)}{\psi(t)}\Big)\psi(t)|u_t|^2 \Big] e^{-\lambda t} dxdt \leqslant 0. \tag{6}$$

Нехай $\alpha_0 = 0$. Маємо

$$\int\limits_{\Omega_t} |u_t|^2 dx \leqslant \int\limits_{\Omega_t} \gamma_{l,0}(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2 dx.$$

Виберемо $\delta_2 = \sqrt{\dfrac{\Gamma_l(t)c_0(t)}{\gamma_{l,0}(t)}}$. На підставі умов теореми існує таке $\tau_0 > 0$, що буде виконуватися нерівність

$$2b_0 - \sup_{[0,\tau_0]} \sqrt{\Gamma_l(t)\gamma_{l,0}(t)c_0(t)} = \varepsilon_1 > 0.$$

Якщо тепер вибрати δ_1 і λ з умов:

$$\delta_1 \sup_{[0,\tau_0]} \gamma_{l,0}(t) \leqslant \varepsilon_1, \quad a_0\lambda - a_1 - \frac{1}{\delta_1} \sup_{[0,\tau_0]} \Gamma_m(t)g_0(t) \geqslant \frac{a_0}{2},$$

то з нерівності (6) отримаємо, що $u = 0$ майже всюди в Q_{0,τ_0}.

Нехай $\alpha_0 > 0$. Покладемо $\delta_2 = \dfrac{1}{2b_0}\Gamma_l(t)c_0(t)$. Згідно з умовами теореми і в цьому випадку можна вибрати такі числа $\tau_0, \delta_1, \lambda$, що будуть виконуватися нерівності

$$1 - \frac{1}{2b_0} \sup_{[0,\tau_0]} \Gamma_l(t)c_0(t) - \delta_1 \geqslant 0, \quad a_0\lambda - a_1 - \frac{1}{\delta_1} \sup_{[0,\tau_0]} \Gamma_m(t)g_0(t) \geqslant \frac{a_0}{2}.$$

Знову з нерівності (6) отримаємо, що $u = 0$ майже всюди в Q_{0,τ_0}. Оскільки в області $Q_{\tau_0,T}$ система (1) не вироджується, то далі можна показати, що $u = 0$ майже всюди в $Q_{\tau_0,T}$. Це й завершує доведення теореми.

1. Калашников А.С. *Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка*// Вестник МГУ. Сер. математика, механика. – 1971. – N 2,3. – С. 42–48, 3–9.
2. Возняк О.Г., Івасишен С.Д. *Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині*// Доп. НАН України. – 1994. – N 6. – С. 7–11.
3. Возняк О.Г.*Про інтегральне зображення розв'язків параболічних систем з виродженням*// Матеріали міжнародної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С. 42–60.

4. Ивасишен С.Д., Андросова Л.Н. *Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова*// Дифференц. уравн. – 1991. – Т. 27, N 3. – С. 479–487.

5. Барановський Ф.Т. *Задача Коши с видоизмененными начальными данными для обобщенного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу*// Математ. сбор. – 1983.– Т. 120, N 2. – С. 147–163.

6. Бубнов Б.А. *Смешанная задача для одного класса неклассических уравнений*// Док. АН СССР. – 1984. – Т. 275, N 3.– С. 525–528.

7. Бубнов Б.А., Врагов В.Н. *К теории корректных краевых задач для некоторых классов ультрагиперболических уравнений*// Док. АН СССР.– 1982. – Т.264, N 4.– С. 795–800.

8. Лавренюк С.П. // Смешанная задача для вырождающегося уравнения типа колебания пластины// Дифференц. уравн.– 1989.– Т.25, N 8.–С. 1375–1383.

9. Лавренюк С.П. *Змішана задача для однієї слабко виродженої системи*// Доповіді АН України. Матем., природозн., техн. науки.–1993.– N 5. – С. 18–20.

10. Лавренюк С.П. *Смешанная задача для сильно вырождающейся эволюционной системы* // Дифференц. уравн. – 1994. – Т.30, N 8. – С. 1405 – 1411.

11. Гаевский X., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.– М.: Мир, 1978. – 336 с.

Стаття надійшла до редакції 12. 12. 1997

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ ЗА ЧАСОМ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

М. М. Симотюк, Н. М. Задорожна

Symotyuk M.M., Zadorozhna N.M. Nonlocal boundary value problem for nonlinear differential equations with fractional time derivative with variable coefficients. The existence and uniqueness of a classical solution of nonlocal boundary value problem for nonlinear differential equation with regularized Liouville-Reimann fractional time derivative with variable coefficients are established.

У праці досліджено нелокальну крайову задачу для нелінійного диференціального рівняння з дробовою похідною за часом зі змінними за t коефіцієнтами. Встановлено достатні умови існування та єдиності класичного $2\pi-$періодичного за просторовою змінною розв'язку розглядуваної задачі. Метод доведення базується на зведенні задачі до знаходження єдиної нерухомої точки деякого інтегрального оператора у відповідному функціональному просторі.

Подібні задачі для нелінійних гіперболічних рівнянь вивчено в працях [1], [2].

В області $D = [0,T] \times \Omega$, де Ω - коло, отримане ототожненням протилежних кінців відрізка $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}$, розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j(t) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-j} P_{m_{n-j}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) + \tag{1}$$

$$+a_\alpha(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha} P_{m_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) = \varepsilon F(t,x,u(t,x)) + f(t,x), \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$\frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}|_{t=0} - \nu \frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}|_{t=T} = \phi_j(x), \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

де $m_i \in \mathbb{N}, i = \overline{0,n}, \quad m_\alpha \in \mathbb{N}, m_n - 2 \geqslant m_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant m_0 \geqslant m_\alpha, P_{m_i}(\frac{\partial}{\partial x}), i = \overline{0,n}, P_{m_\alpha}(\frac{\partial}{\partial x})$ - диференціальні оператори зі сталими коефіцієнтами порядку $m_i, \quad i = \overline{0,n}, \quad$ і m_α відповідно,

$$|P_{m_n}(ik)| > \mu |k|^{m_n}, \quad |P_{m_{n-j}}(ik)| \leqslant \mu_j |k|^{m_{n-j}}, \quad |P_{m_\alpha}(ik)| \leqslant \mu_\alpha |k|^{m_\alpha},$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35G30, 35S15.

$\mu > 0, \mu_j > 0, j = \overline{1,n}, \mu_\alpha > 0,\quad k \in \mathbb{Z}, \frac{1}{a_0(t)},\quad a_i(t), i = \overline{1,n},\quad a_\alpha(t)-$ неперервні функції на $[0,T]$, $F(t,x,u)$ визначена, неперервна за змінною t і досить гладка за x та u в області $D_1 = \{(t,x,u) : (t,x) \in D, u \in \bar{S}(u^0,\rho)\}$, де $\bar{S}(u^0,\rho) = \{u(t,x) \in C^{(n-1,m_n)}(D) : \|u - u^0\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)} \leqslant \rho\}$, $u^0 = u^0(t,x)$ – розв'язок незбуреної задачі (1), (2) (коли $\varepsilon = 0$); функції $F(t,x,u), f(t,x), \phi_j(x), j = \overline{1,n},\quad 2\pi-$ періодичні за змінною x і розвиваються в рівномірно і абсолютно збіжні ряди Фур'є;

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha v(t,x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v(\tau,x)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau - t^{-\alpha}v(0,x)\right),\quad 0<\alpha<1,-$$

регуляризована дробова похідна [4].

Теорема. *Якщо* $|\nu| < 1/3$,

$$\rho = 3|\varepsilon| a m_n T\left(p + \tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\right)(M + M_{22} + (2M_{23} + M_3)\|u^0\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)} + \\ + M_{33}\|u^0\|^2_{C^{(n-1,m_n)}(D)}) \leqslant 1, \tag{3}$$

$$T \leqslant (1/3 - |\nu|)(1 + a(1+m_n)(p + \tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2})(|\varepsilon|(L + L_{22} + (\rho + \|u^0\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)})\times \\ \times(2M_{33} + 2L_{23} + L_3) + (\rho + \|u^0\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)})^2 L_{33} + 2M_{23} + M_3) + n + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}))^{-1}, \tag{4}$$

де

$$a = \max\left\{\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{1}{a_0(t)}\right|, \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{a_j(t)}{a_0(t)}\right|\right\}, \max_{t\in[0,T]}\left|\frac{a_\alpha(t)}{a_0(t)}\right|\right\},$$
$$p = \max\left\{\left|\frac{1}{P_{m_n}(0)}\right|, \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\left|\frac{P_{m_{n-j}}(0)}{P_{m_n}(0)}\right|\right\}, \left|\frac{P_{m_\alpha}(0)}{P_{m_n}(0)}\right|\right\}, \tilde{\mu} = \max\left\{\frac{1}{\mu}, \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\frac{\mu_j}{\mu}\right\}, \frac{\mu_\alpha}{\mu}\right\},$$

причому функції $F(t,x,u), f(t,x), \phi_j(x), j = \overline{1,n}$, задовольняють таким умовам:

(a) f неперервна в D і часткова похідна $\frac{\partial f}{\partial x}$ неперервна за змінною t і при фіксованому $t \in [0,T]$ кусково-неперервна за змінною x на $\mathbb{R}$;

(b) $\phi_j \in C^{m_n}(\mathbb{R}), j = \overline{1,n}$, а похідна $\frac{d^{m_n+1}\phi_j(x)}{dx^{m_n+1}}$ кусково-неперервна на $\mathbb{R}$;

(c) $F \in C^{(0,2,2)}(D_1)$ і для всіх $(t,x,u), (t,x,v)$ з D_1

$$|F(t,x,u)| \leqslant M,\quad |F_i(t,x,u)| \leqslant M_i,\quad |F_{ij}(t,x,u)| \leqslant M_{ij},\quad i,j \in \{2,3\},$$
$$|F(t,x,u) - F(t,x,v)| \leqslant L|u-v|,\quad |F_i(t,x,u) - F_i(t,x,v)| \leqslant L_i|u-v|,$$
$$|F_{ij}(t,x,u) - F_{ij}(t,x,v)| \leqslant L_{ij}|u-v|,\quad i,j \in \{2,3\},$$

(тут F_{ij} - мішана похідна 2-го порядку функції F за $i-$овим та $j-$овим аргументами), то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) в просторі $C^{(n,m_n)}(D)$, для якого правильна

оцінка

$$\|u(t,x)\|_{C^{(n,m_n)}(D)} \leqslant \rho + \|u^0(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)} +$$
$$+a\left(\left(p+\tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\right)\left(\max_{(t,x)\in D}|f(t,x)| + |\varepsilon|M + \left(2\left(n+\frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)+\right.\right.\right.$$
$$+|\varepsilon|(2M_{23}+M_3))(\rho+\|u^0(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)}) + |\varepsilon|m_n M_{22} +$$
$$\left.\left.+|\varepsilon|M_{33}(\rho+\|u^0(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)})^2\right) + 1/2\tilde{\mu}m_n\left(\sum_{|k|>0}\beta_k^2 + \sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\right)\right), \tag{5}$$

де сталі $\beta_k, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, визначаються нижче.

Доведення. Розв'язок розглядуваної задачі шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geqslant 0} u_k(t)\exp(ikx). \tag{6}$$

Підставивши ряд (6) у рівняння (1) та умови (2), для визначення коефіцієнтів $u_k(t), k \in \mathbb{Z}$, одержуємо таку крайову задачу для звичайного диференціального рівняння з дробовою похідною

$$L\left(\frac{d}{dt}, ik\right)u_k(t) = \varepsilon F_k(t,\{u_m(t)\}) + f_k(t), \tag{7}$$

$$u_k^{(j-1)}(0) - \nu u_k^{(j-1)}(T) = \phi_{j,k}, \quad j=\overline{1,n}, \tag{8}$$

де

$$F_k(t,\{u_m(t)\}) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} F\left(t,x,\sum_{|m|\geqslant 0} u_m(t)\exp(imx)\right)\exp(-ikx)dx,$$

$f_k(t), \quad \phi_{j,k}, \quad j=\overline{1,n}, \quad k\in\mathbb{Z},$ – коефіцієнти Фур'є функцій $f(t,x)$ і $\phi_j(x), \quad j=\overline{1,n}$, відповідно.

Ввівши позначення

$$y_1(k,t) = u_k(t),\ y_2(k,t) = \frac{d}{dt}u_k(t),\ \cdots\cdots\cdots\cdots ,y_n(k,t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}u_k(t), \tag{9}$$

зведемо рівняння (7) до такої системи звичайних диференціальних рівнянь з дробовою похідною:

$$\frac{d}{dt}y_1(k,t) = y_2(k,t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d}{dt}y_{n-1}(k,t) = y_n(k,t),$$
$$\frac{d}{dt}y_n(k,t) = \frac{1}{a_0(t)}\frac{1}{P_{m_n}(ik)}\left(f_k(t)+\varepsilon F_k(t,\{y_1(m,t)\})\right) - \sum_{j=1}^{n}\frac{a_j(t)}{a_0(t)}\frac{P_{m_{n-j}}(ik)}{P_{m_n}(ik)}\times$$
$$\times\, y_{n-j+1}(k,t) - \frac{a_\alpha(t)}{a_0(t)}\frac{P_{m_\alpha}(ik)}{P_{m_n}(ik)}\Gamma^{-1}(1-\alpha)\int_0^t\frac{y_2(k,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau. \tag{10}$$

При цьому умови (8) для функції $u_k(t)$ переходять в такі умови для функцій $y_j(k,t)$, $j=\overline{1,n}$:

$$y_j(k,0) - \nu y_j(k,T) = \phi_{j,k}, \quad j=\overline{1,n}. \tag{11}$$

Інтегруючи систему (10) і використовуючи умови (8) та заміну (9), приходимо до системи інтегро-функціональних рівнянь

$$\begin{aligned}
&u_k(t) = \phi_{1,k} + \nu u_k(T) + \int_0^t \frac{d}{d\tau} u_k(\tau)d\tau,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}u_k(t) = \phi_{n-1,k} + \nu u_k^{(n-2)}(T) + \int_0^t \frac{d^{(n-1)}}{d\tau^{(n-1)}} u_k(\tau)d\tau,\\
&\frac{d^{n-1}}{dt^{n-2}}u_k(t) = \phi_{n,k} + \nu u_k^{(n-1)}(T) + \frac{1}{P_{m_n}(ik)}\left(\int_0^t \frac{f_k(\tau)}{a_0(\tau)}d\tau + \right.\\
&\left. + \varepsilon \int_0^t \frac{F_k(\tau,\{u_m(\tau)\})}{a_0(\tau)}d\tau\right) - \sum_{j=1}^{n} \frac{P_{m_{n-j}}(ik)}{P_{m_n}(ik)} \int_0^t \frac{a_j(\tau)}{a_0(\tau)} u_k^{(n-j)}(\tau)d\tau - \\
&- \Gamma^{-1}(1-\alpha)\frac{P_{m_\alpha}(ik)}{P_{m_n}(ik)} \int_0^t \frac{a_j(\tau)}{a_0(\tau)} \left(\int_0^\tau \frac{\frac{d}{d\xi}u_k(\xi)}{(\tau-\xi)^\alpha}d\xi\right)d\tau.
\end{aligned} \tag{12}$$

Домноживши кожне рівняння системи (12) на $\exp(ikx)$ і підсумувавши за всіма $k, k\in\mathbb{Z}$, отримуємо

$$\begin{aligned}
&u(t,x) = \phi_1(x) + \nu u(T,x) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial\tau} u(\tau,x)d\tau,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}u(t,x) = \phi_{n-1}(x) + \nu \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}u(t,x)|_{t=T} + \int_0^t \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} u(\tau,x)d\tau,\\
&\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}u(t,x) = \phi_n(x) + \nu \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}u(t,x)|_{t=T} + \int_0^t \frac{1}{a_0(\tau)}\left(\sum_{|k|\geqslant 0} \frac{f_k(\tau)}{P_{m_n}(ik)}\exp(ikx)\right)d\tau +\\
&+ \varepsilon \int_0^t \frac{1}{a_0(\tau)}\left(\sum_{|k|\geqslant 0} \frac{F_k(\tau,\{u_m(\tau)\})}{P_{m_n}(ik)}\exp(ikx)\right)d\tau - \sum_{j=1}^{n}\int_0^t \frac{a_j(\tau)}{a_0(\tau)} \times\\
&\times \left(\sum_{|k|\geqslant 0} \frac{P_{m_{n-j}}(ik)}{P_{m_n}(ik)} u_k^{(n-j)}(\tau)\exp(ikx)\right)d\tau - \\
&- \Gamma^{-1}(1-\alpha)\int_0^t \frac{a_\alpha(\tau)}{a_0(\tau)}\left\{\int_0^\tau \left(\sum_{|k|\geqslant 0} \frac{P_{m_\alpha}(ik)}{P_{m_n}(ik)}\frac{d}{d\xi}u_k(\xi)\exp(ikx)\right)(\tau-\xi)^{-\alpha}d\xi\right\}d\tau.
\end{aligned} \tag{13}$$

Позначивши

$$\vec{Y}(t,x) = (y_1(t,x),\dots,y_n(t,x)) = \left(u(t,x), \frac{\partial}{\partial t}u(t,x),\dots,\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}u(t,x)\right),$$

перепишемо систему (13) у вигляді

$$y_1(t,x) = \phi_1(x) + \nu y_1(T,x) + \int_0^t y_2(\tau,x)d\tau,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_{n-1}(t,x) = \phi_{n-1}(x) + \nu y_{n-1}(T,x) + \int_0^t y_n(\tau,x)d\tau,$$

$$\begin{aligned} y_n(t,x) &= \phi_n(x) + \nu y_n(T,x) + \int_0^t \frac{1}{a_0(\tau)} \left(\sum_{|k|\geqslant 0} \frac{f_k(\tau)}{P_{m_n}(ik)} \exp(ikx) \right) d\tau + \\ &+ \varepsilon \int_0^t \frac{1}{a_0(\tau)} \sum_{|k|\geqslant 0} \frac{1}{P_{m_n}(ik)} \exp(ikx) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\tau,\xi,y_1(\tau,\xi)) \exp(-ik\xi)d\xi \right) d\tau - \\ &- \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{a_j(\tau)}{a_0(\tau)} \sum_{|k|\geqslant 0} \frac{P_{m_{n-j}}(ik)}{P_{m_n}(ik)} \exp(ikx) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_{n-j+1}(\tau,\xi) \exp(-ik\xi)d\xi \right) d\tau - \\ &- \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{a_\alpha(\tau)}{a_0(\tau)} \left(\int_0^\tau \frac{1}{(\tau-\xi)^\alpha} \sum_{|k|\geqslant 0} \frac{P_{m_\alpha}(ik)}{P_{m_n}(ik)} \exp(ikx) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_2(\xi,\eta) \exp(-ik\eta)d\eta d\xi \right) d\tau. \end{aligned} \tag{14}$$

У просторі $\bar{C}^{(0,m_n)}(D)$ вектор-функцій

$$\vec{Y}(t,x) = (y_1(t,x),\dots,y_n(t,x)) \quad \left(y_j \in C^{(0,m_n)}(D), \quad j = \overline{1,n} \right)$$

з нормою

$$\|\vec{Y}(k,t)\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)} = \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^{m_n} \max_{(t,x)\in D} \left| \frac{\partial^s}{\partial x^s} y_j(t,x) \right|$$

розглянемо лінійний оператор A, який діє за правилом

$$A\vec{Y}(t,x) = \left((A\vec{Y})_1,\dots,(A\vec{Y})_n \right) = \vec{\Phi}(x) + \nu \vec{Y}(T,x) + \int_0^t \vec{G}(\tau,x,\vec{Y}(\tau,x))d\tau,$$

де

$$\begin{aligned} &\vec{\Phi}(x) = (\phi_1(x),\dots,\phi_n(x)), \quad \vec{G}(\tau,x,\vec{Y}(\tau,x)) = (y_2(\tau,x),\dots,y_n(\tau,x), \\ &\frac{1}{a_0(\tau)} \left(\sum_{|k|\geqslant 0} \frac{f_k(\tau)}{P_{m_n}(ik)} \exp(ikx) + \varepsilon \sum_{|k|\geqslant 0} \frac{\exp(ikx)}{P_{m_n}(ik)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\tau,\xi,y_1(\tau,\xi)) \times \right. \\ &\times \exp(-ik\xi)d\xi - \sum_{j=1}^n \frac{a_\alpha(\tau)}{a_0(\tau)} \sum_{|k|\geqslant 0} \frac{P_{m_{n-j}}(ik)}{P_{m_n}(ik)} \exp(ikx) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_{n-j+1}(\tau,\xi) \exp(-ik\xi)d\xi - \\ &\left. - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{a_\alpha(\tau)}{a_0(\tau)} \int_0^\tau \frac{1}{(\tau-\xi)^\alpha} \sum_{|k|\geqslant 0} \frac{P_{m_\alpha}(ik)}{P_{m_n}(ik)} \exp(ikx) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_2(\xi,\eta) \exp(-ik\eta)d\eta d\xi \right). \end{aligned}$$

З вигляду системи (14) легко бачити, що оператор A відображає простір $\bar{C}^{(0,m_n)}(D)$ в себе.

Доведемо, що при

$$\rho = 3|\varepsilon| a m_n T \left(p + \tilde{\mu} \sum_{|k|>0} \frac{1}{|k|^2} \right) (M + M_{22} + (2M_{23} + M_3)\|u^0\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)} + \\ + M_{33}\|u^0\|^2_{C^{(n-1,m_n)}(D)})$$

оператор A переводить у себе кулю

$$\bar{O}(\vec{Y}^0, \rho) = \left\{ \vec{Y}(t,x) \in \bar{C}^{(0,m_n)}(D) : \quad \|\vec{Y} - \vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)} \leqslant \rho \right\},$$
$$\vec{Y}^0 = (y_1^0(t,x), \dots, y_n^0(t,x)) = \left(u^0(t,x), \frac{\partial u^0(t,x)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{n-1} u^0(t,x)}{\partial t^{n-1}} \right),$$

$u_0 = u_0(t,x)$ – розв'язок незбуреної задачі (1), (2) (при $\varepsilon = 0$), існування якого забезпечують умови (a), (b) теореми.

Справді,

$$\|A\vec{Y}(t,x) - \vec{Y}^0(t,x)\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{m_n} \max_{(t,x)\in D} \left| \frac{\partial^s (A\vec{Y} - \vec{Y}^0)_j}{\partial x^s} \right| + \\ + \sum_{s=0}^{m_n} \max_{(t,x)\in D} \left| \frac{\partial^s (A\vec{Y} - \vec{Y}^0)_n}{\partial x^s} \right| \leqslant (|\nu| + T)\|\vec{Y} - \vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)} + \\ + |\varepsilon| \sum_{s=0}^{m_n} \max_{(t,x)\in D} \left| \int_0^t \frac{1}{a_0(\tau)} \sum_{|k|\geqslant 0} \frac{(ik)^s \exp(ikx)}{P_{m_n}(ik)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\tau,\xi,y_1(\tau,\xi)) \exp(-ik\xi) d\xi d\tau \right| + \\ + \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=0}^{m_n} \max_{(t,x)\in D} \left| \int_0^t \frac{a_j(\tau)}{a_0(\tau)} \sum_{|k|\geqslant 0} \frac{P_{m_{n-j}}(ik)}{P_{m_n}(ik)} (ik)^s \exp(ikx) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (y_{n-j+1}(\tau,\xi) - y^0_{n-j+1}(\tau,\xi)) \exp(-ik\xi) d\xi d\tau \right| + \sum_{s=0}^{m_n} \max_{(t,x)\in D} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \times \\ \times \left| \int_0^t \frac{a_\alpha(\tau)}{a_0(\tau)} \int_0^\tau \frac{1}{(\tau-\xi)^\alpha} \sum_{|k|\geqslant 0} \frac{P_{m_\alpha}(ik)}{P_{m_n}(ik)} (ik)^s \exp(ikx) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (y_2(\xi,\eta) - y_2^0(\xi,\eta)) exp(-ik\eta) d\eta d\xi d\tau \right|. \tag{15}$$

Оскільки $F \in C^{(0,2,2)}(D_1)$, то правильна рівність

$$\int_0^{2\pi} F(\tau,\xi,y_1(\tau,\xi)) \exp(-ik\xi) d\xi = \frac{1}{(ik)^2} \int_0^{2\pi} \left(F_{22}(\tau,\xi,y_1(\tau,\xi)) + \right. \\ + 2F_{23}(\tau,\xi,y_1(\tau,\xi)) \frac{\partial y_1(\tau,\xi)}{\partial \xi} + F_{33}(\tau,\xi,y_1(\tau,\xi)) \left(\frac{\partial y_1(\tau,\xi)}{\partial \xi} \right)^2 + \\ \left. + F_3(\tau,\xi,y_1(\tau,\xi)) \frac{\partial^2 y_1(\tau,\xi)}{\partial \xi^2} \right) \exp(-ik\xi) d\xi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{16}$$

Враховуючи останню формулу, маємо

$$|\varepsilon|\sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\int_0^t \frac{1}{a_0(\tau)}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{(ik)^s\exp(ikx)}{P_{m_n}(ik)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\tau,\xi,y_1(\tau,\xi))\times\right.$$

$$\left.\times\exp(-ik\xi)d\xi d\tau\right| \leqslant |\varepsilon|m_n aT\left(p+\tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\right)(M+M_{22}+(2M_{23}+M_3)\times \tag{17}$$

$$\times(\|\vec{Y}-\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}+\|\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)})+M_{33}(\|\vec{Y}-\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}+\|\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)})^2).$$

Аналогічно одержуємо оцінки:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\int_0^t \frac{a_j(\tau)}{a_0(\tau)}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{P_{m_{n-j}}(ik)}{P_{m_n}(ik)}(ik)^s\exp(ikx)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y_{n-j+1}(\tau,\xi)-y^0_{n-j+1}(\tau,\xi))\exp(-ik\xi)d\xi d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant an(1+m_n)T\left(p+\tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\right)\|\vec{Y}-\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}; \tag{18}$$

$$\sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left|\int_0^t\frac{a_\alpha(\tau)}{a_0(\tau)}\int_0^\tau\frac{1}{(\tau-\xi)^\alpha}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{P_{m_\alpha}(ik)}{P_{m_n}(ik)}(ik)^s\exp(ikx)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y_2(\xi,\eta)-y_2^0(\xi,\eta))\exp(-ik\eta)d\eta d\xi d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{a(1+m_n)T^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(p+\tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\right)\|\vec{Y}-\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}. \tag{19}$$

З оцінок (3),(4), (15), (17) – (19) випливає

$$\|A\vec{Y}(t,x)-\vec{Y}^0(t,x)\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}\leqslant\Bigg(|\nu|+T+a(m_n+1)T\times$$

$$\times\left(p+\tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\right)\left(n+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}+|\varepsilon|(2M_{23}+M_3)\right)\Bigg)\|\vec{Y}-\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}+$$

$$+|\varepsilon|am_nT\left(p+\tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\right)(M+M_{22}+(2M_{23}+M_3)\|\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}+$$

$$+M_{33}(\|\vec{Y}-\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}+\|\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)})^2)\leqslant\|\vec{Y}-\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}\leqslant\rho.$$

Покажемо, що A є оператором стиску в $\bar{O}(\vec{Y}^0,\rho)$. Повторюючи міркування, проведені при одержанні оцінок (17) – (19), на підставі формули (16) маємо

$$\|A\vec{Y}(t,x)-A\vec{Z}(t,x)\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\frac{\partial^s(A\vec{Y}-A\vec{Z})_j}{\partial x^s}\right|\leqslant$$

$$\leqslant (|\nu| + T + a(m_n+1)T\left(p + \tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\right)(|\varepsilon|(L + L_{22} + (\rho + \|\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)})\times$$
$$\times(2M_{33} + 2L_{23} + L_3) + L_{33}(\rho + \|\vec{Y}^0\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)})^2 +$$
$$+ 2M_{23} + M_3) + n + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}))\|\vec{Y} - \vec{Z}\|_{\bar{C}^{(0,m_n)}(D)}.$$

Отже, при виконанні оцінки (4) A є оператором стиску в $\bar{O}(\vec{Y}^0, \rho)$ і з принципу нерухомої точки Пікара-Банаха [3] випливає існування єдиного неперервного розв'язку $\vec{Y^*}(t,x) = (y_1^*(t,x), \ldots, y_n^*(t,x))$ системи (14), перша компонента $y_1^*(t,x)$ якого є розв'язком $u(t,x)$ задачі (1), (2) внаслідок її еквівалентності системі інтегро-функціональних рівнянь (14). Належність розв'язку u до простору $C^{(n,m_n)}(D)$ випливає з того очевидного факту, що $y_n^* \in C^{(1,m_n)}(D)$ (див. систему (14)).

Оцінимо тепер норму розв'язку $u(t,x)$ задачі (1), (2) в просторі $C^{(n,m_n)}(D)$, використовуючи рівність (16) і оцінки

$$\max_{t\in[0,T]}|f_k(t)| \leqslant \frac{\beta_k}{|k|}; \quad \sum_{|k|>0}\beta_k^2 < \infty, \quad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

справедливість яких забезпечують умови теореми:

$$\|u(t,x)\|_{C^{(n,m_n)}(D)} = \sum_{0\leqslant q\leqslant n}\sum_{0\leqslant s\leqslant m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\frac{\partial^{q+s}u(t,x)}{\partial t^q\partial x^s}\right| =$$
$$= \|u(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)} + \sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\frac{\partial^{n+s}u(t,x)}{\partial t^n\partial x^s}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \rho + \|u^0(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)} + \sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\frac{\partial^{n+s}u(t,x)}{\partial t^n\partial x^s}\right| \leqslant \rho + \|u^0(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)} +$$
$$+ \sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\frac{1}{a_0(t)}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{f_k(t)}{P_{m_n}(ik)}(ik)^s\exp(ikx)\right| +$$
$$+ \sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\varepsilon\frac{1}{a_0(t)}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{(ik)^s\exp(ikx)}{P_{m_n}(ik)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(t,\xi,u(t,\xi))\exp(-ik\xi)d\xi\right| +$$
$$+ \sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j(t)}{a_0(t)}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{P_{m_{n-j}}(ik)}{P_{m_n}(ik)}(ik)^s\exp(ikx)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^{n-j}u(t,\xi)}{\partial t^{n-j}}\exp(-ik\xi)d\xi\right| +$$
$$+ \sum_{s=0}^{m_n}\max_{(t,x)\in D}\left|\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{a_\alpha(t)}{a_0(t)}\int_0^t\frac{1}{(t-\xi)^\alpha}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{P_{m_\alpha}(ik)}{P_{m_n}(ik)}(ik)^s\exp(ikx)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\xi}\exp(-ik\eta)d\eta d\xi\right| \leqslant \rho + \|u^0(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)} +$$
$$+ a\Big(\max_{(t,x)\in D}|f(t,x)|\Big(p + \tilde{\mu}\sum_{|k|>0}\frac{1}{|k|^2}\Big) +$$

$$+ |\varepsilon| M\left(p + \tilde{\mu} \sum_{|k|>0} \frac{1}{|k|^2}\right) + n\|u(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)}\left(p + \tilde{\mu} \sum_{|k|>0} \frac{1}{|k|^2}\right) +$$
$$+ \frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\|u(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)}\left(p + \tilde{\mu} \sum_{|k|>0} \frac{1}{|k|^2}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\tilde{\mu} m_n\left(\sum_{|k|>0} \beta_k^2 + \sum_{|k|>0} \frac{1}{|k|^2}\right) + m_n\left(p + \tilde{\mu} \sum_{|k|>0} \frac{1}{|k|^2}\right)(|\varepsilon|(M_{22} +$$
$$+ M_{33}\|u(t,x)\|^2_{C^{(n-1,m_n)}(D)} + (2M_{23} + M_3)\times$$
$$\times \|u(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)}) + \left(n + \frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)\|u(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)}\Big).$$

З останньої нерівності одержуємо оцінку (5), оскільки

$$\|u(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)} \leqslant \rho + \|u^0(t,x)\|_{C^{(n-1,m_n)}(D)}.$$

Теорему доведено.

1. Vejvoda O., Harrmann L., Lovicar V. Partial differential equations: Time-periodic solutions. – Alphen an den Rijn.-Sijthoff: Noordhoff. 1981. – 358 p.
2. Гой Т. П.,, Пташник Б. Й. *Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т.49, N 2. – С.188-195.
3. Зорич В.А. Математический анализ. Т.2. – М.:Наука, 1984. – 640с.
4. Кочубей А. Н. *Диффузия дробного порядка* // Дифференц.уравнения. – 1990. – Т. 26, N 4. – С.660-670.

Стаття надійшла до редакції 17. 02. 1998

УДК 517.956.25

BARRIERS ON CONES FOR DEGENERATE QUASILINEAR ELLIPTIC OPERATORS

M. V. Borsuk, D. V. Portnyagin

Borsuk M. V., Portnyagin D. V. Barriers on Cones for Degenerate Quasilinear Elliptic Operators. Barrier functions of boundary value problems are constructed for quasilinear elliptic second order operator of divergent form on the cone.

Lately many mathematicians have been considering nonlinear problems for elliptic degenerate equations (see e.g. [1] and the extensive bibliography in it). In the present paper we take the first step to the investigation of the behaviour of solutions of boundary value problems for a quasilinear elliptic second order equation with triple degeneracy:

$$\begin{gathered} Lu \equiv \frac{d}{dx_i}\left(|x|^\tau |u|^q |\nabla u|^{m-2} u_{x_i}\right) = \mu |x|^\tau |u|^{q-1} \operatorname{sgn} u |\nabla u|^m, \quad x \in G_0, \\ -1 < \mu \leqslant 0, \quad q \geqslant 0, \quad m > 1, \quad \tau > m - n, \end{gathered} \tag{1}$$

where G_0 is an $n-$dimensional *convex* circular cone with the vertex at the origin of coordinates O, Γ_0 its lateral area, and $\Omega = G_0 \cap S^{n-1}$ is a domain on the unit sphere S^{n-1} with a smooth boundary $\partial\Omega$. Exactly, we shall construct functions playing the fundamental role in the study of behaviour of solutions to elliptic boundary value problems in the neighbourhood of the irregular boundary point (see [2-6]). The special structure of the solution near a conical point is of particular interest for physical applications (cf. [7-9]). It can be used also to improve numerical algorithms (cf. [10-12]).

The proof of the estimates for the solution itself are based on the observation that the function $|x|^\lambda \Phi(\omega)$ is usable as barrier for the problem. By weak comparison principle (see Theorems from chapt. 10 [2]; it is possible to verify that assumptions of this principle are fulfilled if we observe that the equation (1) is equivalent to

$$\begin{gathered} \frac{d}{dx_i}\left(|\nabla u|^{m-2} u_{x_i}\right) + \tau |x|^{-2} |\nabla u|^{m-2} (x \nabla u) + (q - \mu) |u|^{-1} \operatorname{sgn} u |\nabla u|^m = 0, \\ x \in G_0, \quad -1 < \mu \leqslant 0, \quad q \geqslant 0, \quad m > 1, \quad \tau > m - n \end{gathered}$$

on the set where $u \neq 0$), one might obtain then the bound of solution near conical boundary point. In this connection the finding of exact value of the exponent λ is very important and most difficult. In the case of planar bounded domain with corner boundary points the exact value of the exponent λ will be calculated explicitly.

Let us transfer to the spherical coordinates with the pole at the point O :

$$x_1 = r\cos\omega_1, \; x_2 = r\cos\omega_2 \sin\omega_1, \; \ldots,$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35J25.

$$x_{n-1} = r\cos\omega_{n-1}\sin\omega_{n-2}\ldots\sin\omega_1,\ x_n = r\sin\omega_{n-1}\ldots\sin\omega_1;$$

$0 \leqslant r = |x| < \infty$; $\quad 0 \leqslant \omega_k \leqslant \pi$, $\quad k \leqslant n-2$; $\quad 0 \leqslant \omega_{n-1} \leqslant 2\pi$. The differential operator takes the form:

$$Lu = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{d\xi_i}\left(r^\tau |u|^q |\nabla u|^{m-2}\frac{J}{H_i^2}\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\right),$$

where

$$J = r^{n-1}\sin^{n-2}\omega_1\ldots\sin\omega_{n-2},\ H_1 = 1,\quad \xi_1 = r,\quad \xi_{i+1} = \omega_i,\qquad H_{i+1} = r\sqrt{q_i},$$
$$i = \{\overline{1, n-1}\},\quad q_1 = 1,\quad q_i = (\sin\omega_1\ldots\sin\omega_{i-1})^2,\quad i = \{\overline{2, n-1}\}.$$

We shall seek the solution of the problem (1) as $u = r^\lambda\Phi(\omega)$ with $\Phi(\omega) \geqslant 0$. Then $\Phi(\omega)$ satisfies the equation:

$$\frac{1}{j(\omega)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{d}{d\omega_k}\left(\frac{j(\omega)}{q_k}\left(\lambda^2\Phi^2 + |\nabla_\omega\Phi|^2\right)^{\frac{m-2}{2}}|\Phi|^q\frac{\partial\Phi}{\partial\omega_k}\right) +$$
$$+ \lambda[\lambda(q+m-1)+\tau+n-m]\left(\lambda^2\Phi^2 + |\nabla_\omega\Phi|^2\right)^{\frac{m-2}{2}}\Phi|\Phi|^q =$$
$$= \mu\Phi|\Phi|^{q-2}\left(\lambda^2\Phi^2 + |\nabla_\omega\Phi|^2\right)^{\frac{m}{2}}, \quad (2)$$

where $|\nabla_\omega\Phi|^2 = \sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{q_j}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\omega_j}\right)^2$; $j(\omega) = \sin^{n-2}\omega_1\ldots\sin\omega_{n-2}$.

The Dirichlet problem

Let $G_0 = \{x|\ 0 \leqslant \omega_1 \leqslant \frac{\omega_0}{2},\ \omega_0 \in (0,\pi)\}$, $\quad \cos\omega_1 = x_1|x|^{-1}$. First we consider the Dirichlet problem for the equation (1): $u|_{\Gamma_0} = 0$. Hence, it obviously follows that: $\Phi(\omega) = 0$, $\omega \in \partial\Omega$. Multiplying (2) by $\Phi(\omega)$ and integrating by parts over Ω we get:

$$\int\limits_\Omega \left(\lambda^2\Phi^2 + |\nabla_\omega\Phi|^2\right)^{(m-2)/2}|\Phi|^q|\nabla_\omega\Phi|^2 d\Omega =$$
$$= \lambda[\lambda(q+m-1)+\tau+n-m]\int\limits_\Omega\left(\lambda^2\Phi^2 + |\nabla_\omega\Phi|^2\right)^{(m-2)/2}|\Phi|^{q+2}d\Omega -$$
$$-\mu\int\limits_\Omega |\Phi|^q\left(\lambda^2\Phi^2 + |\nabla_\omega\Phi|^2\right)^{m/2}d\Omega \equiv$$
$$\equiv \int\limits_\Omega\left(\lambda^2\Phi^2 + |\nabla_\omega\Phi|^2\right)^{(m-2)/2}|\Phi|^q\left\{\lambda[\lambda(q+m-1)+\tau+n-m]\Phi^2 -\right.$$
$$\left.-\mu(\lambda^2\Phi^2 + |\nabla_\omega\Phi|^2)\right\}d\Omega.$$

Hence it follows that

$$(1+\mu)\int\limits_\Omega\left(\lambda^2\Phi^2 + |\nabla_\omega\Phi|^2\right)^{(m-2)/2}|\Phi|^q|\nabla_\omega\Phi|^2 d\Omega =$$
$$= \lambda[\lambda(q+m-1-\mu)+\tau+n-m]\int\limits_\Omega\left(\lambda^2\Phi^2 + |\nabla_\omega\Phi|^2\right)^{(m-2)/2}|\Phi|^{q+2}d\Omega.$$

Since $\Phi(\omega) \not\equiv 0$, $\mu > -1$, we have

$$\lambda[\lambda(q+m-1-\mu)+\tau+n-m] > 0. \tag{3}$$

We shall consider the case of $\Phi(\omega)$ not depending on $\omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ and so Φ be a function of single angular coordinate $\omega_1 = \omega \in (0, \frac{\omega_0}{2}), 0 < \omega_0 < \pi$. Such $\Phi(\omega)$ satisfies the boundary value problem for ordinary differential equation:

$$\begin{cases} \left[(m-1)\Phi'^2 + \lambda^2\Phi^2\right]\Phi\Phi'' + \left(\lambda^2\Phi^2 + \Phi'^2\right)\left\{(q-\mu)\Phi'^2 + \right. \\ \left. +\lambda[\lambda(q+m-1-\mu)+\tau+n-m]\Phi^2 + (n-2)\Phi\Phi' \operatorname{ctg}\omega\right\} + \\ +(m-2)\lambda^2\Phi^2\Phi'^2 = 0, \quad \omega \in \left(0, \frac{\omega_0}{2}\right); \\ \Phi'(0) = \Phi(\omega_0/2) = 0. \end{cases} \tag{ODE}$$

By making the substitution $y = \Phi'/\Phi$, $y' + y^2 = \Phi''/\Phi$, we arrive at:

$$\begin{gathered} \left[(m-1)y^2 + \lambda^2\right]y' + (m-1+q-\mu)(y^2+\lambda^2)^2 + \\ +[\lambda(\tau+n-m) + (n-2)y \operatorname{ctg}\omega](y^2+\lambda^2) = 0; \quad \omega \in \left(0, \frac{\omega_0}{2}\right). \end{gathered} \tag{4}$$

Since $\operatorname{ctg}\omega > 0$ on $(0, \omega_0/2)$, from equation (4) and condition (3) it follows that:

$$[(m-1)y^2 + \lambda^2]y' + (n-2)y(y^2+\lambda^2)\operatorname{ctg}\omega < 0, \quad \omega \in \left(0, \frac{\omega_0}{2}\right). \tag{5}$$

Let us solve the Cauchy problem:

$$\begin{cases} [(m-1)\overline{y}^2 + \lambda^2]\overline{y}' + (n-2)\overline{y}(\overline{y}^2+\lambda^2)\operatorname{ctg}\omega = 0, \quad \omega \in \left(0, \frac{\omega_0}{2}\right); \\ \overline{y}(0) = 0. \end{cases}$$

We get:

$$\int \frac{(m-1)\overline{y}^2 + \lambda^2}{\overline{y}(\overline{y}^2+\lambda^2)} d\overline{y} = -(n-2)\int \operatorname{ctg}\omega d\omega + \text{const} \qquad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \overline{y}(\overline{y}^2+\lambda^2)^{\frac{m-2}{2}} = C\sin^{(2-n)}\omega \\ \overline{y}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{y} \equiv 0.$$

Comparing the solution of inequality (5) with that of the Cauchy problem, we deduce that $y(\omega) \leqslant 0$.

Since $\operatorname{ctg}\omega > 0$ and $y \leqslant 0$ on our interval, by (4) we have:

$$\begin{aligned} &[(m-1)y^2+\lambda^2]y' + [(m-1+q-\mu)(\lambda^2+y^2) + \lambda(\tau+n-m)](\lambda^2+y^2) = \\ &\qquad = -(n-2)y(y^2+\lambda^2)\operatorname{ctg}\omega \geqslant 0, \quad \omega \in \left(0, \frac{\omega_0}{2}\right). \end{aligned}$$

Thus:

$$\begin{cases} [(m-1)y^2+\lambda^2]y' \geqslant -[(m-1+q-\mu)(\lambda^2+y^2) + \lambda(\tau+n-m)](\lambda^2+y^2), \\ y(0) = 0, \quad \omega \in \left(0, \frac{\omega_0}{2}\right). \end{cases}$$

By the comparison theorem, similarly we obtain $y(\omega) \geqslant z(\omega)$, where $z(\omega)$ is the solution of the following Cauchy problem:

$$\begin{cases} [(m-1)z^2+\lambda^2]z' = -[(m-1+q-\mu)(\lambda^2+z^2) + \lambda(\tau+n-m)](\lambda^2+z^2), \\ z(0) = 0, \quad \omega \in \left(0, \frac{\omega_0}{2}\right). \end{cases}$$

Solving the latter, we obtain the expression for z in the implicit form:

$$\frac{\left(\frac{m-1}{m-1+q-\mu}+\lambda\frac{m-2}{\tau+n-m}\right)}{\sqrt{\lambda^2+\lambda\frac{\tau+n-m}{m-1+q-\mu}}}\text{arctg}\,\frac{z}{\sqrt{\lambda^2+\lambda\frac{\tau+n-m}{m-1+q-\mu}}}+\omega+\frac{m-2}{m-n-\tau}\text{arctg}\,\left(\frac{z}{\lambda}\right)=0. \quad (6)$$

By joining the results obtained, we arrive at the conclusion that:

$$0\geqslant y(\omega)\geqslant z(\omega). \quad (7)$$

Let us now return to the equation for $y(\omega)$. On making the substitution $\Psi=\ln\Phi$, $w(\Psi)=y^2(\Psi)$, $w'(\Psi)=2yy'(\Psi)=2y\frac{d\omega}{d\Psi}y'(\omega)=2y'(\omega)$, we get:

$$\frac{1}{2}[(m-1)w+\lambda^2]w'+[(m-1+q-\mu)(\lambda^2+w)+\lambda(\tau+n-m)](\lambda^2+w)-$$
$$-(n-2)\sqrt{w}(w+\lambda^2)\text{ctg}\,\omega=0$$

(here we use $y=\pm\sqrt{w}$ and $y<0$). Acting similarly, as it have been shown above, we get the differential inequality for w :

$$\frac{1}{2}[(m-1)w+\lambda^2]w'+[(m-1+q-\mu)(\lambda^2+w)+\lambda(\tau+n-m)](\lambda^2+w)>0$$

Integrating the respective differential equation:

$$\frac{1}{2}[(m-1)\overline{w}+\lambda^2]\overline{w}'+[(m-1+q-\mu)(\lambda^2+\overline{w})+\lambda(\tau+n-m)](\lambda^2+\overline{w})=0$$

we get:

$$\lambda\frac{m-2}{m-n-\tau}\ln\,(\lambda^2+\overline{w})+\Big(\frac{m-1}{m-1+q-\mu}+$$
$$+\lambda\frac{m-2}{\tau+n-m}\Big)\ln\,((m-1+q-\mu)(\lambda^2+\overline{w})+\lambda(\tau+n-m))+2\ln\,\Phi=\ln\,C.$$

Solving the latter expression with the respect to Φ we obtain:

$$\Phi^2(\omega)=C^2\left(\frac{(m-1+q-\mu)(\lambda^2+\overline{w})+\lambda(\tau+n-m)}{\lambda^2+\overline{w}}\right)^{\lambda\frac{m-2}{m-n-\tau}}\times$$
$$\times\left[(m-1+q-\mu)(\lambda^2+\overline{w})+\lambda(\tau+n-m)\right]^{-\frac{m-1}{m-1+q-\mu}}.$$

Now it's evident that $\overline{w}=z^2(\Psi)$, $w=y^2(\Psi)$. From (7) it follows that $w\leqslant\overline{w}$. Then we can rewrite: $\Phi^2(\omega)=$

$$=C^2(z^2+\lambda^2)^{\frac{1-m}{m-1+q-\mu}}\left(m-1+q-\mu+\frac{\lambda(\tau+n-m)}{(z^2+\lambda^2)}\right)^{\lambda\frac{m-2}{m-n-\tau}-\frac{m-1}{m-1+q-\mu}}.$$

Whence it follows that:

$$\Phi(\omega)\sim\frac{1}{|z|^{\frac{(m-1)}{m-1+q-\mu}}}\quad\text{for}\quad|z|\to+\infty$$

Since $y^2\leqslant z^2$, then $1/z^2\leqslant 1/y^2$, and it's now clear that $\lim\limits_{\omega\to\frac{\omega_0}{2}-0}z(\omega)=-\infty$ (since $\Phi(\frac{\omega_0}{2})=0$). Further, since $y=\frac{\Phi'}{\Phi}<0$ and $\Phi>0$ on $(0,\frac{\omega_0}{2})$, $\Phi'<0$ on $(0,\frac{\omega_0}{2})$, i.e. $\Phi(\omega)$ decreases on $(0,\frac{\omega_0}{2})$

from some positive value $\Phi(0)$ up to $\Phi(\frac{\omega_0}{2}) = 0$. Φ doesn't vanish anywhere else in $(0, \frac{\omega_0}{2})$, otherwise it should increase somewhere. From the equation we have:

$$y' = -[(m-1+q-\mu)(y^2+\lambda^2)+\lambda(\tau+n-m)]\frac{(y^2+\lambda^2)}{(m-1)y^2+\lambda^2}-$$
$$-(n-2)y\frac{y^2+\lambda^2}{(m-1)y^2+\lambda^2}\operatorname{ctg}\omega \to -\infty \quad \text{for} \quad y \to -\infty.$$

That's to say $y(\omega)$ decreases in the vicinity of the point $\overline{\omega}$, where $y \to -\infty$. It is possible only at $\overline{\omega} = \omega_0/2$(passing $\omega \to \frac{\omega_0}{2} - 0$). Passing to the limit $\omega \to \frac{\omega_0}{2} - 0$ in (6) and taking account of the fact that $z \to -\infty$, we get:

$$\frac{\omega_0}{\pi} + \frac{m-2}{\tau+n-m} = \frac{\frac{m-1}{m-1+q-\mu} + \lambda\frac{m-2}{\tau+n-m}}{\sqrt{\frac{\lambda[\lambda(m-1+q-\mu)+\tau+n-m]}{m-1+q-\mu}}}.$$

Hence we obtain the explicit expression for λ
if $m \geqslant 2$ or $1 < m < 2$, $\frac{\tau+n-m}{2-m} \neq \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\lambda = \frac{\pi}{2\omega_0(m-1+q-\mu)}\left\{\frac{m(m-2)-2(m-2)t-t^2}{t+2(m-2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{[t^2+2(m-2)t+m^2][t^2+2(m-2)t+(m-2)^2]}}{t+2(m-2)}\right\}, \tag{8}$$

where $t = \frac{\omega_0}{\pi}(\tau+n-m)$;
if $1 < m < 2$, $\frac{\tau+n-m}{2-m} = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\lambda = \frac{2\pi(m-1)^2}{\omega_0 m(m-1+q-\mu)}. \tag{9}$$

In the case of $n = 2$, $\tau = 0$ *we obtain the result*

$$\lambda = \frac{(m-1)}{(m-1-\mu+q)} + \frac{(\pi-\omega_0)[m(\pi-\omega_0)+\sqrt{(m-2)^2(\pi-\omega_0)^2+4(m-1)\pi^2}]}{2\omega_0(2\pi-\omega_0)(m-1-\mu+q)}. \tag{10}$$

In the case of $\tau = \mu = q = 0$, $n = 2$ *we get the known result. If* $m = n = 2$ *we have from (8)*

$$\lambda = \frac{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)^2 + \tau^2} - \tau}{2(1+q-\mu)}$$

Now we consider the case $n = 3$. We shall assume the $\tau = 0$. We shall seek solution of a form $u = r^\lambda\Phi(\omega)\sin^\lambda\varphi$, where $\varphi \in (0,\pi)$; $\omega \in (-\omega_0/2, \omega_0/2)$. Then we obtain for $\Phi(\omega)$ the problem which coincides with (ODE) for $n = 2$ and so we have for λ the expression (10).

The mixed boundary value problem

Now we consider te mixed boundary value problem in planar domain $G_0 = \{(r,\omega)|\ r > 0,\ 0 < \omega < \omega_0 < \pi\}$ with corner boundary point:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx_i}\left(|u|^q|\nabla u|^{m-2}u_{x_i}\right) = \mu|u|^{q-1}\operatorname{sgn} u|\nabla u|^m, \quad x \in G_0, \\ u\big|_{\omega=\omega_0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{\omega=0} = 0, \end{cases}$$

where ω_0 is an angle with the vertex at the point O. By analogy with abovestated we come to the following expression for λ :

$$\lambda = \frac{(m-1)}{(m-1-\mu+q)} + \\ + \frac{(\pi-2\omega_0)[m(\pi-2\omega_0)+\sqrt{(m-2)^2(\pi-2\omega_0)^2+4(m-1)\pi^2}]}{8\omega_0(\pi-\omega_0)(m-1-\mu+q)}.$$

It is clear that this expression coincides with (9) for the Dirichlet problem, if in the latter we set $2\omega_0$ instead of ω_0.

Thus, there are constructed barrier functions $w = r^\lambda \Phi(\omega)$ *of the first boundary value problem for the equation* (1) *and also of the mixed boundary value problem for (1) by* $\tau = 0$.

1. Drábek P., Kufner A., Nicolosi F. Nonlinear elliptic equations. – University of West Bohemia in Pilsen, 1996.
2. Gilbarg D., Trudinger N. Elliptic partial differential equations of second order. – Springer, 1983.
3. Miller K. *Barriers on cones for uniformly elliptic operators*// Ann. mat. pura appl. – 1967. – Vol. 76, N4. – P. 93-105.
4. Tolksdorf P. *On the Dirichlet problem for quasilinear elliptic equations in domains with conical boundary points* // Comm. Part. Different. Equat. – 1983. – Vol. 8, N7. – P. 773-817.
5. Dobrowolski M. *On quasilinear elliptic equations in domains with conical boundary points* // J. reine und angew. Math. – 1989. – Vol. 394. – P. 186-195.
6. Borsuk M.V. *Estimates of solutions of Dirichlet problem for elliptic nondivergence second-order equations in a neighbourhood of a conical boundary point*// Differ. uravnenija. – 1994. – V. 30, N1. – P. 104-108.
7. Sommerfeld A. *Asymptotische Integration der Differentialgleichung der Thomas - Fermischen atoms*// Z. für Physik. – 1932. – V. 78. – P. 283-308.
8. Jackson J.D. Classical Electrodinamics. – John Wiley & Sons, NY, 1975.
9. Benilan Ph., Brézis H. Some variational problems of the Thomas - Fermi type. – Variational inequalities (Cottle, Gianessi, Lions, Eds.), Wiley, NY, 1980, pp. 53-73.
10. Babuska J., Kellogg R.B. Numerical solution of the neutron diffusion equation in the presence of corners and interfaces. – Numerical reactor calculations", Intern. atomic energy agency, Vienna, 1972, pp. 473 - 486.
11. Strang G., Fix J. An analysis of the finite element method, Prentice-Hall. – Englewood Cliffs, 1973.
12. Dobrowolski M. Numerical approximation of elliptic interface and corner problems. – Habilitationsschrift, Universität Bonn, 1981 (see also: Z.A.A.M. 1984. V. **64**, pp. 270 -271.)

Стаття надійшла до редакції 30.12. 1997

УДК 539.3

МЕТОД ФУНКЦІЇ ГРІНА В ОДНОВИМІРНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ БАГАТОШАРОВИХ ТІЛ

Б. В. Процюк, В. М. Синюта

Protsyuk B. V., Synyuta V. M. A Green function method in one-dimensional nonstationary heat conduction problems for multilayered plates. A method is proposed for construction of Green function for onedimensional nonstationary heat conduction problems for multilayered plates. The Laplas integral transform, fundamental system of solutions of corresponding ordinary differential equations with discontinuous coefficients and generalized function are used in the method. An application of this method is illustrated by solving the nonstationary heat problem describing friction of two packages of plates under condition of convective heat exchange.

Серед методів розв'язування задач теплопровідності одне з провідних місць належить методу функції Гріна. Для багатошарових тіл функції Гріна наведені в [1-3] і ін. В [4] функції Гріна введено в розгляд при побудові інтегральних перетворень для кусково-однорідних тіл.

У даній праці з використанням інтегрального перетворення Лапласа за часом і функції Гріна звичайного диференціального рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами ілюструється спосіб побудови функції Гріна одновимірних нестаціонарних задач теплопровідності для багатошарових тіл та її застосування до розв'язування нестаціонарної теплової задачі тертя двох пакетів пластин.

Розглянемо пластину, складену з довільної кількості шарів, між якими виконуються умови ідеального теплового контакту. Шари обмежені плоско - паралельними поверхнями. Пластина нагрівається внутрішніми джерелами тепла густини $w_t(z,\tau)$ і оточуючим середовищем, теплообмін з яким через зовнішні поверхні здійснюється за законом Ньютона. Припускаємо, що теплофізичні характеристики пластини не залежать від температури. Нестаціонарне температурне поле такої пластини визначається з рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+1}} \frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{z=z_k-0} \cdot \delta(z - z_k) = \frac{1}{a(z)} \frac{\partial t}{\partial \tau} - \frac{w_t(z,\tau)}{\lambda(z)} \tag{1}$$

при граничних умовах

$$\frac{\partial t}{\partial z} - H_1[t - t_c^-(\tau)] = 0 \qquad \text{при} \quad z = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial z} + H_n[t - t_c^+(\tau)] = 0 \qquad \text{при} \quad z = z_n, \tag{2}$$

і початковій умові

$$t = t_0(z) \qquad \text{при} \quad \tau = 0. \tag{3}$$

Тут $\lambda(z)$ і $a(z)$ – кусково-сталі коефіцієнти теплопровідності і температуропровідності; $H_1 = \dfrac{\alpha_1}{\lambda_1}, H_n = \dfrac{\alpha_n}{\lambda_n}$; α_1 і α_n – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь $z = 0$ і $z = z_n$; $t_c^{\pm}(\tau)$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35K20.

– температури оточуючих середовищ; $z_j - z_{j-1}$- товщина j-ого шару ($j = 1, \ldots, n; z_0 = 0$); n – кількість шарів; $\delta(x)$– дельта-функція Дірака.

Задачу (1)-(3) розв'язуватимемо методом функції Гріна. Функцією Гріна задачі (1)-(3) назвемо функцію $G(z, \zeta, \tau)$, яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+1}} \frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{z=z_k-0} \cdot \delta(z - z_k) = \frac{1}{a(z)} \frac{\partial G}{\partial \tau} \tag{4}$$

і крайові умови

$$\frac{\partial G}{\partial z} - H_1 G = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial z} + H_n G = 0 \quad \text{при} \quad z = z_n, \tag{5}$$

$$G = \frac{1}{c(\zeta)} \delta(z - \zeta) \qquad \text{при} \quad \tau = 0 \tag{6}$$

де $c(\zeta) = \lambda(\zeta)/a(\zeta)$ – об'ємна теплоємність.

Якщо відома функція Гріна, то розв'язок задачі (1)-(3) виражається таким чином

$$\begin{gathered} t(z,\tau) = \alpha_1 \int_0^\tau G(z, 0, \tau - \tau') t_c^-(\tau')\, d\tau' \quad + \alpha_n \int_0^\tau G(z, z_n, \tau - \tau') t_c^+(\tau')\, d\tau' \quad + \\ + \int_0^{z_n} c(\zeta) G(z, \zeta, \tau) t_0(\zeta)\, d\zeta \quad + \int_0^{z_n} \int_0^\tau G(z, \zeta, \tau - \tau') w_t(\zeta, \tau')\, d\zeta d\tau'. \end{gathered} \tag{7}$$

Застосуємо до задачі (4)-(6) інтегральне перетворення Лапласа за часом. В зображеннях одержимо звичайне диференціальне рівняння з розривними коефіцієнтами

$$\begin{gathered} \frac{d^2 \bar{\mathrm{G}}}{dz^2} - \Big[\varepsilon_1^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_{k+1}^2 - \varepsilon_k^2) S(z - z_k)\Big] \bar{\mathrm{G}} + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+1}} \frac{d\bar{\mathrm{G}}}{dz}\Big|_{z=z_k-0} \cdot \delta(z - z_k) = -\frac{1}{\lambda(\zeta)} \delta(z - \zeta) \end{gathered} \tag{8}$$

і граничні умови

$$\frac{d\bar{\mathrm{G}}}{dz} - H_1 \bar{\mathrm{G}} = 0 \qquad \text{при} \quad z = 0, \quad \frac{d\bar{\mathrm{G}}}{dz} + H_n \bar{\mathrm{G}} = 0 \qquad \text{при} \quad z = z_n, \tag{9}$$

де $\varepsilon_j = \sqrt{\dfrac{s}{a_j}}$, s – параметр перетворення Лапласа, $S(x)$ – функція Хевісайда.

Оскільки (8) еквівалентне рівнянню

$$\frac{d^2 \bar{\mathrm{G}}}{dz^2} - \Big[\varepsilon_1^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_{k+1}^2 - \varepsilon_k^2) S(z - z_k)\Big] \bar{\mathrm{G}} = -\frac{1}{\lambda(\zeta)} \delta(z - \zeta), \tag{10}$$

де

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathrm{G}} = \bar{\mathrm{G}}_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\bar{\mathrm{G}}_{k+1} - \bar{\mathrm{G}}_k) S(z - z_k), \\ \dfrac{d^2 \bar{\mathrm{G}}}{d\,z^2} = \dfrac{d^2 \bar{\mathrm{G}}_1}{dz^2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\dfrac{d^2 \bar{\mathrm{G}}_{k+1}}{dz^2} - \dfrac{d^2 \bar{\mathrm{G}}_k}{dz^2}) S(z - z_k), \end{array} \right.$$

і умовам контакту

$$\bar{\mathrm{G}}\Big|_{z_j+0} = \bar{\mathrm{G}}\Big|_{z=z_j-0}, \quad \lambda_j \frac{d\bar{\mathrm{G}}}{dz}\Big|_{z=z_j+0} = \lambda_{j-1} \frac{d\bar{\mathrm{G}}}{dz}\Big|_{z=z_j-0}, \quad (j = 2, ..., n). \tag{11}$$

то розв'язок задачі (8),(9) згідно з [5] подамо у вигляді

$$\bar{G}(z,\zeta,s) = -\frac{1}{\lambda_1} s \frac{\varphi(s)}{s\psi(s)}; \tag{12}$$

тут

$$\varphi(s) = [F_n^{(2)}(s,z) + H_n F_n^{(1)}(s,z)]\Phi(s,\zeta)S(z-\zeta) + [F_n^{(2)}(s,\zeta) + H_n F_n^{(1)}(s,\zeta)]\Phi(s,z)S(\zeta - z),$$
$$\psi(s) = \Phi'(s,z_n) + H_n\Phi(s,z_n), \quad F_n^{(1)}(s,z) = Z_1(s,z_n)\widetilde{Z}_2(s,z) - \widetilde{Z}_2(s,z_n)Z_1(s,z),$$
$$F_n^{(2)}(s,z) = Z_1'(s,z_n)\widetilde{Z}_2(s,z) - \widetilde{Z}_2'(s,z_n)Z_1(s,z), \ \Phi(s,z) = Z_1(s,z) + H_1\widetilde{Z}_2(s,z),$$
$$\widetilde{Z}_2(s,z) = \frac{1}{\varepsilon_1}Z_2(s,z),$$

а фундаментальна система розв'язків $Z_1(s,z)$ і $Z_2(s,z)$ рівняння (8) визначається такими співвідношеннями

$$\begin{gathered} Z_i(s,z) = Z_{1i}(s,z) + \sum_{k=1}^{n-1}[Z_{k+1,i}(s,z) - Z_{ki}(s,z)]S(z-z_k) \quad (i=1,2), \\ Z_{11}(s,z) = \operatorname{ch}\varepsilon_1 z, \quad Z_{12}(s,z) = \operatorname{sh}\varepsilon_1 z, Z_{ji}(s,z) = \\ = Z_{j-1,i}(s,z_{j-1})\operatorname{ch}\varepsilon_j(z-z_{j-1}) + \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j\varepsilon_j}Z'_{j-1,i}(s,z_{j-1})\operatorname{sh}\varepsilon_j(z-z_{j-1}). \end{gathered} \tag{13}$$

Штрих означає похідну за z.

Розклавши гіперболічні функції в ряди, легко переконатися, що дріб $\frac{\varphi(s)}{s\psi(s)}$ є відношенням двох узагальнених поліномів, причому знаменник не містить вільного члена. Тому оригінал цього дробу можна знайти за допомогою теореми розкладу [6].

Використовуючи далі теорему про згортку, одержимо

$$G(z,\zeta,\tau) = \frac{2}{\lambda_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi(-\mu_m^2)}{\left.\frac{d\psi(-\mu^2)}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_m}}e^{-\mu_m^2\tau}, \tag{14}$$

де μ_m – корені трансцендентного рівняння

$$\frac{H_1\sqrt{a_1}}{\mu} = -\frac{Z_1'(-\mu^2,z_n) + H_n Z_1(-\mu^2,z_n)}{Z_2'(-\mu^2,z_n) + H_n Z_2(-\mu^2,z_n)}. \tag{15}$$

У вираз для $\Phi(-\mu^2,z)$ замість $\frac{H_1\sqrt{a_1}}{\mu}$ підставимо праву частину (15). Отримаємо

$$\Phi(-\mu^2,z) = -\frac{F_n^{(2)}(-\mu^2,z) + H_n F_n^{(1)}(-\mu^2,z)}{Z_2'(-\mu^2,z_n) + H_n Z_2(-\mu^2,z_n)}. \tag{16}$$

Враховуючи (16) і те, що $S(z-\zeta) + S(\zeta - z) = 1$, із (14) матимемо

$$G(z,\zeta,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m\Phi_m(z)\Phi_m(\zeta)e^{-\mu_m^2\tau}, \tag{17}$$

де

$$b_m = -\frac{2\sqrt{a_1}}{\lambda_1}\frac{Z_2'(-\mu^2,z_n)+H_nZ_2(-\mu^2,z_n)}{\dfrac{d\psi(-\mu^2)}{d\mu}}\Big|_{\mu=\mu_m}, \tag{18}$$

$$\Phi_m(z)\equiv\Phi(-\mu_m^2,z)=\Phi_m^{(1)}(z)+\sum_{k=1}^{n-1}[\Phi_m^{(k+1)}(z)-\Phi_m^{(k)}(z)]S(z-z_k),$$

$$\Phi_m^{(1)}(z)=\cos\frac{\mu_m z}{\sqrt{a_1}}+\frac{H_1\sqrt{a_1}}{\mu_m}\sin\frac{\mu_m z}{\sqrt{a_1}},\quad \Phi_m^{(j)}(z)=\Phi_m^{(j-1)}(z_{j-1})\times \tag{19}$$

$$\times\cos\frac{\mu_m(z-z_{j-1})}{\sqrt{a_j}}+\frac{\lambda_{j-1}\sqrt{a_j}}{\lambda_j\mu_m}\frac{d\Phi_m^{(j-1)}(z_{j-1})}{dz}\sin\frac{\mu_m(z-z_{j-1})}{\sqrt{a_j}}.$$

З використанням введених позначень рівняння (15) запишемо у вигляді

$$\frac{d\Phi(z_n)}{dz}+H_n\Phi(z_n)=0. \tag{20}$$

Для обчислення коефіцієнтів b_m одержимо іншу, більш просту формулу. Покажемо спочатку, що система функцій $\Phi_m(z)(m=1,2,3,...)$ є ортогональною з вагою $c(z)$ на проміжку $[0;z_n]$. Нехай μ_m і μ_ν два різні корені рівняння (20), а $\Phi_m(z)$ і $\Phi_\nu(z)$ відповідні їм функції, які задовольняють рівняння

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2}+\mu^2\Big[\frac{1}{a_1}+\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\Big)S(z-z_k)\Big]\Phi=0, \tag{21}$$

умови контакту

$$\Phi\Big|_{z_j+0}=\Phi\Big|_{z=z_j-0},\quad \lambda_j\frac{d\Phi}{dz}\Big|_{z=z_j+0}=\lambda_{j-1}\frac{d\Phi}{dz}\Big|_{z=z_j-0} \tag{22}$$

і граничні умови

$$\frac{d\Phi}{dz}-H_1\Phi=0\quad\text{при}\quad z=0,\quad \frac{d\Phi}{dz}+H_n\Phi=0\quad\text{при}\quad z=z_n \tag{23}$$

Домножимо на $\lambda(z)\Phi_\nu(z)$ рівняння, якому задовольняє $\Phi_m(z)$, а на $\lambda(z)\Phi_m(z)$ рівняння, якому задовольняє $\Phi_\nu(z)$. Їх різницю подамо в такому вигляді

$$\begin{aligned}&\lambda_1\Big(\Phi_\nu^{(1)}\frac{d^2\Phi_m^{(1)}}{dz^2}-\Phi_m^{(1)}\frac{d^2\Phi_\nu^{(1)}}{dz^2}\Big)+(\mu_m^2-\mu_\nu^2)c_1\Phi_\nu^{(1)}\Phi_m^{(1)}+\\&+\sum_{k=1}^{n-1}\Big[\lambda_{k+1}\Big(\Phi_\nu^{(k+1)}\frac{d^2\Phi_m^{(k+1)}}{dz^2}-\Phi_m^{(k+1)}\frac{d^2\Phi_\nu^{(k+1)}}{dz^2}\Big)-\\&-\lambda_k\Big(\Phi_\nu^{(k)}\frac{d^2\Phi_m^{(k)}}{dz^2}-\Phi_m^{(k)}\frac{d^2\Phi_\nu^{(k)}}{dz^2}\Big)+\\&+(\mu_m^2-\mu_\nu^2)(c_{k+1}\Phi_\nu^{(k+1)}\Phi_m^{(k+1)}-c_k\Phi_\nu^{(k)}\Phi_m^{(k)})\Big]S(z-\dot z_k)=0.\end{aligned} \tag{24}$$

Інтегруємо (24) в межах від 0 до z_n. Після нескладних перетворень отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\int_{z_{j-1}}^{z_j}\Big(\Phi_\nu^{(j)}\frac{d^2\Phi_m^{(j)}}{dz^2}-\Phi_m^{(j)}\frac{d^2\Phi_\nu^{(j)}}{dz^2}\Big)dz+(\mu_m^2-\mu_\nu^2)\sum_{j=1}^{n}c_j\int_{z_{j-1}}^{z_j}\Phi_\nu^{(j)}\Phi_m^{(j)}\,dz=0. \tag{25}$$

Використавши умови контакту (22) та граничні умови (23), одержимо

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \int_{z_{j-1}}^{z_j} \Phi_\nu^{(j)} \Phi_m^{(j)}\, dz = 0,$$

звідки

$$\int_0^{z_n} c(z)\Phi_\nu(z)\Phi_m(z)\, dz = 0, \tag{26}$$

тобто справджується ортогональність системи функцій, що розглядається.

Далі, розв'язок (17) повинен задовольняти початкову умову (6). Це означає, що повинна виконуватися рівність

$$\frac{1}{c(\zeta)}\delta(z-\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \Phi_\nu(z)\Phi_\nu(\zeta). \tag{27}$$

Домножимо ліву та праву частини цієї рівності на $c(z)\Phi_m(z)$ і зінтегруємо в межах від 0 до z_n. З урахуванням ортогональності, інтегрування дає

$$\Phi_m(\zeta) = b_m \int_0^{z_n} c(z)(\Phi_m(z))^2 \Phi_m(\zeta)\, dz,$$

звідки знаходимо

$$b_m = \frac{1}{\int_0^{z_n} c(z)(\Phi_m(z))^2\, dz}. \tag{28}$$

Обчислимо інтеграл в цій формулі. Після множення на $\dfrac{\lambda(z)}{\mu_m}\Phi_m(z)$ рівняння, якому задовільняє $\Phi_m(z)$, та інтегрування в межах від 0 до z_n, одержимо

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \int_{z_{j-1}}^{z_j} (\Phi_m^{(j)}(z))^2\, dz + \frac{1}{\mu_m^2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \int_{z_{j-1}}^{z_j} \Phi_m^{(j)}(z)\frac{d^2\Phi_m^{(j)}(z)}{dz^2}\, dz = 0. \tag{29}$$

Інтегруючи частинами під другою сумою з урахуванням умов контакту (22) і граничних умов (23), матимемо

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} c_j \int_{z_{j-1}}^{z_j} (\Phi_m^{(j)}(z))^2\, dz - \frac{1}{\mu_m^2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \int_{z_{j-1}}^{z_j} \Big(\frac{d\Phi_m^{(j)}(z)}{dz}\Big)^2 dz - \\ -\frac{1}{\mu_m^2}[H_n\lambda_n(\Phi_m^{(n)}(z_n))^2 + H_1\lambda_1(\Phi_m^{(1)}(0))^2] = 0.\end{gathered} \tag{30}$$

З іншого боку, на підставі рекурентних співвідношень (19), отримуємо

$$\begin{gathered}(\Phi_m^{(1)}(z))^2 + \frac{a_1}{\mu_m^2}\Big(\frac{d\Phi_m^{(1)}(z)}{dz}\Big)^2 = 1 + \frac{a_1 H_1^2}{\mu_m^2}, \quad (\Phi_m^{(j)}(z))^2 + \\ + \frac{a_j}{\mu_m^2}\Big(\frac{d\Phi_m^{(j)}(z)}{dz}\Big)^2 = (\Phi_m^{(j-1)}(z_{j-1}))^2 + \frac{a_j}{\mu_m^2}\Big(\frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j}\frac{d\Phi_m^{(j-1)}(z_{j-1})}{dz}\Big)^2;\end{gathered} \tag{31}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \int_{z_{j-1}}^{z_j} \left[\left(\Phi_m^{(j)}(z) \right)^2 + \frac{a_j}{\mu_m^2} \left(\frac{d\Phi_m^{(j)}(z)}{dz} \right)^2 \right] dz = c_1 \left(1 + \frac{a_1 H_1^2}{\mu_m^2} \right) z_1 +$$
$$+ \sum_{j=2}^{n} c_j \left[\left(\Phi_m^{(j-1)}(z_{j-1}) \right)^2 + \left(\frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} \frac{d\Phi_m^{(j-1)}(z_{j-1})}{dz} \right)^2 \frac{a_j}{\mu_m^2} \right] (z_j - z_{j-1}). \tag{32}$$

З (31) і граничних умов (23) знайдемо

$$(\Phi_m^{(1)}(0))^2 = 1, \quad (\Phi_m^{(n)}(z_n))^2 = \frac{(\Phi_m^{(n-1)}(z_{n-1}))^2 + \frac{a_n}{\mu_m^2} \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \frac{d\Phi_m^{(n-1)}(z_{n-1})}{dz} \right)^2}{1 + \frac{a_n H_n^2}{\mu_m^2}}. \tag{33}$$

Додавши (30) і (32) та врахувавши (33) одержимо

$$\int_0^{z_n} c(z) (\Phi_m(z))^2 \, dz = \frac{c_1 N_m}{2}, \tag{34}$$

де

$$N_m = \frac{1}{\mu_m^2} \Big\{ (\mu_m^2 + a_1 H_1^2) z_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{c_j}{c_1} \Big[\mu_m^2 (\Phi_m^{(j-1)}(z_{j-1}))^2 +$$
$$+ a_j \left(\frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} \frac{d\Phi_m^{(j-1)}(z_{j-1})}{dz} \right)^2 \Big] (z_j - z_{j-1}) + \frac{\lambda_1 H_1}{c_1} + \tag{35}$$
$$+ \frac{\lambda_n H_n}{c_1} \cdot \frac{\mu_m^2 (\Phi_m^{(n-1)}(z_{n-1}))^2 + a_n \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \frac{d\Phi_m^{(n-1)}(z_{n-1})}{dz} \right)^2}{\mu_m^2 + a_n H_n^2} \Big\}.$$

Таким чином,

$$b_m = \frac{2}{c_1 N_m}. \tag{36}$$

Обчислення коефіцієнтів b_m за цією формулою спрощується, оскільки, на відміну від формули (18), непотрібно обчислювати значення похідних відповідних функцій за змінної μ. Отже, функції Гріна (17) можна надати такого вигляду

$$G(z, \zeta, \tau) = \frac{2}{c_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_m(z) \Phi_m(\zeta)}{N_m} e^{-\mu_m^2 \tau}. \tag{37}$$

Як приклад, розглянемо одновимірну нестаціонарну теплову задачу тертя багатошарових пластин. Для системи з двох плоско-паралельних шарів з урахуванням термоопору така задача розглядалася в [7]. Нехай маємо систему, що складається з двох пакетів пластин. Між пластинами в кожному з пакетів і між пакетами реалізується ідеальний термомеханічний контакт. Перший пакет пластин з n_1 шарів нижньою своєю поверхнею притискується до закріпленого пакету з n_2 шарів ($n_1 + n_2 = n$). Перший пакет рухається по верхній поверхні другого пакету пластин із сталою швидкістю V_0. Припускаємо, що нормальні контактні напруження між пакетами є величиною сталою і рівною P_0. За рахунок дії сили тертя, що підпорядкована закону Амонтона, на площині контакту пакетів шарів $z = z_i$ відбувається теплоутворення.

При нульовій початковій температурі, сталих температурах середовищ t_c^- і t_c^+ та $w_t = k_T V_0 P_0 \delta(z - z_i)$, де k_T – коефіцієнт тертя, з формул (7) і (37) отримаємо

$$t(z,\tau) = 2H_1 t_c^- a_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_m(z)}{N_m} \cdot \frac{1 - e^{-\mu_m^2 \tau}}{\mu_m^2} + \frac{2H_n \lambda_n a_1 t_c^+}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_m(z)\Phi_m(z_n)}{N_m} \cdot \frac{1 - e^{-\mu_m^2 \tau}}{\mu_m^2} +$$
$$+ k_T V_0 P_0 \frac{2a_1}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_m(z)\Phi_m(z_i)}{N_m} \cdot \frac{1 - e^{-\mu_m^2 \tau}}{\mu_m^2}. \tag{38}$$

Обчислимо суми рядів

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_m(z)}{\mu_m^2 N_m}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_m(z)\Phi_m(z_n)}{\mu_m^2 N_m}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_m(z)\Phi_m(z_i)}{\mu_m^2 N_m}, \tag{39}$$

які входять в це співвідношення. Для цього скористаємось рівністю

$$\frac{2}{c_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_m(z)\Phi_m(\zeta)}{N_m} = \frac{1}{c(z)} \delta(z - \zeta), \tag{40}$$

яка випливає з (27), якщо врахувати (36). Після домноження (40) на c(z) і інтегрування в межах від 0 до z та граничного переходу $\zeta \to 0$, одержимо

$$\frac{2}{c_1} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^z c(z)\Phi_m(z)\, dz = 1. \tag{41}$$

Оскільки

$$\int_{\gamma}^{z} c(z)\Phi_m(z)\, dz = -\frac{\lambda(z)}{\mu^2} \Phi'_m(z) \Big|_{\gamma}^{z}, \tag{42}$$

де γ=const, то рівність (41) після домноження обох її частин на $\dfrac{\lambda_1}{\lambda(z)}$ набуде вигляду

$$-2a_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi'_m(z)}{\mu_m^2 N_m} + H_1 2a_1 \frac{\lambda_1}{\lambda(z)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m^2 N_m} = \frac{\lambda_1}{\lambda(z)}. \tag{43}$$

Інтегрування (43) в межах від 0 до z дає

$$-2a_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_m(z)}{\mu_m^2 N_m} + 2a_1 [1 + H_1 f(z)] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m^2 N_m} = f(z), \tag{44}$$

де

$$f(z) = z + \sum_{k=1}^{n-1} \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}} - \frac{\lambda_1}{\lambda_k} \Big)(z - z_k) S(z - z_k).$$

Додамо при $z = z_n$ рівності (43) і (44), попередньо помноживши останню на H_n, і врахуємо трансцендентне рівняння (20). З отриманого виразу знайдемо

$$2a_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m^2 N_m} = \frac{1}{\beta} \Big[\frac{\lambda_1}{\lambda_n} + H_n f(z_n) \Big], \tag{45}$$

де $\beta = H_1\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n} + H_n[1 + H_1 f(z_n)]$. Підставимо далі (45) в (44). Після спрощень одержимо

$$2a_1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m(z)}{\mu_m^2 N_m} = \frac{1}{\beta}\Big[\frac{\lambda_1}{\lambda_n} + H_n(f(z_n) - f(z))\Big]. \tag{46}$$

Для обчислення другої суми (39), домножимо (40) на c(z) і зінтегруємо в межах від z до z_n та здійснимо граничний перехід $\zeta \to z_n$. З урахуванням (42) і трансцендентного рівняння (20), отримаємо

$$\frac{2\lambda_n H_n}{c_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m^2(z_n)}{\mu_m^2 N_m} + \frac{2\lambda(z)}{c_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m(z_n)\Phi_m'(z)}{\mu_m^2 N_m} = 1. \tag{47}$$

Домножимо обидві частини рівності (47) на $\dfrac{\lambda_1}{\lambda(z)}$ і зінтегруємо в межах від z до z_n; тоді

$$\begin{gathered} 2a_1 H_n\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m^2(z_n)}{\mu_m^2 N_m}\frac{\lambda_n}{\lambda_1}[f(z_n) - f(z)] + \\ +2a_1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m(z_n)}{\mu_m^2 N_m}[\Phi_m(z_n) - \Phi_m(z)] = (f(z) - f(z_n)). \end{gathered} \tag{48}$$

Використовуючи значення суми (46) при $z = z_n$, з рівності (48), при z=0 знайдемо

$$2a_1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m^2(z_n)}{\mu_m^2 N_m} = \frac{\lambda_1}{\beta\lambda_n}(1 + H_1 f(z_n))]. \tag{49}$$

Підставимо (49) в (48). Після спрощень одержимо

$$2a_1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m(z)\Phi_m(z_n)}{\mu_m^2 N_m} = \frac{\lambda_1}{\beta\lambda_n}(1 + H_1 f(z))]. \tag{50}$$

Обчислення третьої суми проводимо в тій послідовності, що й обчислення другої суми, поклавши в (40) $z = z_i$. В результаті отримаємо

$$\begin{gathered} 2a_1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m(z)\Phi_m(z_i)}{\mu_m^2 N_m} = \frac{1}{\beta}\Big\{\frac{\lambda_1}{\lambda_n} + H_n(f(z_n) - f(z_i))\Big\}\times \\ \times[H_1 f(z) + 1] - [f(z) - f(z_i)]S(z - z_i). \end{gathered} \tag{51}$$

Після підстановки (46), (50), (51) в (38), температурне поле матиме вигляд

$$\begin{gathered} t(z,\tau) = \frac{1}{\beta}\Big\{H_1 t_c^-\Big[\frac{\lambda_1}{\lambda_n} + H_n(f(z_n) - f(z))\Big] + H_n t_c^+[1 + H_1 f(z)]\Big\} - \\ -2a_1 H_1 t_c^-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m(z)e^{-\mu_m^2\tau}}{\mu_m^2 N_m} - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}2a_1 H_n t_c^+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m(z)\Phi_m(z_n)e^{-\mu_m^2\tau}}{\mu_m^2 N_m} + \\ +\frac{k_T V_0 P_0}{\lambda_1}\Big(\frac{1}{\beta}\Big\{\frac{\lambda_1}{\lambda_n} + H_n[f(z_n) - f(z_i)]\Big\}[1 + H_1 f(z)] - \\ -[f(z) - f(z_i)]S(z - z_i) - 2a_1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m(z)\Phi_m(z_i)}{\mu_m^2 N_m}e^{-\mu_m^2\tau}\Big). \end{gathered} \tag{52}$$

Легко переконатись, що при $\tau \to \infty$ з (52) одержимо розв'язок відповідної стаціонарної теплової задачі тертя двох пакетів пластин.

1. Власов В.В. Применение функций Грина к решению инженерных задач теплофизики. – М.: Изд. Московского ин-та хим. маш., 1972.
2. Березовский А.А., Шувар Р.А. Нелинейные одномерные стационарные задачи теплопроводности в кусочно-однородных средах. Начально-краевые задачи теплопроводности.– К., 1987. – 59 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; N 87.43).
3. Коляно Ю.М., Процюк Б.В., Синюта В.М., Шебанов С.М., Шаров С.М. *Нестационарное температурное поле в многослойном ортотропном цилиндре*// Инж. физ. журн. – 1992. – Т.62, N 2. – С. 325–330.
4. Ленюк М.П. *Интегральные преобразования для кусочно- однородных сред* // Механика неоднородных структур: Тезисы докладов II Всесоюзной конференции. – Львов, 1987. – Т.2. – С. 178 – 179.
5. Процюк Б.В. *Фундаментальна система розв'язків звичайних диференціальних рівнянь з кусково-неперервними коефіцієнтами і її використання при розв'язуванні задач термопружності. Крайові задачі термомеханіки*// Зб. наук. пр.: Київ. Ін-т математики НАН України. – 1996. – Ч.2. – С. 89 – 94.
6. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш.шк., 1967. – 599 с.
7. Гриліцький Д.В. Термопружні контактні задачі в трибології: Навч. посібник – К.:ІЗМН, 1996. – 204 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.01.1998

УДК 517.95

ПРО ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ РІВНЯНЬ, ЩО УЗАГАЛЬНЮЮТЬ РІВНЯННЯ ПОЛІТРОПНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

М. М. Бокало, В. М. Сікорський

Bokalo M. M., Sikorsky V. M. About properties of solutions of the problem without initial conditions for the equations of the politropic filtration type. Existance and uniqueness of generalized solutions of the problem without initial conditions for the equations of the politropic filtration type are obtained. The assumptions of existence and uniqueness theorems do not contain conditions on the behaviour of solutions and right side of equation whenever $t \to -\infty$. Continuos dependence of generalized solutions on the data-in is showed. Moreover, some properties of the solutions (boundedness, periodicity, almost periodicity) are obtained.

Вступ. Математичні моделі для рівнянь, які описують нестаціонарні процеси фільтрації в пористих середовищах, вивчались у багатьох працях (див. [1] і бібліографію там). У праці [2] розглянуто мішану задачу для рівняння, що узагальнює рівняння політропної фільтрації. Такі рівняння описують процес фільтрації неоднорідної рідини в неоднорідному середовищі. У даній праці для таких рівнянь досліджено задачу без початкових умов (задачу Фур'є). Встановлено коректність цієї задачі без припущень про поведінку розв'язку і зростання правої частини рівняння при $t \to -\infty$, а також деякі властивості розв'язків цієї задачі (обмеженість, періодичність та майже періодичність). Отримані тут результати близькі до результатів праць [3,4] (див., також, бібліографію там).

1. Формулювання задачі й основних результатів.

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega$ класу C^2, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$; $-\infty < T \leqslant +\infty$; $Q = \Omega \times (-\infty, T)$; $\Sigma = \partial\Omega \times (-\infty, T]$; $S = (-\infty, T]$.

Розглянемо задачу без початкових умов

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_i} \quad \text{в} \quad Q, \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35K60.

Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP) Міжнародного фонду "Відродження", грант N APU 061007

Припустимо, що $p(x)$ – вимірна на Ω функція, яка справджує одну з двох наступних умов: 1) $p(x)$ неперервна на $\overline{\Omega}$ та $\min\limits_{\overline{\Omega}} p(x) > 2$; 2) існують числа p_i, r_i і відкриті множини $G_i \subset \Omega, i = 1, 2, ..., m$, які містять скінченну кількість компонент з ліпшицевою межею і такі, що міра Лебега множини $\Omega \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{m} G_i$ дорівнює нулю, $2 < p_1 < p_2 < r_1 < p_3 < r_2 < p_4 < r_3 < ... < p_{m-1} < r_{m-2} < p_m < r_{m-1} < r_m < +\infty$, $r_i < np_i/(n - p_i)$, $i = 1, 2, ..., m - 1$, $p_i \leqslant p(x) \leqslant r_i$ для всіх $x \in G_i, i = 1, 2, ..., m$.

Позначимо $r = \operatorname{ess\,inf}\limits_{\Omega}\ p(x)$, $\quad s = \operatorname{ess\,sup}\limits_{\Omega}\ p(x)$.

Введемо потрібні нам функціональні простори ([2,3]). Через $\|f; X\|$ позначатимемо норму елемента f нормованого простору X. Під $L^{p(x)}(\Omega)$ розумітимемо узагальнений простір Лебега, який складається з вимірних функцій $f(x)$, $\quad x \in \Omega$, для яких $\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p(x)}\, dx < \infty$, і норма на ньому задається за правилом:

$$||f; L^{p(x)}(\Omega)|| = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int\limits_{\Omega} |f(x)/\lambda|^{p(x)}\, dx \leqslant 1 \right\}.$$

Такий простір є банаховим. Відмітимо, що при наших умовах на $p(x)$ маємо:
1) $\int\limits_{\Omega} |f(x)/\|f; L^{p(x)}(\Omega)\||^{p(x)}\, dx = 1$, якщо $0 < \|f; L^{p(x)}(\Omega)\| < +\infty$;
2) $\|f; L^2(\Omega)\| \leqslant C_0 \|f; L^{p(x)}(\Omega)\|$, де $C_0 > 0$ – стала, яка не залежить від f.

Позначимо $q(x) = p(x)/(p(x) - 1)$ для $x \in \Omega$. Тоді правильна нерівність Гельдера

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)g(x)|\, dx \leqslant (1 + 1/r - 1/s) \cdot ||f; L^{p(x)}|| \cdot ||g; L^{q(x)}||$$

для довільних $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ і $g \in L^{q(x)}(\Omega)$. Звідси випливає, що простір $\left(L^{p(x)}(\Omega)\right)'$ можна ототожнити з $L^{q(x)}(\Omega)$.

Через $W^{k,p(x)}(\Omega)\,(k \in \mathbb{N})$ позначимо простір функцій $f(x)$, $x \in \Omega$, таких, що $D^\alpha f \in L^{p(x)}(\Omega)$ для всіх $\alpha, |\alpha| \leqslant k$, з нормою $||f; W^{k,p(x)}(\Omega)|| = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} ||D^\alpha f; L^{p(x)}(\Omega)|| < \infty$, де $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ – мультиіндекс, $|\alpha| = |\alpha_1| + ... + |\alpha_n|$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$. Під $\overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega)$ розумітимемо замикання простору нескінченно диференційовних фінітних функцій $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою простору $W^{k,p(x)}(\Omega)$. Простори $W^{k,p(x)}(\Omega)$ і $\overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega)$ є банаховими, сепарабельними та рефлексивними просторами. Крім того, вкладення $\overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ є компактним і $||f; \overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega)|| = \sum\limits_{|\alpha| = k} ||D^\alpha f; L^{p(x)}(\Omega)||$ є нормою на $\overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega)$, яка еквівалентна введеній вище нормі. Відомо, що для кожного $g \in (\overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega))'$ існує єдина система функцій $g_\alpha \in L^{q(x)}(\Omega), |\alpha| \leqslant k$, така, що $g = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} D^\alpha g_\alpha$.

Через $L^r_{\mathrm{loc}}(S; \overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega))$ позначимо простір функцій $v(x,t)$, $(x,t) \in Q$, таких, що для майже всіх $t \in S$ $v(\cdot, t) \in \overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega)$ і $||v(\cdot, t); \overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega)|| \in L^r(a, b)$ для будь-яких скінченних $a, b \in S$, $a < b$.

Нехай $Q_{a,b} = \Omega \times (a,b)$, $a < b$. Під $\overset{o}{V}{}^k(Q_{a,b})$ розуміється простір, який складається з вимірних функцій $w : [a,b] \to \overset{o}{W}{}^{k,p(x)}(\Omega)$ зі скінченною нормою $\|w; \overset{o}{V}{}^k(Q_{a,b})\| = \sum\limits_{|\alpha|=k} \inf\{\lambda_\alpha > 0 : \iint\limits_{Q_{a,b}} |D^\alpha w/\lambda_\alpha|^{p(x)}\, dxdt \leqslant 1\}$. Через $\overset{o}{V}{}^k_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ позначимо простір вимірних функцій $w : S \to \overset{o}{W}{}^{k,p(x)}\,(\Omega)$, звуження яких на довільний скінченний відрізок $[a,b] \subset S$ належить простору $\overset{o}{V}{}^k(Q_{a,b})$.

Розглянемо також простір $L^{q(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, який складається з вимірних функцій $w(x,t)$, $(x,t) \in Q$, таких, що для будь яких чисел $a, b \in S, a < b$, звуження на $Q_{a,b}$ цих функцій належать $L^{q(x)}(Q_{a,b}) = \{f : ||f; L^{q(x)}(Q_{a,b})|| = \inf\{\lambda > 0 : \iint\limits_{Q_{a,b}} |f/\lambda|^{q(x)}\, dxdt \leqslant 1\} < \infty\}$. Скажемо, що $f_l \to f$ в $L^{q(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(\overset{o}{V}{}^k_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}))$ при $l \to \infty$, якщо $||f_l - f; L^{q(x)}(Q_{a,b})|| \to 0$ $(||f_l - f; \overset{o}{V}{}^k(Q_{a,b})|| \to 0)$ при $l \to \infty$ для будь-яких скінченних $a, b \in S, a < b$.

Через $C(S; L^2(\Omega))$ позначимо простір функцій, які визначені на S, приймають значення в $L^2(\Omega)$ і є неперервними на S за нормою $L^2(\Omega)$. Скажемо, що $v_l \to v$ в $C(S; L^2(\Omega))$, якщо для будь-яких $t_1, t_2 \in S,\ t_1 < t_2,\ \max\limits_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} ||v_l(t) - v(t); L^2(\Omega)|| \to 0$ при $l \to \infty$.

Під $C_b(S; L^2(\Omega))$ розумітимемо підпростір простору $C(S; L^2(\Omega))$, який складається з функцій, які обмежені на S за нормою $L^2(\Omega)$.

Означення 1. Нехай $f_i \in L^{q(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L^{r/(r-1)}(S; L^{q(x)}(\Omega)), i = 1, ..., n$. Узагальненим розв'язком задачі (1),(2) назвемо функцію u з простору $L^r_{\mathrm{loc}}(S; \overset{o}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega)) \cap \overset{o}{V}{}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C(S; L^2(\Omega))$, яка справджує інтегральну тотожність

$$\iint\limits_{Q} \left\{ -u\psi_t + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\} dxdt = \iint\limits_{Q} \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dxdt \tag{3}$$

для будь-яких $\psi \in C_0^\infty(Q)$.

Розглянемо питання про коректність задачі (1), (2), тобто про *існування, єдиність та неперервну залежність від правої частини рівняння узагальненого розв'язку.*

Під неперервною залежністю узагальненого розв'язку задачі (1), (2) від правої частини рівняння розумітимемо наступне: для будь-яких послідовностей $\{f_{i,l}\}_{l=1}^\infty \subset L^{q(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $i = 1, ..., n$, таких, що $f_{i,l} \to f_i$ в $L^{q(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ при $l \to +\infty, i = 1, ..., n$, відповідна послідовність $\{u_l\}$ збігається до u в $L^r_{\mathrm{loc}}(S; \overset{o}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega)) \bigcap \overset{o}{V}{}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \bigcap C(S; L^2(\Omega))$. Тут для кожного $l \in \mathbb{N}$ u_l – узагальнений розв'язок задачі, яка відрізняється від задачі (1), (2) тільки тим, що в правій частині рівняння (1) стоїть $f_{i,l}$ замість $f_i, i = 1, ..., n$.

Теорема. *Задача (1), (2) має єдиний узагальнений розв'язок і цей розв'язок неперервно залежить від правої частини рівняння. Крім того, для довільних чисел $\delta > 0, t_1, t_2 \in S, t_1 < t_2$, правильна оцінка*

$$\max_{[t_1,t_2]} \int\limits_{\Omega} |u(x,t)|^2\, dx + \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p(x)} dxdt \leqslant C_1 \delta^{-\frac{2}{r-2}} + C_2 \delta^{-\frac{2}{s-2}} +$$

$$+C_3 \max\left\{\sum_{i=1}^{n} ||f_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,t_2})||; \left(\sum_{i=1}^{n} ||f_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,t_2})||\right)^{\frac{r}{r-1}}\right\}, \qquad (4)$$

де C_1, C_2, C_3 – додатні сталі, які залежать тільки від n, r, s і Ω.

Властивості узагальненого розв'язку u задачі (1), (2) сформулюємо у вигляді наслідків 1-5.

Наслідок 1. *Нехай $||f_i; L^{q(x)}(Q)|| < \infty$, $i = 1, ..., n$. Тоді $u \in C_b(S; L^2(\Omega)) \bigcap \overset{o}{V}{}^1(Q)$ і для довільного $\tau \in \mathbb{R}$ справджується оцінка*

$$\sup_{t\in(-\infty,\tau]} \int_{\Omega} |u(x,t)|^2\, dx + \sum_{i=1}^{n} \iint_{Q_{-\infty,\tau}} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)} dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \max\left\{\sum_{i=1}^{n} ||f_i; L^{q(x)}(Q_{-\infty,\tau})||; \left(\sum_{i=1}^{n} ||f_i; L^{q(x)}(Q_{-\infty,\tau})||\right)^{\frac{r}{r-1}}\right\}, \qquad (5)$$

де C_3 – стала з (4).

Зауваження 1 При виконанні умов наслідку 1 маємо

$$\lim_{\tau\to-\infty} ||u(\cdot,\tau); L^2(\Omega)|| = 0, \qquad \lim_{\tau\to-\infty} ||u; \overset{o}{V}{}^1(Q_{\tau-1,\tau})|| = 0.$$

Це легко випливає з (5).

Наслідок 2. *Нехай $||f_i; L^{q(x)}(Q_{\tau-1,\tau})|| \leqslant C_4$ $\forall \tau \in S$, $i = 1, ..., n$, де $C_4 > 0$ – стала, яка не залежить від τ. Тоді $u \in C_b(S; L^2(\Omega))$ та правильна оцінка $||u; \overset{o}{V}{}^1(Q_{\tau-1,\tau})|| \leqslant C_5$, $\forall \tau \in S$, де C_5 – деяка додатна стала, яка не залежить від u.*

Наслідок 3. *Нехай $||f_i; L^{q(x)}(Q_{\tau-1,\tau})|| \to 0$ при $\tau \to -\infty$, $i = 1, ..., n$. Тоді $||u(\cdot,\tau); L^2(\Omega)|| \to 0$ при $\tau \to -\infty$; $||u; \overset{o}{V}{}^1(Q_{\tau-1,\tau})|| \to 0$ при $\tau \to -\infty$.*

Наслідок 4. *Нехай $T = +\infty$ та існує число $\sigma > 0$ таке, що $f_i(x, t+\sigma) = f_i(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $i = 1, ..., n$. Тоді $u(x, t+\sigma) = u(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, тобто u є періодичною функцією за змінною t.*

Означення 2. Множина $X \subset \mathbb{R}$ називається відносно щільною на $\mathbb{R}$, якщо існує $l > 0$ таке, що для довільного $a \in \mathbb{R}$ існує $\tau \in X$ таке, що $\tau \in [a, a+l]$.

Означення 3. Функція $v \in C(\mathbb{R}; B)$, де B – банахів простір, називається майже періодичною за Бором, якщо $\forall \varepsilon > 0$ множина $\{\sigma : \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} ||u(t+\sigma) - u(t); B|| \leqslant \varepsilon\}$ є відносно щільною на $\mathbb{R}$.

Означення 4. Функція $f \in L^{q(x)}_{\text{loc}}(\overline{Q})$ називається майже періодичною за Степановим за змінною t, якщо $\forall \varepsilon > 0$ множина $\{\sigma : \sup\limits_{\tau\in\mathbb{R}} ||f(x, t+\sigma) - f(x,t); L^{q(x)}(Q_{\tau-1,\tau})|| \leqslant \varepsilon\}$ є відносно щільною на $\mathbb{R}$.

Означення 5. Функція w називається майже періодичною за Степановим як елемент простору $\overset{o}{V}{}^1_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R})$, якщо вона належить цьому простору і $\forall \varepsilon > 0$ множина $\{\sigma : \sup\limits_{\tau} ||w(x, t+\sigma) - w(x,t); \overset{o}{V}{}^1(Q_{\tau-1,\tau})|| \leqslant \varepsilon\}$ є відносно щільною на $\mathbb{R}$.

Наслідок 5. *Нехай $T = +\infty$ і функції f_i, $i = 1, ..., n$, майже періодичні за Степановим як елементи простору $L^{q(x)}_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R})$ рівномірно по $i \in \{1, 2, ..., n\}$, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ множина $\left\{\sigma : \sup\limits_{\tau} \sum\limits_{i=1}^{n} ||f_i(x, t + \sigma) - f_i(x, t); L^{q(x)}(Q_{\tau-1,\tau})|| \leqslant \varepsilon\right\}$ є відносно щільною на $\mathbb{R}$.*

Тоді узагальнений розв'язок u задачі (1), (2) є майже періодичною функцією за Бором як елемент простору $C(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ і майже періодичною функцією за Степановим як елемент простору $\overset{o}{V}{}^1_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R})$.

2. Допоміжні твердження.

Встановимо деякі потрібні нам для доведення основних результатів допоміжні твердження.

Лема 1. *1) Нехай $v \in \overset{o}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega)$. Тоді*

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p(x)} dx \geqslant C_6 \cdot \min\{||v; L^2(\Omega)||^r; ||v; L^2(\Omega)||^s\},$$

де $C_6 > 0$ – стала, яка залежить тільки від n, r, s і Ω.

2) Нехай $w \in \overset{o}{V}{}^1(Q_{t_1,t_2})$. Тоді

$$\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{p(x)} dx \geqslant \frac{1}{n^s} \min\{||w; \overset{o}{V}{}^1(Q_{t_1,t_2})||^r; ||w; \overset{o}{V}{}^1(Q_{t_1,t_2}||^s\}.$$

Доведення. 1) Нагадаємо, що $||v; \overset{o}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega)|| = \sum\limits_{i=1}^{n} ||\frac{\partial v}{\partial x_i}; L^{p(x)}(\Omega)||$. Позначимо $\lambda_{i,0} = ||\frac{\partial v}{\partial x_i}; L^{p(x)}(\Omega)||$, $i = 0, 1, ..., n$; $M_0 = ||v; L^2(\Omega)||$; $M_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{i,0} \equiv ||v; \overset{o}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega)||$.

Нехай $\lambda_{k,0} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_{i,0}$. Очевидно, що $\lambda_{k,0} \leqslant ||v; \overset{o}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega)|| \leqslant n\lambda_{k,0}$. Якщо $\lambda_{k,0} = 0$, то потрібна нам нерівність очевидна. Припустимо, що $\lambda_{k,0} > 0$.

Маємо

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p(x)} dx \geqslant \int\limits_{\Omega} \left|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right|^{p(x)} dx = \int\limits_{\Omega} \lambda_{k,0}^{p(x)} \left|\frac{\partial v}{\partial x_k} / \lambda_{k,0}\right|^{p(x)} dx \geqslant$$

$$\geqslant \min\{\lambda_{k,0}^r; \lambda_{k,0}^s\} \geqslant \frac{1}{n^s} \min\{M_1^r; M_1^s\} \geqslant \frac{C_6}{n^s} \min\{M_0^r; M_0^s\} = C_7 \min\{M_0^r; M_0^s\}.$$

Тут ми врахували, що $\int\limits_{\Omega} |\frac{\partial v}{\partial x_k} / \lambda_{k,0}|^{p(x)} dx = 1$ і, на підставі теореми вкладення, $M_0 \leqslant C_8 M_1$, де $C_8 > 0$ – стала, яка залежить тільки від n, r, s та Ω.

2) Міркуючи аналогічно, як при доведенні першої частини, приходимо до потрібної оцінки.

Лема 2. *Нехай функції $v \in L^r_{\text{loc}}(S; \overset{o}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega))$, $g_i \in L^{r/r-1}_{\text{loc}}(S; L^{q(x)}(\Omega))$, $i = 0, 1, ..., n$, такі, що*

$$\iint\limits_{Q} \left\{-v\psi_t + g_0\psi + \sum_{j=1}^{n} g_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right\} dxdt = 0$$

для будь-яких $\psi \in C_0^\infty(Q)$.

Тоді $v \in C(S; L^2(\Omega))$ *і для будь-яких чисел* $t_1, t_2 \in S$, $t_1 < t_2$, *та довільної функції* $\theta \in C^1(S)$ *правильна рівність*

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega v^2(x,t_2)\theta(t_2)\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega v^2(x,t_1)\theta(t_1)\,dx -$$
$$-\frac{1}{2}\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} v^2\theta'\,dxdt + \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big\{ g_0 v + \sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial v}{\partial x_j}\Big\}\theta\,dxdt = 0.$$

Доведення цієї леми аналогічне до доведення леми 2 з праці [5].

Лема 3. *Нехай* u *– узагальнений розв'язок задачі (1), (2), а* $\tilde u$ *– узагальнений розв'язок задачі, яка відрізняється від задачі (1), (2) тільки тим, що в правій частині рівняння (1) стоять* $\tilde f_i$ *замість* $f_i, i = 1, ..., n$. *Тоді для будь-яких* $\delta > 0$, $t_1, t_2 \in S, t_1 < t_2$, *правильна оцінка*

$$\max_{[t_1,t_2]}\int\limits_\Omega |u(x,t) - \tilde u(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial(u-\tilde u)}{\partial x_i}\right|^{p(x)} dxdt \leqslant C_1\delta^{-\frac{2}{r-2}} + C_2\delta^{-\frac{2}{s-2}} +$$
$$+C_3 \max\left\{\sum_{j=1}^n ||f_j - \tilde f_j; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,t_2})||; \left(\sum_{j=1}^n ||f_j - \tilde f_j; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,t_2})||\right)^{\frac{r}{r-1}}\right\}, \qquad (6)$$

де C_1, C_2, C_3 *– додатні сталі, які залежать тільки від* n, r, s *і* Ω.

Доведення. Виберемо функцію (див. [3]) $\theta_1(t) \in C^1(\mathbb{R})$ з такими властивостями: $0 \leqslant \theta_1(t) \leqslant 1, \theta_1'(t) \geqslant 0$ на $\mathbb{R}, \theta_1(t) = 0$, якщо $t \in (-\infty; -1]$, $\theta_1(t) = \exp\{-1/(t+1)\}$, якщо $t \in (-1; -1/2]$, $\theta_1(t) \geqslant \exp\{-2\}$, якщо $t \in (-1/2; 0)$, $\theta_1(t) = 1$, якщо $t \in [0; +\infty)$. Очевидно, що

$$\sup_{\mathbb{R}} \theta_1'(t)\theta^{-\varkappa}(t) \leqslant C_9\,, \qquad (7)$$

де $0 < \varkappa < 1$, $C_9 > 0$ - стала, яка залежить тільки від $\varkappa$.

Віднімемо від інтегральної тотожності (3) для u таку ж тотожність для $\tilde u$. В результаті отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{ -(u-\tilde u)\psi_t + \sum_{i=1}^n \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left|\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\right|^{p(x)} \frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x_i} -$$
$$-\sum_{i=1}^n (f_i - \tilde f_i)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\Big\}\,dxdt = 0 \qquad (8)$$

для будь-яких $\psi \in C_0^\infty(Q)$.

Нехай δ, t_1, t_2 – довільні числа такі, що $\delta > 0, t_1, t_2 \in S, t_1 < t_2$. З (8) та з леми 2, взявши $\theta(t) = \theta_1\left(\frac{t-t_1}{\delta}\right)$ і $t_1 - \delta$ та s замість відповідно t_1 і t_2, де s – довільне число з проміжку $[t_1, t_2]$, для $w = u - \tilde u$ отримаємо

$$\int\limits_\Omega w^2(x,s)\,dx - \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} w^2\theta'\,dxdt + 2\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta\sum_{i=1}^n\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}-\right.$$

$$\left.-\left|\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\right)dxdt = 2\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}}\sum_{i=1}^n (f_i-\tilde f_i)\frac{\partial w}{\partial x_i}\theta\,dxdt. \tag{9}$$

Тут $\theta = \theta_1\left(\frac{t-t_1}{\delta}\right)$.

З леми 1.2 праці [4] маємо

$$\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta\sum_{i=1}^n\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}-\left|\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\right)dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} 2^{2-p(x)}\theta\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\right|^{p(x)}dxdt \geqslant 2^{2-s}\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}}\theta\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{p(x)}dxdt. \tag{10}$$

Використавши другу частину леми 1, отримаємо

$$\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}}\theta\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{p(x)}dxdt = \int\limits_{t_1-\delta}^{s}\theta\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{p(x)}dx\right)dt \geqslant$$

$$\geqslant C_{10}\int\limits_{t_1-\delta}^{s}\theta\min\{y^r(t);y^s(t)\}\,dt \geqslant C_{10}\int\limits_{S_1}\theta y^s\,dt + C_{10}\int\limits_{S_2}\theta y^r\,dt, \tag{11}$$

де $y(t) = ||w(\cdot,t);L^2(\Omega)||$, $S_1 = \{t\in[t_1-\delta,s] : y(t)\leqslant 1\}$, $S_2=\{t\in[t_1-\delta,s]:y(t)>1\}$.

Далі нам буде потрібна нерівність Юнга

$$ab \leqslant \varepsilon\cdot a^p + \varepsilon^{-1/(p-1)}\cdot p^{-q}(p-1)\cdot b^q$$

для довільних чисел $a\geqslant 0, b\geqslant 0, \varepsilon>0, p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Позначимо $S_{1,0} = S_1\bigcap[t_1-\delta,t_1], S_{2,0}=S_2\bigcap[t_1-\delta,t_1]$. Тоді, використовуючи нерівність Юнга та (7), отримаємо

$$\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} w^2\theta'\,dxdt = \int\limits_{t_1-\delta}^{t_1}\theta'\left(\int\limits_\Omega w^2\,dx\right)dt = \int\limits_{t_1-\delta}^{t_1}\theta' y^2(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{S_{1,0}}\theta' y^2(t)\,dt + \int\limits_{S_{2,0}}\theta' y^2(t)\,dt \leqslant \int\limits_{S_{1,0}}\theta'\theta^{-\frac{2}{s}}\theta^{\frac{2}{s}}y^2\,dt + \int\limits_{S_{2,0}}\theta'\theta^{-\frac{2}{r}}\theta^{\frac{2}{r}}y^2\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1\int\limits_{S_{1,0}}\theta y^s\,dt + C_{11}\varepsilon_1^{-\frac{2}{s-2}}\int\limits_{S_{1,0}}\left(\theta'\theta^{-\frac{2}{s}}\right)^{\frac{s}{s-2}}dt + \varepsilon_2\int\limits_{S_{2,0}}\theta y^r\,dt + C_{12}\varepsilon_2^{-\frac{2}{r-2}}\int\limits_{S_{2,0}}\left(\theta'\theta^{-\frac{2}{r}}\right)^{\frac{r}{r-2}}dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1\int\limits_{S_{1,0}}\theta y^s\,dt + \varepsilon_2\int\limits_{S_{2,0}}\theta y^r\,dt + C_{13}[\varepsilon_1\delta]^{-\frac{2}{s-2}} + C_{14}[\varepsilon_2\delta]^{-\frac{2}{r-2}}, \tag{12}$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ – довільні сталі, $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14} > 0$ – сталі, які залежать тільки від r і s.
На підставі нерівності Гельдера, маємо

$$\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \sum_{i=1}^{n} \theta(f_i - \tilde{f}_i) \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_{15} \sum_{i=1}^{n} ||(f_i - \tilde{f}_i)\theta^{\frac{1}{q(x)}}; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,s})|| \cdot \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \theta^{\frac{1}{p(x)}}; L^{p(x)}(Q_{t_1-\delta,s}) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant C_{15} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \theta^{\frac{1}{p(x)}}; L^{p(x)}(Q_{t_1-\delta,s}) \right\| \sum_{i=1}^{n} ||(f_i - \tilde{f}_i)\theta^{\frac{1}{q(x)}}; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,s})||, \tag{13}$$

де $C_{15} > 0$ – стала, яка залежить тільки від r і s.
Зауважимо, що

$$||(f_i - \tilde{f}_i)\theta^{\frac{1}{q(x)}}; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,s})|| = \inf\{\lambda_i > 0 : \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \left| \frac{f_i - \tilde{f}}{\lambda_i} \right|^{q(x)} \theta\, dxdt \leqslant 1\} \leqslant$$

$$\leqslant \inf \left\{ \lambda_i > 0 : \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \left| \frac{f_i - \tilde{f}}{\lambda_i} \right|^{q(x)} dxdt \leqslant 1 \right\} = ||f_i - \tilde{f}_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,s})||. \tag{14}$$

З (9), враховуючи (10)–(14) та вибираючи ε_1 і ε_2 досить малими, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} w^2(x,s)\, dx + C_{16} \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^{p(x)} dxdt \leqslant C_{17} \delta^{-\frac{2}{r-2}} +$$

$$+ C_{18} \delta^{-\frac{2}{s-2}} + C_{19} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \theta^{\frac{1}{p(x)}}; L^{p(x)}(Q_{t_1-\delta,s}) \right\| \sum_{i=1}^{n} ||f_i - \tilde{f}_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,s})||, \tag{15}$$

де $C_{16}, C_{17}, C_{18}, C_{19} > 0$ – сталі, які залежать тільки від n, r, s та Ω.
Позначимо

$$\overline{\lambda_i} = \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \theta^{\frac{1}{p(x)}}; L^{p(x)}(Q_{t_1-\delta,s}) \right\| = \inf \left\{ \lambda_i > 0 : \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} / \lambda_i \right|^{p(x)} \theta\, dxdt \leqslant 1 \right\}.$$

Нехай $\overline{\lambda_k} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \overline{\lambda_i} > 0$, бо в протилежному випадку потрібна нам нерівність очевидна.
Маємо

$$\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^{p(x)} dxdt \geqslant \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta \left| \frac{\partial w}{\partial x_k} \right|^{p(x)} dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta \left| \frac{\partial w}{\partial x_k} / \overline{\lambda_k} \right|^{p(x)} (\overline{\lambda_k})^{p(x)}\, dxdt \geqslant \min\{\overline{\lambda_k}^{r}; \overline{\lambda_k}^{s}\}. \tag{16}$$

Розглянемо два випадки: 1) $\overline{\lambda_k} \leqslant 1$; 2) $\overline{\lambda_k} > 1$. В першому випадку з (15) ми відразу отримаємо потрібну нам нерівність, а у другому випадку зробимо додатково ще одну оцінку, використавши нерівність Юнга,

$$\overline{\lambda_k} \cdot \sum_{i=1}^{n} ||f_i - \tilde{f}_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,s})|| \leqslant \varepsilon(\overline{\lambda_k})^r + C_{20} \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{r-1}} \left(\sum_{i=1}^{n} ||f_i - \tilde{f}_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,s})|| \right)^{\frac{r}{r-1}}, \quad (17)$$

де $\varepsilon > 0$ – довільна стала, $C_{20} > 0$ – стала, що залежить тільки від r.

На підставі (16) і (17), вибираючи ε досить малим, з (15) отримаємо те, що нам потрібно.

3. Доведення основних результатів .

Доведення теореми. Єдиність. Нехай u_1, u_2 – два узагальнені розв'язки задачі (1), (2). З леми 3 маємо

$$\int_\Omega |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2 \, dx \leqslant C_1 \delta^{-\frac{2}{r-2}} + C_2 \delta^{-\frac{2}{s-2}},$$

де $t \in S$, $\delta > 0$ – довільні. Спрямувавши в цій нерівності δ до $+\infty$, отримаємо $\int_\Omega |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2 \, dx = 0$. Звідси випливає єдиність узагальненого розв'язку задачі (1), (2).

Існування. Апріорну оцінку узагальненого розв'язку задачі (1), (2) здобудемо з оцінки (6) леми 3, взявши $\tilde{u} = 0$, $\tilde{f}_i \equiv 0$, $i = 1, 2, ..., n$.

Побудуємо послідовність функцій $\{u_k\}$, які певним чином збігаються до узагальненого розв'язку задачі (1), (2).

Нехай для визначеності T – скінченне число і $Q_k = \Omega \times (T-k, T)$, $\Sigma_k = \partial\Omega \times (T-k, T)$ для довільного натурального $k \in \mathbb{N}$.

Розглянемо сім'ю мішаних задач

$$\tilde{u}_{kt} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} \right|^{p(x)-2} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} \right) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_i} \quad \text{в} \quad Q_k, \quad (\tilde{1}_k)$$

$$\tilde{u}_k = 0 \text{ на } \Sigma_k, \quad \tilde{u}_k|_{t=T-k} = 0, \quad (\tilde{2}_k)$$

де $k \in \mathbb{N}$.

Узагальненим розв'язком задачі $(\tilde{1}_k), (\tilde{2}_k)$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ назвемо функцію $\tilde{u}_k \in L^r([T-k, T]; \overset{o}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega)) \bigcap \overset{o}{V}{}^1(Q_k) \bigcap C([T-k, T]; L^2(\Omega))$, яка справджує початкову умову $\tilde{u}_k|_{t=T-k} = 0$ та інтегральну тотожність

$$\iint_{Q_k} \left\{ -\tilde{u}_k \psi_t + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} \right|^{p(x)-2} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\} dx dt = 0$$

для довільних $\psi \in C_0^\infty(Q_k)$.

Існування та єдиність узагальненого розв'язку $\tilde{u}_k$ задачі $(\tilde{1}_k), (\tilde{2}_k)$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ випливає з праці [2]. Довизначимо $\tilde{u}_k$ нулем на $Q \backslash \overline{Q}_k$ і позначимо отриману функцію через u_k (k – довільне натуральне число). Очевидно, що u_k для довільного $k \in \mathbb{N}$ є узагальненим розв'язком задачі без початкових умов

$$u_{kt} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right|^{p(x)-2} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{i,k}}{\partial x_i} \quad \text{в} \quad Q, \quad (1_k)$$

$$u_k = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \quad (2_k)$$

де $f_{i,k}(x,t) = f_i(x,t)$, коли $(x,t) \in Q_k$ і $f_{i,k}(x,t) = 0$, коли $(x,t) \in Q \setminus Q_k$.

Задачі $(1_k), (2_k), k \in \mathbb{N}$, відрізняються від задачі (1), (2) тільки тим, що в рівнянні (1) замість f_i стоять $f_{i,k}$ $i = 1, ..., n$. Звідси та з леми 3 для довільних $\delta > 0$, $t_1, t_2 \in S$, $t_1 < t_2$, і будь-яких натуральних k, l, таких, що $k \geqslant T - t_1 + \delta$, $l \geqslant T - t_1 + \delta$, маємо

$$\max_{[t_1,t_2]} \int_\Omega |u_k(x,t) - u_l(x,t)|^2\, dx + \iint_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right|^{p(x)} dxdt \leqslant C_1 \delta^{-\frac{2}{r-2}} + C_2 \delta^{-\frac{2}{s-2}}. \quad (18)$$

Звідси випливає, що послідовність $\{u_k\}$ є фундаментальною за нормою простору $C([t_1, t_2]; L^2(\Omega)) \bigcap \overset{o}{V}(Q_{t_1,t_2})$. Справді, нехай $\varepsilon > 0$ – довільне як завгодно мале число. Виберемо число δ таким, щоб права частина нерівності (18) була менша за ε і зафіксуємо це число. Тоді для будь-яких k і l таких, що $k, l \geqslant k_0$, де $k_0 = [T - t_1 + \delta] + 1$, отримаємо, що ліва частина нерівності (18) менша за ε, що й потрібно було показати.

Отже, існує функція $u(x,t) \in \overset{o}{V}{}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \bigcap C(S; L^2(\Omega))$ така, що

$$u_k \to u \quad \text{в} \quad C(S; L^2(\Omega)), \quad (19)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{в} \quad L^{p(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad i = 1, 2, ..., n. \quad (20)$$

Покажемо, що

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{в} \quad L^r_{\mathrm{loc}}(S; L^{p(x)}(\Omega), \quad i = 1, 2, ..., n. \quad (21)$$

Виберемо довільне $i \in \{1, 2, ..., n\}$ та позначимо, для зручності, похідну $\frac{\partial(u_k - u)}{\partial x_i}$ через v, а норму $||v(\cdot,t); L^{p(x)}(\Omega)||$ – через $\lambda_0(t)$, тобто $\lambda_0(t) = \inf\{\lambda > 0 : \int\limits_\Omega |v(x,t)/\lambda|^{p(x)}\, dx \leqslant 1\}$. Нехай $\tilde{S} = \{t \in [t_1, t_2] : 0 < \lambda_0(t) < +\infty\}$, $\tilde{S}_1 = \{t \in \tilde{S} : \lambda_0(t) \leqslant 1\}$, $\tilde{S}_2 = \{t \in \tilde{S} : \lambda_0(t) > 1\}$.

Маємо

$$\iint_{Q_{t_1,t_2}} |v|^{p(x)}\, dxdt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_\Omega |v|^{p(x)}\, dx \right) dt = \int_{\tilde{S}} \left(\int_\Omega \left| \frac{v(x,t)}{\lambda_0(t)} \right|^{p(x)} \lambda_0^{p(x)}(t)\, dx \right) dt =$$
$$\int_{\tilde{S}_1} \left(\int_\Omega \left| \frac{v(x,t)}{\lambda_0(t)} \right|^{p(x)} \lambda_0^{p(x)}(t) dx \right) dt + \int_{\tilde{S}_2} \left(\int_\Omega \left| \frac{v(x,t)}{\lambda_0(t)} \right|^{p(x)} \lambda_0^{p(x)}(t) dx \right) dt \geqslant$$
$$\geqslant \int_{\tilde{S}_1} \lambda_0^s(t)\, dt + \int_{\tilde{S}_2} \lambda_0^r(t)\, dt = ||\lambda_0(t); L^s(\tilde{S}_1)||^s + ||\lambda_0(t); L^r(\tilde{S}_2)||^r \geqslant$$
$$\geqslant C_{21}^s ||\lambda_0(t); L^r(\tilde{S}_1)||^s + ||\lambda_0(t); L^r(\tilde{S}_2)||^r.$$

Тут ми врахували, що згідно з теоремами вкладення $||\lambda_0(t) : L^s(\tilde{S}_1)|| \geqslant C_{21} ||\lambda_0(t); L^r(\tilde{S}_1)||$, де $C_{21} = (t_2 - t_1)^{\frac{r-s}{rs}}$.

Звідси

$$||\lambda_0(t); L^r(t_1,t_2)||^r \leqslant C_{21}^{-r}\left(\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} |v|^{p(x)}\,dxdt\right)^{r/s} + \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} |v|^{p(x)}\,dxdt. \qquad (22)$$

З (20) і (22) випливає (21).

Тепер покажемо, що

$$\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \to \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{в} \quad L^{q(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad i=1,2,...,n. \qquad (23)$$

Введемо функцію

$$\chi_i(\theta) = \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + \theta\left(\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\right)\right|^{p(x)-2}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + \theta\left(\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\right)\right),\ \theta\in[0;1],\ i=1,2,...,n.$$

Використовуючи теорему Лагранжа, отримаємо

$$\left|\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_i} - \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} =$$

$$= \chi_i(1) - \chi_i(0) = \chi_i'(\theta^*) = (p(x)-1)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\right)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + \theta^*(x,t)\left(\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\right)\right|^{p(x)-2},$$

де $0\leqslant\theta^*(x,t)\leqslant 1$.

Звідси та з нерівності Гельдера (з $\frac{p(x)}{q(x)}$ замість $p(x)$) і обмеженості послідовностей $\{\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\}_{k=1}^{\infty}$, за нормою $L^{p(x)}(Q_{t_1,t_2})$ $i=1,...,n$, для скінченних $t_1,t_2\in S, t_1<t_2$, маємо

$$\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}}\left|\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q(x)} dxdt \leqslant$$

$$\leqslant (s-1)\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}}\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q(x)}\left(\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right)^{(p(x)-2)q(x)} dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_{22}\left\|\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}; L^{p(x)}(Q_{t_1,t_2})\right\|\cdot\left\|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| + \left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right|; L^{p(x)}(Q_{t_1,t_2})\right\| \leqslant$$

$$\leqslant C_{23}\left\|\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}; L^{p(x)}(Q_{t_1,t_2})\right\|, \qquad (24)$$

де $i\in\{1,...,n\}$, $C_{22}, C_{23}>0$ – сталі, яка не залежать від $k\in\mathbb{N}$, але можуть залежати від t_1 і t_2.

З (24) та (20) отримаємо (23). З (19), (23) та означення узагальненого розв'язку задачі $(1_k),(2_k)$ випливає, що u – узагальнений розв'язок задачі (1), (2).

Неперервна залежність. Нехай $\{f_{i,k}\}_{k=1}^{\infty}$, $i = 1, 2, ..., n$, – послідовності функцій з простору $L^{q(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \bigcap L^{\frac{r}{r-1}}_{\mathrm{loc}}(S; L^{q(x)}(\Omega))$ такі, що $f_{i,k} \to f_i$ в $L^{q(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ при $k \to \infty$.

Візьмемо довільне як завгодно мале число $\varepsilon > 0$ і будь-які скінченні числа $t_1, t_2 \in S$, $t_1 < t_2$. З леми 3 безпосередньо випливає

$$\max_{[t_1,t_2]} \int\limits_{\Omega} |u_k(x,t) - u(x,t)|^2\, dx + \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p(x)} dxdt \leqslant C_1 \delta^{-\frac{2}{r-2}} + C_2 \delta^{-\frac{2}{s-2}} +$$
$$+ C_3 \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} ||f_{i,k} - f_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,t_2})||; \left(\sum_{i=1}^{n} ||f_{i,k} - f_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,t_2})|| \right)^{\frac{r}{r-1}} \right\} \quad (25)$$

для довільного $\delta > 0$.

Виберемо значення δ настільки великим, щоб виконувалась нерівність

$$C_1 \delta^{-\frac{2}{r-2}} + C_2 \delta^{-\frac{2}{s-2}} < \varepsilon/2, \quad (26)$$

і зафіксуємо його. Тепер вибираємо $k_0 \in \mathbb{N}$ таким, щоб виконувалась нерівність

$$C_3 \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} ||f_{i,k} - f_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,t_2})||; \left(\sum_{i=1}^{n} ||f_{i,k} - f_i; L^{q(x)}(Q_{t_1-\delta,t_2})|| \right)^{\frac{r}{r-1}} \right\} < \varepsilon/2 \quad (27)$$

для всіх $k \geqslant k_0$.

З (25), (26), (27) випливає, що для всіх $k \geqslant k_0$

$$\max_{[t_1,t_2]} \int\limits_{\Omega} |u_k(x,t) - u(x,t)|^2\, dx + \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p(x)} dx < \varepsilon.$$

Звідси та з леми 1 маємо потрібне твердження.

Доведення наслідку 1. З оцінки (4), перейшовши спочатку до границі при $\delta \to +\infty$, а потім – при $t_1 \to +\infty$, отримаємо

$$\sup_{t \leqslant t_2} \int\limits_{\Omega} u(x,t)\, dx + \iint\limits_{Q_{-\infty,t_2}} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p(x)} dx \leqslant$$
$$\leqslant C_3 \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} ||f_i; L^{q(x)}(Q_{-\infty,t_2})||; \left(\sum_{i=1}^{n} ||f_i; L^{q(x)}(Q_{-\infty,t_2})|| \right)^{\frac{r}{r-1}} \right\}, \quad (28)$$

де $Q_{-\infty,t_2} = \Omega \times (-\infty, t_2)$.

Поклавши в (28) $t_2 = \tau$, отримаємо те, що нам потрібно.

Доведення наслідку 2. Використовуючи оцінку (4) та умову наслідку 2, легко отримаємо потрібне нам твердження.

Доведення наслідку 3. З оцінки (4) маємо

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x,\tau)\, dx + \iint\limits_{Q_{\tau-1,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p(x)} dxdt \leqslant C_1 \delta^{-\frac{2}{r-2}} + C_2 \delta^{-\frac{2}{s-2}} +$$

$$+C_3 \max\left\{\sum_{i=1}^{n}||f_i; L^{q(x)}(Q_{\tau-1-\delta,\tau})||; \left(\sum_{i=1}^{n}||f_i; L^{q(x)}(Q_{\tau-1-\delta,\tau})||\right)^{\frac{r}{r-1}}\right\} \tag{29}$$

для довільних $\tau \in S, \delta > 0$. Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне число. Виберемо значення $\delta > 0$ таким, щоб виконувалась нерівність

$$C_1\delta^{-\frac{2}{r-2}} + C_2\delta^{-\frac{2}{s-2}} < \varepsilon/2, \tag{30}$$

і зафіксуємо його. З того, що нам дано, випливає існування такого $\tau_0 \in S$, що для всіх $\tau \leqslant \tau_0$

$$C_3 \max\left\{\sum_{i=1}^{n}||f_i; L^{q(x)}(Q_{\tau-1-\delta,\tau})||; \left(\sum_{i=1}^{n}||f_i; L^{q(x)}(Q_{\tau-1-\delta,\tau})||\right)^{\frac{r}{r-1}}\right\} < \varepsilon/2.$$

Звідси та з (29) і (30) випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\tau_0 \in S$, що ліва частина (29) менша за ε, як тільки $\tau \leqslant \tau_0$. Це дає потрібне нам твердження.

Доведення наслідку 4. Очевидно, що функція $u(x, t+\sigma)$ є узагальненим розв'язком задачі (1), (2). Але оскільки задача (1), (2) має тільки один розв'язок, то $u(x, t+\sigma) = u(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$.

Доведення наслідку 5. Позначимо

$$F_\varepsilon = \left\{\sigma : \sup_\tau \sum_{i=1}^{n}||f_i(x,t+\sigma) - f_i(x,t); L^{q(x)}(Q_{\tau-1,\tau})|| \leqslant \varepsilon\right\},$$

$$U_\varepsilon = \left\{\sigma : \sup_\tau \left(\int_\Omega |u(x,\tau+\sigma) - u(x,\tau)|^2\,dx \;+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\iint_{Q_{\tau-1,\tau}} \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u(x,t+\sigma)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\right|^{p(x)} dxdt\right) \leqslant \varepsilon\right\}$$

для довільного $\varepsilon > 0$.

Нам достатньо довести, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ множина U_ε відносно щільна на $\mathbb{R}$. Для цього ми покажемо, що для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що $F_{\varepsilon_0} \subset U_\varepsilon$.

Нехай σ – поки що довільне число. З інтегральної тотожності (3) легко випливає, що функція $u(x,t+\sigma)$ є узагальненим розв'язком задачі, яка відрізняється від задачі (1), (2) тільки тим, що в правій частині рівняння стоять відповідно $f_i(x,t+\sigma)$ замість $f_i(x,t)$, $i = 1, ..., n$. З леми 3 маємо

$$\int_\Omega |u(x,t+\sigma) - u(x,t)|^2\,dx + \iint_{Q_{\tau-1,\tau}} \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u(x,t+\sigma)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\right|^{p(x)} dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1\delta^{-\frac{2}{r-2}} + C_2\delta^{-\frac{2}{s-2}} + C_3 \max\left\{\sum_{i=1}^{n}||f_i(x,t+\sigma) - f_i(x,t); L^{q(x)}(Q_{\tau-1-\delta,\tau})||;\right.$$

$$\left.\left(\sum_{i=1}^{n}||f_i(x,t+\sigma)-f_i(x,t);L^{q(x)}(Q_{\tau-1-\delta,\tau})||\right)^{\frac{r}{r-1}}\right\} \tag{31}$$

для довільного $\tau\in\mathbb{R}$.

Нехай $\varepsilon>0$ – довільне число. Виберемо значення $\delta>0$ цілим і настільки великим, щоб виконувалась нерівність

$$C_1\delta^{-\frac{2}{r-2}}+C_2\delta^{-\frac{2}{s-2}}<\varepsilon/2 \tag{32}$$

і зафіксуємо його.

Очевидно, що δ від τ не залежить. Нехай $\sigma\in F_{\varepsilon_0}$, де $\varepsilon_0>0$ таке, що

$$C_3\max\{(\delta+1)\varepsilon_0;[(\delta+1)\varepsilon_0]^{\frac{r}{r-2}}\}<\varepsilon/2. \tag{33}$$

З (32), (33) випливає, що у випадку, коли $\sigma\in F_{\varepsilon_0}$, то $\sigma\in U_\varepsilon$. Наслідок 5 доведено.

4. Деякі узагальнення.

Сформульовані твердження переносяться на випадок рівнянь високого порядку аналогічних до рівняння (1):

$$u_t+(-1)^m\sum_{|\alpha|=m}D^\alpha(|D^\alpha u|^{p(x)-2}D^\alpha u)=(-1)^m\sum_{|\alpha|=m}D^\alpha f_\alpha(x,t),\quad \text{в } Q, \tag{34}$$

$$D^\gamma u|_\Sigma=0,\quad |\gamma|\leqslant m-1. \tag{35}$$

Задача (34), (35) однозначно розв'язна в просторі $\overset{o}{V}{}^k_{\mathrm{loc}}(Q)\bigcap L^{r/r-1}_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega))$, якщо $f_\alpha(x,t)\in L^{q(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})\cap L^{r/(r-1)}(S;L^{q(x)}(\Omega))$ для всіх α таких, що $|\alpha|=m$; $2<r\leqslant s<\infty$ і виконується, наприклад, одна з таких умов: 1) $p(x)$ неперервна на $\overline{\Omega}$; 2) $m>n$; 3) $m=n$ і існують $p_1\in(2,\infty)$ і відкриті множини $G_1,G_2\subset\mathbb{R}^n$ такі, що $\overline{\Omega}\subset G_1\cup G_2$ і $p(x)\geqslant p_1$ для всіх $x\in G_1\bigcap\Omega$; 4) $m\leqslant n$ і існують числа p_i,r_i, $i=1,2,...,m$ та існують відкриті множини $G_i\subset\Omega, i=1,2,...,m$, які містять скінченну кількість компонент з ліпшицевою межею і такі, що міра Лебега множини $\Omega\setminus\bigcap_{i=1}^{m}G_i$ дорівнює нулю, $2<p_1<p_2<r_1<p_3<r_2<p_4<r_3<...<p_{m-1}<r_{m-2}<p_m<r_{m-1}<r_m<+\infty$, $r_i<np_i/(n-p_i)$, $i=1,2,...,m-1$, $p_i\leqslant p(x)\leqslant r_i$ для всіх $x\in G_i, i=1,2,...,m$.

1. Калашников А.С. *Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка* // Успехи мат. наук. – 1987. – Т.42, N 2. – С.135-176.
2. Самохин В.Н. *Об одном классе уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т.32, N 5.– С.643-651.
3. Kovacik O., Zilina and Jiri Rakosnik // Czechosl. Math. J. – 1991. – Vol.41, N 4. – P.592-618.
4. Бокало Н.М. *О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений* // В кн.: Труды семинара им. И.Г.Петровского. – Вып.14. – М.: Изд-во Моск. ун-та, – 1989, – С. 3-32.
5. Bokalo M.M., Sikorsky V.M. *The well-posedness of a Fourier problem for quasilinear parabolic equations of arbitrary order in unisotropic spaces* // Математичні студії. – 1997. – Т.8, N 1. – С.53-70.

Стаття надійшла до редколегії 21.05.1998

УДК 517.956

ПРО ОДИН ВАРІАНТ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ СТЕФАНА В КРИВОЛІНІЙНОМУ СЕКТОРІ

Г. І. Берегова, В. М. Кирилич

Beregova G. I., Kyrylych V. M. About one of a hyperbolic Stefan problem in a curvilinear sector. The problem with the unknown boundaries for the semilinear hyperbolic system of equations of the first order in the curvilinear sector is considered. Moreover, some characteristics outgoing from top of the sector get into domain. With the help of the characteristics method theorems of existence and uniqueness of the generalized solution for this problem is proved for local t.

У статті розглянуто задачу з невідомими границями для напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними, що є деяким узагальненням праці [1] на випадок виродження лінії задання початкових умов у точку та наявності у секторі характеристик, які виходять з його вершини. При дослідженні коректної розв'язності задачі використано методику праць [1-3]. Прикладні аспекти виникнення гіперболічних задач з невідомими границями (гіперболічні задачі Стефана) наведено в [1, 3-5] (див. відповідний огляд літератури).

1. Формулювання задачі. Розглянемо гіперболічну систему рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t;u), \quad i=\overline{1,n}, \tag{1}$$
$$(x,t)\in G_{u,T} := \{(x,t): 0<t\leqslant T,\ a_{u,1}(t)<x<a_{u,2}(t),\ a_{u,1}(0)=a_{u,2}(0)=0\},$$

причому $u_i : G_{u,T} \to \mathbb{R}$, а функції $a_{u,k}(t)$ теж невідомі і задовольняють системі рівнянь

$$\frac{da_{u,k}}{dt} = h_k(t;u), \qquad u=(u_1,\dots,u_n), \quad k=1,2. \tag{2}$$

Праві частини в (1) та (2) – це функціонали типу Вольтерра (умови на них див. в пункті 2).

Задамо поведінку характеристик системи (1), випущених з вершини сектора $G_{u,T}$:

$$\lambda_i(0,0) - a'_{u,1}(0) > 0,\ i=\overline{1,p+q}, \quad \lambda_i(0,0) - a'_{u,1}(0) < 0,\ i=\overline{p+q+1,n}, \tag{3}$$
$$\lambda_i(0,0) - a'_{u,2}(0) > 0,\ i=\overline{1,p}, \qquad \lambda_i(0,0) - a'_{u,2}(0) < 0,\ i=\overline{p+1,n}, p,q\in[0,n],$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35L60.

тобто q характеристик, які виходять з точки $(0,0)$ попадають в сектор. Позначимо

$$I_k^+ = \{i : \lambda_i(0,0) > a'_{u,k}(0)\}, \qquad I_k^- = \{i : \lambda_i(0,0) < a'_{u,k}(0)\}, \quad k = 1,2.$$

Задамо граничні умови

$$\begin{aligned} &u_i(a_{u,1}(t),t) = g_{i1}\big(t;\{u_{i'}(a_{u,1}(t),t)\}\big), \quad t \in [0,T],\ i \in I_1^+,\ i' \in I_1^-,\\ &u_i(a_{u,2}(t),t) = g_{i2}\big(t;\{u_{i'}(a_{u,2}(t),t)\}\big), \quad i \in I_2^-,\ i' \in I_2^+, \end{aligned} \tag{4}$$

тобто в правих частинах (4) присутні лише ті набори індексів i', яких немає в лівих частинах; $g_{i1} : [0,T] \times \mathbb{R}^{n-p-q} \to \mathbb{R}$, $g_{i2} : [0,T] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.

2. Додаткові припущення. Введемо метричний простір S_T "наборів" $v = \{u_i, a_{u,k}\}$ $(i = \overline{1,n}, k = 1,2)$, $u_i \in C(G_{u,T})$, $a_{u,k} \in C^1([0,T])$, $a_{u,1}(t) \leqslant a_{u,2}(t)$, з метрикою

$$\rho(v^1,v^2) = \max\big\{\max_{k,t}\big|a_{u^1,k}(t) - a_{u^2,k}(t)\big|, \max_{i,x,t}\big|\bar{u}_i^1(x,t) - \bar{u}_i^2(x,t)\big|\big\};$$

тут і надалі для довільної $r : [a,b] \to \mathbb{R}$ позначення $\bar{r}$ означає продовження r на $\mathbb{R}$ за формулами $\bar{r}(x) = r(a)$ $(x < a)$, $\bar{r}(x) = r(b)$ $(x > b)$.

Знайдемо значення функцій $u_i(0,0) \equiv u_{i,0}$, $(i = \overline{1,n})$ з граничних умов (4)

$$\begin{aligned} &u_i(0,0) = g_{i1}\big(0; u_{p+q+1,0},\dots,u_{n,0}\big), \quad i = \overline{1,p+q},\\ &u_i(0,0) = g_{i2}\big(0; u_{1,0},\dots,u_{p,0}\big), \quad i = \overline{p+1,n}. \end{aligned} \tag{5}$$

Для цього розв'яжемо систему

$$\begin{cases} u_{1,0} = g_{11}\Big(0; g_{p+q+1,2}\big(0;u_{1,0},\dots,u_{p,0}\big),\dots,g_{n,2}\big(0;u_{1,0},\dots,u_{p,0}\big)\Big),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ u_{p,0} = g_{p1}\Big(0; g_{p+q+1,2}\big(0;u_{1,0},\dots,u_{p,0}\big),\dots,g_{n,2}\big(0;u_{1,0},\dots,u_{p,0}\big)\Big). \end{cases} \tag{6}$$

Введемо вектор-функції

$$\begin{aligned} &G_1(x_{p+q+1},\dots,x_n) = \mathrm{col}\big(g_{11}(0;x_{p+q+1},\dots,x_n),\dots,g_{p1}(0;x_{p+q+1},\dots,x_n)\big),\\ &G_2(x_1,\dots,x_p) = \mathrm{col}\big(g_{p+q+1,2}(0;x_1,\dots,x_p),\dots,g_{n,2}(0;x_1,\dots,x_p)\big). \end{aligned}$$

Тут $G_1 : \mathbb{R}^{n-p-q} \to \mathbb{R}^p$, а $G_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{n-p-q}$, а композиція цих вектор-функцій $G_1 \circ G_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$. Якщо в просторі $\mathbb{R}^p$ з метрикою $\rho(x,y) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant p}|x_k - y_k|$ $(\forall x,y \in \mathbb{R}^p)$ виконується умова стиску

$$g_1 g_2 < 1, \tag{7}$$

де g_1 – стала Ліпшиця для G_1, а g_2 – для G_2, то існує єдиний розв'язок системи (6), який можна знайти методом простої ітерації [6, ст. 407].

Маючи розв'язок системи (6), знайдемо

$$\begin{cases} u_{p+1,0} = g_{p+1,2}\big(0;u_{1,0},\dots,u_{p,0}\big),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ u_{p+q,0} = g_{p+q,2}\big(0;u_{1,0},\dots,u_{p,0}\big),\\ u_{p+q+1,0} = g_{p+q+1,2}\big(0;u_{1,0},\dots,u_{p,0}\big),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ u_{n,0} = g_{n,2}\big(0;u_{1,0},\dots,u_{p,0}\big). \end{cases} \tag{8}$$

Отже, якщо виконується умова (7) та умови узгодження

$$\begin{cases} g_{p+1,1}\big(0; u_{p+q+1,0},\dots,u_{n,0}\big) = g_{p+1,2}\big(0; u_{1,0},\dots,u_{p,0}\big), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_{p+q,1}\big(0; u_{p+q+1,0},\dots,u_{n,0}\big) = g_{p+q,2}\big(0; u_{1,0},\dots,u_{p,0}\big), \end{cases} \tag{9}$$

то $u_{i,0}$ визначається єдиним чином з граничних умов (4). Звідси і з умов (2) та (3) випливає, що

$$\lambda_i(0,0) \neq h_k(0;u_0), \quad u_0 = \mathrm{col}(u_{1,0},\dots,u_{n,0}),\ k=1,2,\ i=\overline{1,n}. \tag{10}$$

Нехай виконуються такі припущення:

a) всі $\lambda_i(x,t)$ $(i=\overline{1,n})$ – дійсні, крім того, $\lambda_i \in C^1\big(\mathbb{R}\times[0,T]\big)$;

b) кожен функціонал $f_i(x,t;u)$ визначений і неперервний при $v \in S_T$, $(x,t)\in G_{u,T}$, а відповідно $h_k(t;u)$ – на $[0,T]\times S_T$, крім того, в деякому околі довільної точки з S_T ці функціонали задовольняють умові Ліпшиця по u та існує таке $M>0$, що якщо $u(.,.)$ задовольняє по x умові Ліпшиця зі сталою L, то $f_i(.,.;u)$ задовольняє по x умові Ліпшиця зі сталою ML;

c) функції g_{i1} визначені на $[0,T]\times\mathbb{R}^{n-p-q}$, g_{i2} – на $[0,T]\times\mathbb{R}^p$ і задовольняють по всіх змінних умові Ліпшиця зі сталою $Tg_0(T)$, де $g_0(T)$ обмежена при $T\in(0,+\infty)$;, а функції $g_{ik}\big(0;\{u_{i',0}\}\big)$ задовольняють умові (7) та умовам узгодження (9).

3. Існування узагальненого розв'язку задачі. Нехай $\varphi_i(\tau;x,t)$ – розв'язок задачі Коші $d\xi\,/\,d\tau = \lambda_i(\xi,\tau)$, $\xi(t)=x$, $(x,t)\in\overline{G}_{u,T}, i=\overline{1,n}$. Відповідні інтегральні криві позначимо через $Q_i(x,t)$. Нехай $t_i(x,t;u) := \min\{\tau : (\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\in G_{u,T}\}$. Очевидно, що $0\leqslant t_i(x,t;u)\leqslant t$. Якщо $t_i(x,t;u)>0$, то $\varphi_i(t_i(x,t;u);x,t) = a_{u,1}(t_i(x,t;u))$ або $\varphi_i(t_i(x,t;u);x,t) = a_{u,2}(t_i(x,t;u))$. Звідси випливає, що характеристика $Q_i(0,0)$, визначена лише у випадку $a'_{u,1}(0) < \lambda_i(0,0) < a'_{u,2}(0)$ (тобто $i=\overline{p+1,p+q}$), розділяє $G_{u,T}$ на дві компоненти $G^{i1}_{u,T}$ і $G^{i2}_{u,T}$. Очевидно, що при $\lambda_i(0,0) < a'_{u,1}(0)$ $\big(\lambda_i(0,0) > a'_{u,2}(0)\big)$ матимемо $G^{i1}_{u,T}=\emptyset$, $G^{i2}_{u,T}=G_{u,T}$ (відповідно $G^{i1}_{u,T}=G_{u,T}$, $G^{i2}_{u,T}=\emptyset$). Тоді при $t>0$ умова $\varphi_i(t_i(x,t;u);x,t) = a_{u,1}(t_i(x,t;u))$ $\big(\ \varphi_i(t_i(x,t;u);x,t) = a_{u,2}(t_i(x,t;u))\ \big)$ рівносильна тому, що $(x,t)\in G^{i1}_{u,T}$ (відповідно $(x,t)\in G^{i2}_{u,T}$).

Припускаючи, що в системі (1) функції u_i неперервно-диференційовні і

$$\lambda_i(a_{u,k}(t),t) \neq h_k(t;u), \quad k=1,2,\ i=\overline{1,n} \tag{11}$$

та інтегруючи (1) вздовж характеристик [1-3], приходимо до системи інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x,t) = \omega_i(x,t;u) + \int\limits_{t_i(x,t;u)}^{t} f_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u\big)d\tau,\ i=\overline{1,n},\ (x,t)\in G_{u,T}, \tag{12}$$

де

$$\omega_i(x,t;u) = \begin{cases} g_{i1}\big(t_i(x,t;u); u_{p+q+1}(a_{u,1}(t_i(x,t;u)), t_i(x,t;u)), \\ \dots, u_n(a_{u,1}(t_i(x,t;u)), t_i(x,t;u))\big), \quad \text{при } (x,t)\in G^{i1}_{u,T}, \\ g_{i2}\big(t_i(x,t;u); u_1(a_{u,2}(t_i(x,t;u)), t_i(x,t;u)), \\ \dots, u_p(a_{u,2}(t_i(x,t;u)), t_i(x,t;u))\big), \quad \text{при } (x,t)\in G^{i2}_{u,T}. \end{cases} \tag{13}$$

Означення. *Узагальненим розв'язком задачі (1)-(4) назвемо набір $v \in S_T$ функцій, які задовольняють умові (11) та системам рівнянь (2), (12).*

Теорема. *Якщо виконуються припущення пункту 2, то для деякого $\varepsilon > 0$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)-(4) при $t \in [0, \varepsilon]$.*

Доведення. Виберемо довільне $\varepsilon \in (0, T]$, $\alpha > 0$, δ, $\sigma \geqslant 1$ і позначимо через $S = S_{\varepsilon,\alpha,\delta,\sigma}$ підмножину S_ε, що складається з наборів $v = \{u_i, a_{u,k}\}$, для яких виконуються такі умови:
1) функції $\big(a_{u,k}(t) - h_k(0; u_0)t\big)$ задовольняють умові Ліпшиця зі сталою α;
2) функції u_i задовольняють умові Ліпшиця по x зі сталою δ;
3) якщо $(x_j, t_j) \in G_{u,\varepsilon}$, $j = 1, 2$, причому $t_1 \neq t_2$ та

$$\left|\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} - h_k(0; u_0)\right| \leqslant \alpha, \quad |x_j - h_k(0; u_0)t_j| \leqslant \alpha t_j, \quad j = 1, 2, \tag{14}$$

а $i \in I_1^- \cup I_2^+$, то $|u_i(x_2, t_2) - u_i(x_1, t_1)| \leqslant \sigma |t_2 - t_1|$.

Множина S не порожня, якщо δ і σ достатньо великі. Дійсно, позначимо $u_{i,0\varepsilon}(x, t) = u_{i,0}$, $a_{u_{0\varepsilon},k}(t) = h_k(0; u_0)t$, $t \in [0, \varepsilon]$, $v_{0\varepsilon} = \{u_{i,0\varepsilon}, a_{u_{0\varepsilon},k}\}$,. Тоді $v_{0\varepsilon} \in S$ (у цьому можна переконатись безпосередньою перевіркою умов 1)-3)). Крім того, множина S замкнена в S_ε.

На S визначимо оператор A так: нехай $v \in S$, тоді $Av = \{A_i u, a_{Au,k}\}$, де $A_i u : G_{Au,\varepsilon} \to \mathbb{R}$, причому $G_{Au,\varepsilon}$ обмежена з боків лініями

$$a_{Au,k}(t) := \int_0^t h_k(\tau; u)\, d\tau, \quad k = 1, 2,\ 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \tag{15}$$

а значення функції $A_i u$ даються формулою

$$(A_i u)(x, t) = \omega_i(x, t; \tilde{A}u) + \int_{t_i(x,t;\tilde{A}u)}^{t} f_i\big(\varphi_i(\tau; x, t), \tau; \tilde{A}u\big) d\tau, \quad i = \overline{1, n}, \quad (x, t) \in G_{Au,\varepsilon}, \tag{16}$$

де $\tilde{A}u = \{\tilde{A}_i u\}$, а $\tilde{A}_i u$ – звуження функції $\bar{u}_i$ на $G_{Au,\varepsilon}$. Очевидно, що $t_i(x, t; \tilde{A}u) = t_i(x, t; Au)$.

З неперервності заданих функцій та функціоналів випливає, що коли $\varepsilon_0, \alpha_0 (> 0)$ достатньо малі, то при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, 0 < \alpha \leqslant \alpha_0$ в S задовольняється співвідношення (11) і тому визначення оператора A має сенс. Крім того, при $v \in S, (x, t) \in G_{u,\varepsilon}$ справедливі рівномірні оцінки $|f_i(x, t; u)| \leqslant F$, $|h_k(t; u)| \leqslant H$, $|\lambda_i(x, t)| \leqslant \Lambda$, $|\lambda_i(a_{Au,k}(t), t) - h_k(t; u)| > \gamma > 0$, причому функціонали f_i задовольняють за u та за x, функціонали h_k – за u, функції λ_i – за x, та функції g_{ik} – за всіма аргументами умові Ліпшиця зі сталими f_0, Mp, h_0, λ_0 і $\varepsilon g_0(\varepsilon)$ відповідно.

Далі будемо користуватися наслідком з умови Ліпшиця для λ_i :

$$\big|\varphi_i(\tau; x_1, t) - \varphi_i(\tau; x_2, t)\big| \leqslant |x_1 - x_2| e^{\lambda_0 |t - \tau|}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{17}$$

Встановимо умови, при яких оператор A відображає S в себе, тобто якщо $v \in S$, то для Av виконуються 1)–3).

1. Оскільки для u виконується умова 1), то $\forall t_j \in [0, \varepsilon]$, $j = 1, 2$ маємо

$$\big|a_{Au,k}(t_2) - a_{Au,k}(t_1) - h_k(0; u_0)(t_2 - t_1)\big| = \Big|\int_0^{t_2} h_k(\tau; u) d\tau - \int_0^{t_1} h_k(\tau; u) d\tau -$$

$$-h_k(0;u_0)(t_2-t_1)\Big| = \Big|\int\limits_{t_1}^{t_2} h_k(\tau;u)d\tau - h_k(0;u_0)(t_2-t_1)\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{da_{u,k}(\tau)}{d\tau}d\tau - h_k(0;u_0)(t_2-t_1)\Big| = \big|a_{u,k}(t_2) - a_{u,k}(t_1) - h_k(0;u_0)(t_2-t_1)\big| \leqslant \alpha|t_2-t_1|.$$

Отже, умова 1) для Av виконується.

2. Розглянемо різні випадки:
a) $(x_j,t) \in G^{i1}_{u,\varepsilon}$ або $G^{i2}_{u,\varepsilon}$ одночасно $(j=1,2)$. Нехай для визначеності $(x_j,t) \in G^{i1}_{u,\varepsilon}(i=\overline{1,p+q})$ і $x_1 < x_2$, тоді $t_i(x_1,t;u) > t_i(x_2,t;u)$. Використовуючи (16) і позначення $\Delta\Phi_j = \Phi_1 - \Phi_2$, маємо

$$\big|\Delta(A_iu)(x_j,t)\big| \leqslant \int\limits_{t_i(x_1,t;Au)}^{t} \big|\Delta f_i(\varphi_i(\tau;x_j,t),\tau;\tilde{A}u)\big|d\tau + \int\limits_{t_i(x_2,t;Au)}^{t_i(x_1,t;Au)} \big|f_i(\varphi_i(\tau;x_1,t),\tau;\tilde{A}u)\big|d\tau +$$

$$+\Big|\Delta g_{i1}\big(t_i(x_j,t;Au);\big(\tilde{A}_{p+q+1}u\big)\big(a_{Au,1}(t_i(x_j,t;Au)),t_i(x_j,t;Au)\big),\ldots$$

$$\ldots,\big(\tilde{A}_nu\big)\big(a_{Au,1}(t_i(x_j,t;Au)),t_i(x_j,t;Au)\big)\big)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon M\delta\big|\Delta\varphi_i(\tau;x_j,t)\big| + F\big|\Delta t_i(x_j,t;Au)\big| + \varepsilon g_0(\varepsilon)\sigma\big|\Delta t_i(x_j,t;Au)\big|.$$

Оскільки ([2])

$$\big|\Delta t_i(x_j,t;Au)\big| = \big|t_i(x_2,t;Au) - t_i(x_1,t;Au)\big| \leqslant \Big|\frac{\partial t_i(\theta,t;Au)}{\partial\theta}\Big||x_2-x_1| =$$

$$= \left|\frac{\exp\left(\int\limits_{t_i(\theta,t;Au)}^{t} \lambda'_{i\theta}\big(\varphi_i(\sigma;\theta,t),\sigma\big)\,d\sigma\right)}{\lambda_i\big(a_{Au,1}(t_i(\theta,t;Au)),t_i(\theta,t;Au)\big) - a'_{Au,1}(t_i(\theta,t;Au))}\right||\Delta x_j| \leqslant \frac{1}{\gamma}e^{\lambda_0\varepsilon}|\Delta x_j|, \qquad (18)$$

то враховуючи (17), отримаємо

$$\big|\Delta(A_iu)(x_j,t)\big| \leqslant \Big(\varepsilon M\delta + \big(F+\varepsilon g_0(\varepsilon)\sigma\big)\frac{1}{\gamma}\Big)e^{\lambda_0\varepsilon}|\Delta x_j|.$$

Таким чином, якщо

$$\Big(\varepsilon_0 M\delta + \big(F+\varepsilon_0 g_0(\varepsilon_0)\sigma\big)\frac{1}{\gamma}\Big)e^{\lambda_0\varepsilon_0} \leqslant \delta б, \qquad (19)$$

то для Av виконується умова 2).

Аналогічний результат отримаємо, коли $(x,t) \in G^{i2}_{u,\varepsilon}$, $i=\overline{p+1,n}$.

b) $(x_1,t) \in G^{i1}_{u,\varepsilon}$, $(x_2,t) \in G^{i2}_{u,\varepsilon}$, $i=\overline{p+1,p+q}$ (при інших i цей випадок збігається з випадком а)). Нехай для визначеності $x_1 < x_2$, $t_i(x_1,t;Au) > t_i(x_2,t;Au)$. Тоді (див. а)):

$$\big|\Delta(A_iu)(x_j,t)\big| \leqslant \Big(\varepsilon M\delta + F\frac{1}{\gamma}\Big)e^{\lambda_0\varepsilon}|\Delta x_j| +$$

$$+\Big|g_{i1}\big(t_i(x_1,t;Au);\big(\tilde{A}_{p+q+1}u\big)\big(a_{Au,1}(t_i(x_1,t;Au)),t_i(x_1,t;Au)\big),\ldots$$

$$\ldots,(\tilde{A}_n u)\big(a_{Au,1}(t_i(x_1,t;Au)),t_i(x_1,t;Au)\big)\big)-$$
$$-g_{i2}\big(t_i(x_2,t;Au);(\tilde{A}_1 u)\big(a_{Au,2}(t_i(x_2,t;Au)),t_i(x_2,t;Au)\big),\ldots$$
$$\ldots,(\tilde{A}_p u)\big(a_{Au,2}(t_i(x_2,t;Au)),t_i(x_2,t;Au)\big)\big)\Big| \leqslant \Big(\varepsilon M\delta + F\frac{1}{\gamma}\Big)e^{\lambda_0\varepsilon}|\Delta x_j|+$$
$$+\Big|g_{i1}\big(t_i(x_2,t;Au);(\tilde{A}_{p+q+1}u)\big(a_{Au,1}(t_i(x_2,t;Au)),t_i(x_2,t;Au)\big),\ldots$$
$$\ldots,(\tilde{A}_n u)\big(a_{Au,1}(t_i(x_2,t;Au)),t_i(x_2,t;Au)\big)\big)-$$
$$-g_{i1}\big(t_i(x_3,t;Au);(\tilde{A}_{p+q+1}u)\big(a_{Au,1}(t_i(x_3,t;Au)),t_i(x_3,t;Au)\big),\ldots$$
$$\ldots,(\tilde{A}_n u)\big(a_{Au,1}(t_i(x_3,t;Au)),t_i(x_3,t;Au)\big)\big)\Big|+$$
$$+\Big|g_{i2}\big(t_i(x_3,t;Au);(\tilde{A}_1 u)\big(a_{Au,2}(t_i(x_3,t;Au)),t_i(x_3,t;Au)\big),\ldots$$
$$\ldots,(\tilde{A}_p u)\big(a_{Au,2}(t_i(x_3,t;Au)),t_i(x_3,t;Au)\big)\big)-$$
$$-g_{i2}\big(t_i(x_2,t;Au);(\tilde{A}_1 u)\big(a_{Au,2}(t_i(x_2,t;Au)),t_i(x_2,t;Au)\big),\ldots$$
$$\ldots,(\tilde{A}_p u)\big(a_{Au,2}(t_i(x_2,t;Au)),t_i(x_2,t;Au)\big)\big)\Big| \leqslant$$
$$\Big(\text{тут } (x_3,t_3)\in Q_i(0,0), \text{тоді } \big(a_{Au,j}(t_i(x_3,t;Au)),t_i(x_3,t;Au)\big)=(0,0)\Big)$$
$$\leqslant \Big(\varepsilon M\delta + F\frac{1}{\gamma}\Big)e^{\lambda_0\varepsilon}|\Delta x_j| + \varepsilon g_0(\varepsilon)\sigma\Big(|t_i(x_1,t;Au)-t_i(x_3,t;Au)|+|t_i(x_3,t;Au)-$$
$$-t_i(x_2,t;Au)|\Big) \leqslant \Big(\varepsilon M\delta + F\frac{1}{\gamma}\Big)e^{\lambda_0\varepsilon}|\Delta x_j| + \varepsilon g_0(\varepsilon)\sigma\frac{1}{\gamma}e^{\lambda_0\varepsilon}\big(|x_1-x_3|+|x_3-x_2|\big) \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\varepsilon M\delta + \big(F+\varepsilon g_0(\varepsilon)\sigma\big)\frac{1}{\gamma}\Big)e^{\lambda_0\varepsilon}|\Delta x_j|.$$

Отже, виконання умови 2) для Av забезпечується умовою (19).

3. Нехай $(x_j,t_j)\in G_{Au,\varepsilon}$, $j=1,2$, причому $t_1<t_2$ і виконуються умови (14), а $i\in I_1^-\cup I_2^+$. Тоді отримаємо ($k=2, i\in I_2^+$)

$$\big|(A_i u)(x_1,t_1)-(A_i u)(x_2,t_2)\big| \leqslant$$
$$\leqslant \Big|\int\limits_{t_i(x_1,t_1;Au)}^{t_1}\big|f_i(\varphi_i(\tau;x_1,t_1),\tau;\tilde{A}u)\big|d\tau - \int\limits_{t_i(x_2,t_2;Au)}^{t_2}\big|f_i(\varphi_i(\tau;x_2,t_2),\tau;\tilde{A}u)\big|d\tau\Big|+$$
$$+\Big|g_{i1}\big(t_i(x_1,t_1;Au);(\tilde{A}_{p+q+1}u)\big(a_{Au,1}(t_i(x_1,t_1;Au)),t_i(x_1,t_1;Au)\big),\ldots,$$
$$\ldots,(\tilde{A}_n u)\big(a_{Au,1}(t_i(x_1,t_1;Au)),t_i(x_1,t_1;Au)\big)\big)-$$
$$-g_{i1}\big(t_i(x_2,t_2;Au);(\tilde{A}_{p+q+1}u)\big(a_{Au,1}(t_i(x_2,t_2;Au)),t_i(x_2,t_2;Au)\big),\ldots,$$
$$\ldots,(\tilde{A}_n u)\big(a_{Au,1}(t_i(x_2,t_2;Au)),t_i(x_2,t_2;Au)\big)\big)\Big| \leqslant F|t_2-t_1|+$$
$$+\varepsilon M\delta \max_{0\leqslant\tau\leqslant t_1}\big|\varphi_i(\tau;x_1,t_1)-\varphi_i(\tau;x_2,t_2)\big| + \big(F+\varepsilon g_0(\varepsilon)\sigma\big)\big|t_i(x_2,t_2;Au)-t_i(x_1,t_1;Au)\big|.$$

Враховуючи (14), маємо

$$|x_2-x_1|\leqslant(\alpha+H)|t_2-t_1|;$$

$$\big|t_i(x_2,t_2;Au)-t_i(x_1,t_1;Au)\big| \leqslant \big|t_i(x_1,t_1;Au)-t_i(x_1,t_2;Au)\big|+$$

$$+\big|t_i(x_1,t_2;Au)-t_i(x_2,t_2;Au)\big| \leqslant \left|\frac{\partial t_i(x_1,\eta;Au)}{\partial\eta}\right||t_2-t_1|+\left|\frac{\partial t_i(\theta,t_2;Au)}{\partial\theta}\right||x_2-x_1| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{\lambda_i(x_1,\eta)\exp\left(\int\limits_{t_i(x_1,\eta;Au)}^{\eta}\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x_1,\eta),\sigma)\,d\sigma\right)}{\lambda_i\big(a_l(t_i(x_1,\eta;Au)),t_i(x_1,\eta;Au)\big)-a'_l(t_i(x_1,\eta;Au))}\right||t_2-t_1|+$$

$$+\frac{\left|\exp\left(\int\limits_{t_i(\theta,t_2;Au)}^{t_2}\lambda'_{i\theta}(\varphi_i(\sigma;\theta,t_2),\sigma)\,d\sigma\right)\right||x_2-x_1|}{\big|\lambda_i\big(a_l(t_i(\theta,t_2;Au)),t_i(\theta,t_2;Au)\big)-a'_l(t_i(\theta,t_2;Au))\big|} \leqslant \frac{1}{\gamma}e^{\lambda_0\varepsilon}(\Lambda+\alpha+H)|t_2-t_1|$$

(тут $l=1$ при $(x_1,\eta)\in G^{i1}_{Au,\varepsilon}$, $l=2$ при $(x_1,\eta)\in G^{i2}_{Au,\varepsilon}$, для (θ,t_2) аналогічно);

$$\big|\varphi_i(\tau;x_2,t_2)-\varphi_i(\tau;x_1,t_1)\big| \leqslant \big|\varphi_i(\tau;x_2,t_2)-\varphi_i(\tau;x_2,t_1)\big|+$$

$$+\big|\varphi_i(\tau;x_2,t_1)-\varphi_i(\tau;x_1,t_1)\big| \leqslant \left|\frac{\partial\varphi_i(\tau;x_2,\eta)}{\partial\eta}\right||t_2-t_1|+\left|\frac{\partial\varphi_i(\tau;\theta,t_1)}{\partial\theta}\right||x_2-x_1| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\lambda_i(x_2,\eta)\exp\left(\int\limits_{\tau}^{\eta}\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x_2,\eta),\sigma)\,d\sigma\right)\right||t_2-t_1|+$$

$$+\left|\exp\left(\int\limits_{\tau}^{t_1}\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;\theta,t_1),\sigma)\,d\sigma\right)\right||x_2-x_1| \leqslant e^{\lambda_0\varepsilon}(\Lambda+\alpha+H)|t_2-t_1|.$$

Тоді

$$\big|(A_iu)(x_1,t_1)-(A_iu)(x_2,t_2)\big| \leqslant \left(F+\Big(\frac{1}{\gamma}(F+\varepsilon g_0(\varepsilon)\sigma)+\varepsilon M\delta\Big)(\Lambda+\alpha+H)e^{\lambda_0\varepsilon}\right)|t_2-t_1|.$$

Отже, якщо

$$F+\Big(\frac{1}{\gamma}(F+\varepsilon_0 g_0(\varepsilon_0)\sigma)+\varepsilon_0 M\delta\Big)(\Lambda+\alpha_0+H)e^{\lambda_0\varepsilon_0} \leqslant \sigma, \tag{20}$$

то оператор Av володіє властивістю 3).

Припустимо, що виконуються всі наведені умови, які забезпечують включення $AS\subset S$. Встановимо, коли відображення A буде стисним. Нехай $v^j\in S$ $(j=1,2)$ і $\rho(v^1,v^2)=\rho$. Тоді

$$\big|\Delta a_{Au^j,k}(t)\big| \leqslant \int\limits_0^t \big|\Delta h_k(\tau;u^j)\big|d\tau \leqslant \varepsilon h_0\rho, \quad 0\leqslant t\leqslant\varepsilon.$$

Визначимо також

$$\rho(\tilde{A}u^1,\tilde{A}u^2)=\max\{\max_{k,t}\big|a_{Au^1,k}(t)-a_{Au^2,k}(t)\big|,\max_{i,x,t}\big|\overline{\tilde{A}_iu^1}(x,t)-\overline{\tilde{A}_iu^2}(x,t)\big|\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\{\varepsilon h_0\rho,\rho(1+\delta),\rho\big(1+\delta\varepsilon h_0\big)\}=\rho\max\{1+\delta,1+\delta\varepsilon h_0\}. \tag{21}$$

Враховуючи означення метрики в S_T, отримаємо

$$\rho(Av^1,Av^2)=\max\{\varepsilon h_0\rho,\max_{i,x,t}\big|\Delta\overline{(Au^j)}_i(x,t)\big|\}.$$

Якщо $(x,t)\in G_{Au^1,\varepsilon}\cap G_{Au^2,\varepsilon}$ і для визначеності $t_i(x,t;Au^1)<t_i(x,t;Au^2)$, $k=1$, то

$$\begin{gathered}
\left|\Delta\overline{(Au^j)_i}(x,t)\right| = \left|\Delta(Au^j)_i(x,t)\right| \leqslant \left|\Delta\int\limits_{t_i(x,t;Au^j)}^{t} f_i(\varphi(\tau;x,t),\tau;\tilde{A}u^j)d\tau\right| + \\
+\Big|\Delta g_{i1}\big(t_i(x,t;Au^j);\big(\tilde{A}_{p+q+1}u^j\big)\big(a_{Au^j,1}(t_i(x,t;Au^j)),t_i(x,t;Au^j)\big),\ldots, \\
\ldots,\big(\tilde{A}_n u^j\big)\big(a_{Au^j,1}(t_i(x,t;Au^j)),t_i(x,t;Au^j)\big)\big)\Big| \leqslant F\left|t_i(x,t;Au^2)-t_i(x,t;Au^1)\right| + \\
+\varepsilon f_0\rho(\tilde{A}u^1,\tilde{A}u^2) + \Big|\Delta g_{i1}\big(t_i(x,t;Au^1);\big(\tilde{A}_{p+q+1}u^1\big)\big(a_{Au^j,1}(t_i(x,t;Au^1)),t_i(x,t;Au^1)\big),\ldots, \\
\ldots,\big(\tilde{A}_n u^1\big)\big(a_{Au^j,1}(t_i(x,t;Au^1)),t_i(x,t;Au^1)\big)\big)\Big| + \qquad (22) \\
+\Big|\Delta g_{i1}\big(t_i(x,t;Au^j);\big(\tilde{A}_{p+q+1}u^j\big)\big(a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^j)),t_i(x,t;Au^j)\big),\ldots, \\
\ldots,\big(\tilde{A}_n u^j\big)\big(a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^j)),t_i(x,t;Au^j)\big)\big)\Big| \leqslant F\left|t_i(x,t;Au^2)-t_i(x,t;Au^1)\right| + \\
+\varepsilon f_0\rho(\tilde{A}u^1,\tilde{A}u^2) + \varepsilon g_0(\varepsilon)\delta\left|a_{Au^1,1}(t_i(x,t;Au^1)) - a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^1))\right| + \\
+\varepsilon g_0(\varepsilon)\max\Big\{\max_{i,x,t}\left|\Delta t_i(x,t;Au^j)\right|;\ \max_{\substack{i,x,t,\\ p+g<l\leqslant n}}\left|\Delta\tilde{A}_l u^j\big)\big(a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^j)),t_i(x,t;Au^j)\big)\big)\right|\Big\}.
\end{gathered}$$

З того, що

$$\lambda_i(a_{Au^1,1}(t),t) = \frac{a_{Au^1,1}(t_i(x,t;Au^1)) - a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^2))}{t_i(x,t;Au^1)-t_i(x,t;Au^2)},$$

випливає оцінка

$$\begin{gathered}
\left|\lambda_i(a_{Au^1,1}(t),t)\big(t_i(x,t;Au^1)-t_i(x,t;Au^2)\big)\right| \leqslant \left|a_{Au^1,1}(t_i(x,t;Au^1)) - a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^1))\right| + \\
+\left|a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^1)) - a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^2))\right| \leqslant \varepsilon h_0\rho + h_1(t;u)\left|t_i(x,t;Au^1)-t_i(x,t;Au^2)\right|.
\end{gathered}$$

Звідси отримаємо

$$\left|t_i(x,t;Au^1)-t_i(x,t;Au^2)\right| \leqslant \frac{\varepsilon h_0\rho}{\left|\lambda_i(a_{Au^1,1}(t),t)-h_1(t;u)\right|} \leqslant \frac{1}{\gamma}\varepsilon h_0\rho.$$

Тому, продовжуючи (22) і враховуючи (21), одержимо

$$\begin{gathered}
\left|\Delta\overline{(Au^j)_i}(x,t)\right| \leqslant F\frac{1}{\gamma}\varepsilon h_0\rho + \varepsilon f_0\rho\max\{1+\delta,1+\delta\varepsilon h_0\} + \varepsilon g_0(\varepsilon)\delta\varepsilon h_0\rho + \varepsilon g_0(\varepsilon)\max\Big\{\frac{1}{\gamma}\varepsilon h_0\rho; \\
\max_{\substack{i,x,t,\\ p+g<l\leqslant n}}\Big(\left|\Delta\tilde{A}_l u^1\big)\big(a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^j)),t_i(x,t;Au^j)\big)\big)\right| + \left|\Delta\tilde{A}_l u^j\big)\big(a_{Au^2,1}(t_i(x,t;Au^2)),t_i(x,t;Au^2)\big)\big)\right|\Big)\Big\} \leqslant \\
\leqslant\Big(\frac{F}{\gamma}+\varepsilon g_0(\varepsilon)\delta\Big)\varepsilon h_0\rho + \varepsilon f_0\rho\max\{1+\delta,1+\delta\varepsilon h_0\} + \varepsilon g_0(\varepsilon)\max\Big\{\frac{1}{\gamma}\varepsilon h_0\rho;\sigma\max_{i,x,t}\big|t_i(x,t;Au^1)- \\
-t_i(x,t;Au^2)\big| + \rho(\tilde{A}_l u^1,\tilde{A}_l u^2)\Big)\Big\} \leqslant \Big(\Big(\frac{F}{\gamma}+\varepsilon g_0(\varepsilon)\delta\Big)\varepsilon h_0 + \varepsilon f_0\max\{1+\delta,1+\delta\varepsilon h_0\} + \\
+\varepsilon g_0(\varepsilon)\max\Big\{\frac{1}{\gamma}\varepsilon h_0;\frac{1}{\gamma}\sigma\varepsilon h_0 + \max\{1+\delta,1+\delta\varepsilon h_0\}\Big\}\Big)\rho \leqslant
\end{gathered}$$

$$\leqslant \left(\left(\frac{F+\sigma\varepsilon g_0(\varepsilon)}{\gamma} + \varepsilon g_0(\varepsilon)\delta \right) \varepsilon h_0 + \left(\varepsilon f_0 + \varepsilon g_0(\varepsilon)\right) \max\{1+\delta, 1+\delta\varepsilon h_0\} \right) \rho.$$

Розглянемо випадок, коли $(x,t) \in G_{Au^2,\varepsilon}$, але $(x,t) \notin G_{Au^1,\varepsilon}$. Тоді, покладаючи для визначеності $k=1$, отримаємо

$$\left|\Delta\overline{(Au^j)}_i(x,t)\right| \leqslant \left|(Au^2)_i(x,t) - (Au^1)_i(a_{Au^1,2}(t),t)\right| \leqslant \left|(Au^2)_i(x,t) - (Au^2)_i(a_{Au^1,2}(t),t)\right| +$$
$$+ \left|(Au^2)_i(a_{Au^1,2}(t),t) - (Au^1)_i(a_{Au^1,2}(t),t)\right| \leqslant \delta\left|x - a_{Au^1,2}(t)\right| + \left|\Delta(Au^j)_i(a_{Au^1,2}(t),t)\right|,$$

причому

$$\left|x - a_{Au^1,2}(t)\right| \leqslant \left|a_{Au^2,2}(t) - a_{Au^1,2}(t)\right| \leqslant \varepsilon h_0 \rho,$$

і $(a_{Au^1,2}(t),t) \in G_{Au^1,\varepsilon} \cap G_{Au^2,\varepsilon}$, тобто ми прийшли до вже розібраного випадку. Тому

$$\left|\Delta\overline{(Au^j)}_i(x,t)\right| \leqslant \delta\varepsilon h_0\rho + \left(\left(\frac{F+\sigma\varepsilon g_0(\varepsilon)}{\gamma} + \varepsilon g_0(\varepsilon)\delta \right) \varepsilon h_0 + \left(\varepsilon f_0 + \varepsilon g_0(\varepsilon)\right) \max\{1+\delta, 1+\delta\varepsilon h_0\} \right) \rho.$$

Отже, умова стиску оператора $A : S \to S$ має вигляд

$$\varepsilon_0 \left(h_0 \left(\delta + \varepsilon_0 g_0(\varepsilon_0)\left(\delta + \frac{\sigma}{\gamma}\right) + \frac{F}{\gamma} \right) + (f_0 + g_0(\varepsilon_0)) \max\{1+\delta, 1+\delta\varepsilon_0 h_0\} \right) < 1. \tag{24}$$

Покажемо тепер, що сукупність всіх умов сумісна. Справді, виберемо спочатку ε_0, α_0 так, як було сказано на початку доведення. Потім виберемо $\sigma > F + \dfrac{F(\Lambda + \alpha_0 + H)}{\gamma}$ та $\delta > \dfrac{F}{\gamma}$; зауважимо, що при цьому σ та δ можна вважати як завгодно великими. Далі при фіксованих α_0, σ, δ зменшимо ε_0 так, щоб виконувались рівності (19), (20) та (24).

Тоді за теоремою Банаха про стисні відображення в S існує єдиний розв'язок системи рівнянь (2), (12), який задовольняє умову (11), а тому v і є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4). Теорему доведено.

Зауваження 1. З доведення теореми та рівнянь (12) випливає, що $u_i(x,t)$ задовольняє умову Ліпшиця за обома змінними.

Зауваження 2. Якщо апріорі відомо, що границі сектора $G_{u,T}$ – лінійні функції, а $f_i, h_k, g_{i,k}$ також є лінійними по u, то теорема справедлива для всіх $t \in [0,T] \subset [0,\infty)$.

1. Кирилич В.М., Мышкис А.Д. *Обобщенная полулинейная гиперболическая задача Стефана на прямой.* // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, N3. – С. 497–501.
2. Кирилич В.М. Основні крайові задачі для гіперболічних рівнянь і систем на прямій. – Навч. посібн., К.: ІСДО, 1993. — 72 с.
3. Берегова Г.І., Кирилич В.М. *Гіперболічна задача Стефана в криволінійному секторі.* // Укр. мат. журнал. – 1997. – Т. 49, N12. – С. 1684–1689.
4. Avner Fridman, Bei Hu *The Stefan problem for a hyperbolic heat equition.* //Math. Anal. and Appl. – 1989. – T. 138, N1. – P. 249–259.
5. Piero Bassanini, Jan Turo *Generalized solutions to free boundary problems for hyperbolic systems of functional partial differential equations.* // Annali di Math. pura ed appl. (IV), 1990. – P. 211–230.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Наука, 1975. – Ч.1. – 631 с.

Стаття надійшла до редколегії 31.03.1998

УДК 517.95

ВИЗНАЧЕННЯ ДВОХ НЕВІДОМИХ КОЕФІЦІЄНТІВ В ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Н. В. Пабирівська

Pabyrivs'ka N.V. The determination of two unknown coefficients in the inverse problems for the parabolic equation Two inverse problems for a parabolic equation in which two unknown coefficients depend on the time variable are considered. The conditions of the existence of solutions to these problems are established by means of the Shauder's theorem. The uniqueness is proved too.

Результати дослідження обернених задач визначення двох коефіцієнтів в рівняннях параболічного типу наведені в працях [1] – [4]. Так, в [1] встановлено єдиність розв'язку оберненої задачі знаходження старшого коефіцієнта і коефіцієнта в молодшому члені для квазілінійного параболічного рівняння. Теореми існування, єдиності і стійкості розв'язку оберненої задачі для квазілінійного параболічного рівняння, де шукані коефіцієнти залежать від розв'язку рівняння, доведені в [2]. Знаходженню невідомих коефіцієнтів, які є сталими, присвячена робота [3].

У даній праці встановлено умови існування і єдиності розв'язків двох обернених задач знаходження коефіцієнта температуропровідності $a(t)$ та коефіцієнта $c(t)$ в молодшому члені параболічного рівняння.

В області $\Omega = \big\{(x,t): \quad 0 < x < h, \quad 0 < t < T\big\}$ розглядається рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + c(t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з невідомими коефіцієнтами $a(t)$ і $c(t)$, з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами і умовами перевизначення

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(h,t) = \mu_2(t), \tag{3}$$

$$u(0,t) = \nu_1(t), \quad u(h,t) = \nu_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Задача полягає в знаходженні функцій $\big(a,c,u)\big) \in C[0,T] \times C[0,T] \times C^{2,1}(\Omega) \bigcap C^{1,0}(\overline{\Omega})$, $a(t) > 0$, $c(t) \leqslant 0$, $t \in [0,T]$, які задовольняють умови (1) – (4).

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35R30.

Припустимо, що коефіцієнти $a(t)$ і $c(t)$ є тимчасово відомі. Зробивши заміну $u(x,t) = W(x,t)\exp\left(\int_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$, отримаємо еквівалентну задачу:

$$W_t = a(t)W_{xx} + f(x,t)\exp\left(-\int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \quad (x,t)\in\Omega, \tag{5}$$

$$W(x,0) = \varphi(x), \quad x\in[0,h], \tag{6}$$

$$W(0,t) = \nu_1(t)\exp\left(-\int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \quad W(h,t) = \nu_2(t)\exp\left(-\int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \tag{7}$$

$$W_x(0,t) = \mu_1(t)\exp\left(-\int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \quad W_x(h,t) = \mu_2(t)\exp\left(-\int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \quad t\in[0,T]. \tag{8}$$

Використовуючи функцію Гріна [5], запишемо розв'язок прямої задачі (5), (6), (8):

$$\begin{gathered}
W(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta(t)}}\int\limits_0^h \varphi(\xi)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\Bigl(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4\theta(t)}\Bigr)+\right. \\
\left.+\exp\Bigl(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4\theta(t)}\Bigr)\right)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\int\limits_0^h f(\xi,\tau)\times \\
\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\Bigl(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Bigr)+\exp\Bigl(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Bigr)\right)\mathrm{d}\xi- \\
-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{a(\tau)\mu_1(\tau)w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Bigr)\mathrm{d}\tau+ \\
+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{a(\tau)\mu_2(\tau)w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{(x+(2n-1)h)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Bigr)\mathrm{d}\tau,
\end{gathered} \tag{9}$$

де

$$w(t) = \exp\left(-\int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \quad \theta(t) = \int\limits_0^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Підставляючи даний розв'язок в умови (7), приходимо до системи рівнянь стосовно невідомих $a(t)$ та $c(t)$:

$$
\begin{gathered}
\nu_i(t)\exp\left(-\int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi\theta(t)}}\int\limits_0^h\varphi(\xi)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{(\xi+(2n+i-1)h)^2}{4\theta(t)}\Bigr)\,\mathrm{d}\xi+\\
+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{w(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\int\limits_0^h f(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{(\xi+(2n+i-1)h)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Bigr)\,\mathrm{d}\tau-\\
-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{a(\tau)\mu_1(\tau)w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{(2n+i-1)^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Bigr)\,\mathrm{d}\tau+\\
+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{a(\tau)\mu_2(\tau)w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{(2n+i)^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Bigr)\,\mathrm{d}\tau,\quad i=1,2.
\end{gathered}\tag{10}
$$

Здиференціюємо дану систему рівнянь за t, скориставшись при цьому властивостями об'ємного потенціалу [6], інтегруванням частинами та тим, що

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta(t)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{(\xi+(2n+i-1)h)^2}{4\theta(t)}\Bigr)\right)=\\
=a(t)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta(t)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{(\xi+(2n+i-1)h)^2}{4\theta(t)}\Bigr)\right).
\end{gathered}
$$

В результаті приходимо до системи рівнянь

$$
\begin{cases}
-c(t) = F_1(t)+\dfrac{a(t)}{w(t)\nu_1(t)}Q_1(t),\\
-c(t) = F_2(t)+\dfrac{a(t)}{w(t)\nu_2(t)}Q_2(t),
\end{cases}\tag{11}
$$

яка еквівалентна такій системі

$$
\begin{cases}
a(t) = \dfrac{(F_2(t)-F_1(t))\nu_1(t)\nu_2(t)w(t)}{\nu_2(t)Q_1(t)-\nu_1(t)Q_2(t)},\\
-c(t) = F_1(t)+\dfrac{(F_2(t)-F_1(t))\nu_2(t)}{\nu_2(t)Q_1(t)-\nu_1(t)Q_2(t)}Q_1(t),
\end{cases}\tag{12}
$$

де

$$
F_i(t)=\bigl(f(h(i-1),t)-\nu_i'(t)\bigr)/\,\nu_i(t),
$$

$$
Q_i(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi\theta(t)}}\int\limits_0^h\varphi''(\xi)\exp\Bigl(-\frac{(\xi+(2n+i-1)h)^2}{\theta(t)}\Bigr)\,\mathrm{d}\xi-
$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\mu_1'(\tau)-c(\tau)\mu_1(\tau)-f_x(0,\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}w(\tau)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(2n+i-1)^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\tau+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\mu_2'(\tau)-c(\tau)\mu_2(\tau)-f_x(h,\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}w(\tau)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(2n+i)^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\tau+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,\mathrm{d}\tau\int\limits_0^h f_{\xi\xi}(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi+(2n+i-1)h)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\xi.$$

Припустимо, що виконуються умови

$$\begin{gathered}\frac{f(0,t)-\nu_1'(t)}{\nu_1(t)}\geqslant 0,\quad \frac{\nu_1'(t)-f(0,t)}{\nu_1(t)}-\frac{\nu_2'(t)-f(h,t)}{\nu_2(t)}>0,\\ \mu_1'(t)-f_x(0,t)\leqslant 0,\quad \mu_2'(t)-f_x(h,t)\geqslant 0,\\ \mu_1(t)\leqslant 0,\quad \mu_2(t)\geqslant 0,\quad \nu_1(t)>0,\quad \nu_2(t)<0,\quad t\in[0,T];\\ \varphi''(x)>0,\quad x\in[0,h],\quad f_{xx}(x,t)\geqslant 0,\quad (x,t)\in\Omega.\end{gathered}\tag{13}$$

Ці умови, виходячи з (12), гарантують недодатність $c(t)$ та додатність $a(t)$.

Встановимо оцінки розв'язків системи (12). Для їх отримання необхідно мати оцінку $w(t)$ зверху. Із системи (10) приходимо до рівняння

$$w(t)=\frac{1}{\nu_1(t)-\nu_2(t)}\Bigg[\frac{1}{\sqrt{\pi\theta(t)}}\int\limits_0^h\varphi(\xi)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\exp\Big(-\frac{(\xi+nh)^2}{4\theta(t)}\Big)\,\mathrm{d}\xi+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,\mathrm{d}\tau\int\limits_0^h f(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\exp\Big(-\frac{(\xi+nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\xi-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{(\mu_1(\tau)+\mu_2(\tau))a(\tau)w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\tau\Bigg].$$

Припустивши, що виконуються умови

$$\begin{gathered}\varphi(x)-\varphi(h-x)\geqslant 0,\quad x\in[0,h/2],\\ f(x,t)-f(h-x,t)\geqslant 0,\quad (x,t)\in[0,h/2]\times[0,T],\\ \mu_1(t)+\mu_2(t)\leqslant 0,\quad t\in[0,T],\end{gathered}\tag{14}$$

перепишемо останнє рівняння у вигляді

$$w(t)=\frac{1}{\nu_1(t)-\nu_2(t)}\Bigg[\frac{1}{\sqrt{\pi\theta(t)}}\int\limits_0^{h/2}(\varphi(\xi)-\varphi(h-\xi))\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\exp\Big(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\theta(t)}\Big)\,\mathrm{d}\xi+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,\mathrm{d}\tau \int\limits_0^{h/2}\big(f(\xi,\tau)-f(h-\xi,\tau)\big)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\exp\Big(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\xi-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\big(\mu_1(\tau)+\mu_2(\tau)\big)a(\tau)w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\tau\Bigg].$$

Оцінюючи звідси $w(t)$ зверху, отримаємо нерівність

$$w(t)\leqslant C_1+C_2\int\limits_0^t w(\tau)\,\mathrm{d}\tau+C_3\int\limits_0^t\frac{a(\tau)w(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,\mathrm{d}\tau, \tag{15}$$

де $C_1, C_2, C_3>0$ – константи, що залежать від вихідних даних.

Зауваження. Константи C_i, $i=\overline{4,20}$, що зустрічатимуться в подальшому доведенні, також залежатимуть лише від вихідних даних.

Поклавши $t=\sigma$ в (15), помноживши на вираз $\dfrac{a(\sigma)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}$ та зінтегрувавши за σ від 0 до t, приходимо до нерівності

$$w(t)\leqslant C_1+2C_1C_3\sqrt{\theta(t)}+\left(C_2+C_3^2\pi+2C_2C_3\sqrt{\theta(t)}\right)\int\limits_0^t\big(1+a(\tau)\big)w(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{16}$$

Це нерівність такого типу

$$k(t)\leqslant p(t)+b(t)\int\limits_0^t q(\tau)k(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

З цієї нерівності за допомогою міркувань, аналогічних до тих, що наведені при доведенні леми 2.6 [7], приходимо до нерівності

$$k(t)\leqslant p(t)+b(t)\int\limits_0^t p(\sigma)q(\sigma)\exp\left(\int\limits_0^t b(\tau)q(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\sigma.$$

Тоді з (16) випливає оцінка

$$w(t)\leqslant\lambda\big(\theta(t)\big), \tag{17}$$

де

$$\lambda\big(\theta(t)\big)=C_1+2C_1C_3\sqrt{\theta(t)}+\big(C_2+C_3^2\pi+2C_2C_3\sqrt{\theta(t)}\big)\big(C_1+2C_1C_3\sqrt{\theta(t)}\big)\times$$
$$\times\big(T+\theta(t)\big)\exp\big((C_2+C_3^2\pi+2C_2C_3\sqrt{\theta(t)})(T+\theta(t))\big).$$

З першого рівняння системи (12) оцінимо зверху $a(t)$, для цього знаменник оцінимо його першим доданком:

$$a(t)\leqslant\frac{\max\big(F_2(t)-F_1(t)\big)\max\big(-\nu_2(t)\big)}{\min\limits_{[0,h]}\varphi''(x)}w(t).$$

Використовуючи (17), з останньоі нерівності матимемо

$$a(t) \leqslant C_4 \lambda\big(\theta(t)\big). \tag{18}$$

Звідси

$$\int\limits_0^t \frac{a(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\lambda\big(\theta(\tau)\big)} \leqslant C_4 t.$$

Позначимо

$$\int\limits_0^s \frac{\mathrm{d}z}{\lambda(z)} = r(s).$$

Оскільки функція $r(s)$ є монотонно спадною і область іі значень обмежена, то існує функція $r^{-1}(s)$, обернена до $r(s)$ і визначена на підмножині області значень функціі $r(s)$, тобто на проміжку $[0, C_4 t_0]$, де $0 < t_0 \leqslant T$ і $C_4 t_0 \leqslant \max\limits_s r(s)$. Тоді

$$\theta(t) \leqslant r^{-1}\left(C_4 t\right) \leqslant r^{-1}\left(C_4 t_0\right) = C_5.$$

Використовуючи останню оцінку, з (17) та (18) отримаємо

$$w(t) \leqslant \alpha\big(\theta(t)\big) \leqslant \alpha(C_5) = C_6, \tag{19}$$

$$a(t) \leqslant C_4 \alpha\big(\theta(t)\big) \leqslant C_4 \alpha(C_5) = A_1. \tag{20}$$

Оскільки $w(t) = \exp\left(-\int_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$, то

$$-\int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqslant \ln C_6 = C_7. \tag{21}$$

Оцінимо зверху $-c(t)$ з першого рівняння системи (11):

$$-c(t) \leqslant C_8 + C_9 a(t) \int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} + C_{10} a(t) \int\limits_0^t \frac{\big(-c(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}.$$

Покладемо в останній нерівності $t = \sigma$, домножимо на вираз $1 \Big/ \sqrt{\theta(t) - \theta(\sigma)}$ та зінтегруємо за σ від 0 до t. Змінюючи в двох останніх інтегралах отриманої нерівності порядок інтегрування та враховуючи (20), (21), отримаємо

$$\int\limits_0^t \frac{\big(-c(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \leqslant C_{11} + C_{12} \int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}. \tag{22}$$

Використовуючи (20), (22), приходимо до оцінки

$$-c(t) \leqslant C_{13} + C_{14} \int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}. \tag{23}$$

З першого рівняння системи (12) оцінимо $a(t)$ знизу:

$$a(t) \geqslant C_{15} \left(C_{16} + C_{17} \int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\sigma)}} + C_{18} \int\limits_0^t \frac{\big(-c(\sigma)\big)\,\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\sigma)}} \right)^{-1}.$$

Використовуючи (23) та оцінюючи $a(t)$ знизу $\min\limits_{[0,T]} a(t)$, приходимо до нерівності

$$\min_{[0,t_0]} a(t) \geqslant \frac{C_{15}}{C_{19} + \dfrac{C_{20}\sqrt{t_0}}{\sqrt{\min\limits_{[0,t_0]} a(t)}}}.$$

Розв'язавши дану нерівність, отримаємо оцінку $a(t)$ знизу:

$$a(t) \geqslant A_0 > 0, \quad t \in [0, t_0]. \tag{24}$$

Повертаючись до (23) та враховуючи (24), приходимо до оцінки $-c(t)$ зверху:

$$-c(t) \leqslant C_{13} + \frac{C_{14}}{A_0}\sqrt{t_0} = C_{01}, \quad t \in [0, t_0].$$

Перепишемо систему (12) в такому вигляді

$$\overline{b}(t) = \overline{P}\big(\overline{b}(t)\big),$$

де

$$\overline{P} = \big(P_1(a, -c)(t), P_2(a, -c)(t)\big), \quad \overline{b}(t) = \big(a(t), -c(t)\big).$$

Для дослідження цієї системи застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Множина $\Phi = \big\{\big(a(t), -c(t)\big)\colon\ a(t), c(t) \in C[0, t_0],\ A_0 \leqslant a(t) \leqslant A_1,\ C_0 \leqslant -c(t) \leqslant C_{01}\big\}$ – опукла і обмежена в просторі $C[0, t_0] \times C[0, t_0]$.

Щоб показати, що оператор $\overline{P}:\ \Phi \to \Phi$ є цілком неперервним, потрібно для довільних $\big(a(t), -c(t)\big) \in \Phi$ встановити оцінки

$$|P_1(t + \delta) - P_1(t)| < \varepsilon, \quad |P_2(t + \delta) - P_2(t)| < \varepsilon$$

на проміжку $[0, t_0]$ з деяким $\delta > 0$.

Доведення аналогічних оцінок проведено в [7]. Спираючись на це, можемо стверджувати, що оператор $\overline{P}:\ \Phi \to \Phi$ – цілком неперервний.

Виконуються всі умови теореми Шаудера, отже, існує розв'язок рівняння $\overline{b}(t) = \overline{P}\big(\overline{b}(t)\big)$, а звідси – задачі (1) – (4). Отже, правильна теорема.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*
1) $\nu_i, \mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2$; $\varphi \in C^2[0,h]$, $f \in C^{2,0}(\overline{\Omega})$;
2) умови (13), (14);
3) умови узгодженості $\nu_1(0) = \varphi(0)$, $\nu_2(0) = \varphi(h)$, $\mu_1(0) = \varphi'(0)$, $\mu_2(0) = \varphi'(h)$.
Тоді розв'язок задачі (1) - (4) існує при $x \in [0,h]$, $t \in [0,t_0]$, $0 < t_0 \leqslant T$.

Встановимо єдиність розв'язку. Припустимо, що існує два розв'язки даної задачі $\big(a_i(t),\ c_i(t),\ u_i(x,t)\big)$, $i = 1,2$. Для їх різниці $d(t) = a_1(t) - a_2(t)$, $r(t) = c_1(t) - c_2(t)$, $V(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ отримаємо задачу

$$V_t = a_1(t)V_{xx} + c_1(t)V + d(t)u_{2xx} + r(t)u_2, \quad (x,t) \in \Omega, \tag{25}$$

$$V(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \tag{26}$$

$$V(0,t) = 0, \quad V(h,t) = 0, \tag{27}$$

$$V_x(0,t) = 0, \quad V_x(h,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{28}$$

Зробивши в задачі (25), (26), (28) заміну $v(x,t) = V(x,t)\exp\left(\int_0^t c_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$ і використавши для розв'язку отриманої задачі формулу (9), підставимо його в умови (27). В результаті прийдемо до системи рівнянь

$$\int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}} \int\limits_0^h \big(d(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau) + r(\tau)u_2(\xi,\tau)\big) \times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{(\xi + (2n+i-1)h)^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\xi = 0, \quad i = 1,2.$$

Диференціюючи дану систему за t, прийдемо до системи однорідних інтегральних рівнянь Вольтера другого роду. Для єдиності розв'язку таких систем потрібно, щоб виконувалась умова:

$$u_{2xx}(0,t)u_2(h,t) - u_{2xx}(h,t)u_2(0,t) \neq 0, \quad t \in [0,T].$$

З рівняння (1) та умов (3), обчисливши $u_{2xx}\big((i-1)h,t\big)$, $u_2\big((i-1)h,t\big)$, $i = 1,2$, отримаємо

$$\frac{1}{a_2(t)}\big(\nu_1'(t) - c_2(t)\nu_1(t) - f(0,t)\big)\nu_2(t) - \frac{1}{a_2(t)}\big(\nu_2'(t) - c_2(t)\nu_2(t) - f(h,t)\big)\nu_1(t) =$$
$$= \frac{1}{a_2(t)}\big(\nu_1'(t)\nu_2(t) - \nu_2'(t)\nu_1(t) - f(0,t)\nu_2(t) + f(h,t)\nu_1(t)\big) \neq 0.$$

Отже, $d(t) = r(t) \equiv 0$ на $[0,T]$, а звідси і $V(x,t) = 0$ в Ω. Таким чином, доведено теорему єдиності.

Теорема 2. *Розв'язок задачі (1) - (4) єдиний, якщо при* $t \in [0,T]$ *виконується умова*

$$\nu_1'(t)\nu_2(t) - \nu_2'(t)\nu_1(t) - f(0,t)\nu_2(t) + f(h,t)\nu_1(t) \neq 0.$$

Доведення. Розглянемо задачу (1), (2), (4) з умовами перевизначення:

$$a(t)u_x(0,t) = \mu(t), \quad \int\limits_0^h u(x,t)\,\mathrm{d}x = \chi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{29}$$

Задача (1), (2), (4), (29) зводиться до системи рівнянь

$$\begin{cases} a(t) = \mu(t)w(t)/Q_1(t), \\ -c(t) = \left(F(t) + \mu(t)\dfrac{Q_2(t)}{Q_1(t)}\right) \Big/ \chi(t), \end{cases}$$

де

$$w(t) = \exp\left(-\int\limits_0^1 c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \quad F(t) = -\chi'(t) - \mu(t) + \int\limits_0^h f(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

$$Q_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\theta(t)}}\int\limits_0^h \varphi'(\xi)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi-(2n+i-1)h)^2}{4\theta(t)}\Big)\,\mathrm{d}\xi +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\int\limits_0^h f_\xi(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi+(2n+i-1)h)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\xi -$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)\big(\nu_1'(\tau)-c(\tau)\nu_1(\tau)-f(0,\tau)\big)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(2n+i-1)^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\tau +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)\big(\nu_2'(\tau)-c(\tau)\nu_2(\tau)-f(h,\tau)\big)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(2n+i)^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\,\mathrm{d}\tau, \quad i = 1,2.$$

Користуючись методом, вказаним при розв'язуванні задачі (1) – (4), можна довести, що правильна теорема.

Теорема 3. *Припустимо, що виконуються умови:*
1) $\nu_i, \chi \in C^1[0,T]$, $i = 1,2$; $\mu \in C[0,T]$, $\varphi \in C^1[0,h]$, $f \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$;
2) $\mu(t) > 0$, $f(0,t) - \nu_1'(t) \geqslant 0$, $\nu_1(t) \leqslant 0$, $\nu_2(t) \geqslant 0$, $\nu_2'(t) - f(h,t) \geqslant 0$, $\nu_1(t) + \nu_2(t) \geqslant 0$, $\chi(t) > 0$, $\chi'(t) + \mu(t) \leqslant 0$, $t \in [0,T]$; $\varphi(x) > 0$, $x \in (0,h]$, $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0,h]$, $f(x,t) \geqslant 0$, $f_x(x,t) \geqslant 0$, $(x,t) \in \Omega$;
3) $\nu_1(0) = \varphi(0) = 0$, $\nu_2(0) = \varphi(h)$, $\int_0^h \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \chi(0)$.

Тоді розв'язок задачі (1), (2), (4), (29) існує при $x \in [0,h]$, $t \in [0,t_0]$, *де число* t_0, $0 < t_0 < T$, *визначається вихідними даними задачі, і він єдиний в області* $\overline{\Omega}$.

1. Музылёв Н.П. *О единственности решения одной обратной задачи нелинейной теплопроводности*// Журнал выч. мат. и мат. физики.– 1985.– Т.25. № 9.– С. 1346-1352.
2. Искендеров А.Д. *Об обратной задаче для квазилинейных параболических уравнений* // Дифференц. уравнения.– 1974.– Т.10. № 5.– С. 890-898.
3. Іванчов М.І., Лучко І.Я. *Про одну обернену задачу знаходження коефіцієнтів параболічного рівняння* // Вісник Львівського університету.– 1990.– Випуск 34.– С. 7-10.
4. Искендеров А.Д. *Регуляризация одной многомерной обратной задачи и ее оптимизационной постановки* // ДАН АзССР.– 1984.– Т.40. № 9.– С. 11-15.
5. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики.– М.: Высшая школа, 1970.– 710 с.
6. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа.– М.: Мир, 1967.– 428 с.
7. Іванчов М.І. Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами.– Київ., 1995.– 84 с.– (Препринт /ІСДО).

Стаття надійшла до редколегії 24.04.1998

УДК 517.927.25

СПЕКТРАЛЬНА ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Н.О. Бабич, Ю.Д. Головатий

Babych N. O., Golovatyj Yu. D. On Neumann spectral problem for a singular perturbed differential operator of the forth order. The influence of the concentrated mass (which is relatively big) on the characteristic frequencies and eigenfunctions of an elastic rod was studied. In our case the components of a rod have same elastic properties but essentially different densities. The description of the experimentally known effect of the local oscillations of the rod in perturbed domain has been done. The estimates are obtained for the remainder terms of the asymptotic expansions.

Розвиток нових технологій, які дозволяють створювати композитні матеріали із новими властивостями, що не є притаманні їх окремим складовим, спричинив появу математичної теорії сильно неоднорідних середовищ. Можливість практичного створення композитних матеріалів, в яких частини суттєво відрізняються густиною, але мають подібні пружні властивості, викликала необхідність вивчення подібних моделей, зокрема їх спектральних властивостей.

Нами досліджено задачу на власні коливання композитного стержня з локальним збуренням густини. Вдалося отримати математичний опис відомого з експериментів явища локальних коливань Е. Санчез-Паленсія [1,2], коли власні форми коливань зосереджені в околі області збурення густини і швидко згасають поза ним. Зауважимо, що повне дослідження даної задачі полягає у вивченні як ефектів локальних так і глобальних коливань, які властиві такій моделі. У праці вивчено лише локальні коливання. Системи із локальним збуренням густини вивчались у працях [3-8]. Модель, що відповідає коливанням закріпленого стержня, досліджено в праці [6]. Відмінність даної задачі полягає у присутності нетривіального ядра збуреної задачі, що приводить до зміни методів дослідження.

1. Формулювання задачі. Нехай інтервал дійсної прямої $\Omega = (a,b)$ містить початок координат, а функція ρ_ε має вигляд: $\rho_\varepsilon(x) = p(x) + \varepsilon^{-m} q(x/\varepsilon)$, де p і q задовольняють умовам: $p(x) > 0$, $x \in \overline{\Omega}$, $q(\xi) > 0$, $\xi \in [-1;1]$ і $q(\xi) = 0$, $\xi \notin [-1;1]$, функції p і q – обмежені та вимірні на Ω та [-1,1] відповідно. Тут ε – малий додатний параметр, $m \in \mathbb{R}$. Розглянемо задачу на власні значення

$$(k(x)u_\varepsilon'')'' - \lambda_\varepsilon \rho_\varepsilon(x) u_\varepsilon = 0, \qquad x \in \Omega = (a,b), \tag{1}$$

$$u_\varepsilon''(a) = (ku_\varepsilon'')'(a) = 0, \quad u_\varepsilon''(b) = (ku_\varepsilon'')'(b) = 0, \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47A75, 35B25.

де коефіцієнт $k(x)$ є обмеженою вимірною функцією на Ω і $k(x) > 0$ в $\overline{\Omega}$, λ_ε – спектральний параметр.

Для усіх дійсних m ми вивчатимемо асимптотичну поведінку при $\varepsilon \to 0$ власних значень λ_ε та власних функцій u_ε задачі (1),(2).

Нехай $H^2(\Omega)$ – простір Соболєва із скалярним добутком $(u,v) = \int_\Omega (ku''v'' + puv)\,dx$ та нормою $\|u\|_2 = (u,u)^{1/2}$. Введемо на цьому просторі додатно визначену білінійну форму $a_\varepsilon(u,v) = \int_\Omega (ku''v'' + \rho_\varepsilon uv)\,dx$, $\varepsilon > 0$. У просторі $L_2(\Omega)$ із скалярним добутком $(u,v)_0 = \int_\Omega p(x)uv\,dx$ задамо також форму $b_\varepsilon(u,v) = \int_\Omega \rho_\varepsilon(x)uv\,dx$.

Означення 1. *Число λ_ε та ненульову функцію $u_\varepsilon(x) \in H^2(\Omega)$ будемо називати власним значенням та власною функцією задачі (1),(2), якщо вони задовольняють інтегральну тотожність*

$$\int_\Omega (k(x)u_\varepsilon''\varphi'' - \lambda_\varepsilon \rho_\varepsilon(x)u_\varepsilon\varphi)\,dx = 0, \quad \varphi \in H^2(\Omega).$$

Для всіх $\varepsilon > 0$ задача (1),(2) має власне значення $\lambda_\varepsilon = 0$, якому відповідає двовимірний власний підпростір лінійних функцій. Надалі ми будемо досліджувати лише ненульові власні значення задачі $0 < \lambda_\varepsilon^1 < \lambda_\varepsilon^2 < \dots < \lambda_\varepsilon^k < \dots,\quad \lambda_\varepsilon^k \to \infty$, $k \to \infty$. Відповідні власні функції u_ε^k нормуємо в просторі $H^2(\Omega)$.

Означення 2. *Послідовність A_m лінійних неперервних компактних операторів в сепарабельному гільбертовому просторі H будемо називати компактно збіжною до оператора A при $m \to \infty$, якщо:*

1) $A_m u \to Au$ сильно в H для всіх $u \in H$;

2) для кожної послідовності u_m, такої, що $u_m \in H$, $\|u_m\| \leqslant 1$ послідовність $A_m u_m$ компактна.

Відомо [4], що коли послідовність компактних фредгольмових операторів B_ε компактно збігається при $\varepsilon \to 0$ до самоспряженого компактного оператора B, то різниця власних значень та розхил між відповідними власними підпросторами операторів B_ε і B оцінюється величиною $\|B_\varepsilon - B\|$.

Введемо позначення $p_k = \int\limits_\Omega p(x)x^k\,dx$, $q_k = \int\limits_{-1}^{1} q(\xi)\xi^k\,d\xi$, де $k = 0,1,2$.

Лема 1. [7] *Для функцій $u, v \in H^2(\Omega)$ правильні оцінки*

$$\left|\varepsilon^{-1}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon)u(x)\,dx - q_0u(0)\right| \leqslant C\,\varepsilon\|u\|_2,$$

$$\left|\varepsilon^{-3}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon)uv\,dx - q_2u'(0)v'(0)\right| \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|u\|_2\|v\|_2, \quad \text{де } u(0) = v(0) = 0, \tag{3}$$

$$\left|\varepsilon^{-1}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon)uv\,dx\right| \leqslant C\varepsilon^3\|u\|_2\|v\|_2, \quad \text{коли } u(0) = u'(0) = v(0) = v'(0) = 0.$$

У задачі (1), (2) проведемо заміну спектрального параметра $\mu_\varepsilon = 1 + \lambda_\varepsilon$. Тоді вона матиме вигляд

$$\begin{gathered}(k(x)u_\varepsilon'')'' + \rho_\varepsilon(x)u_\varepsilon = \mu_\varepsilon \rho_\varepsilon(x)u_\varepsilon, \qquad x \in \Omega,\\ u_\varepsilon''(a) = (ku_\varepsilon'')'(a) = 0, \quad u_\varepsilon''(b) = (ku_\varepsilon'')'(b) = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Нехай оператор $A_\varepsilon : H^2(\Omega) \to H^2(\Omega)$ кожній функції $f \in H^2(\Omega)$ ставить у відповідність узагальнений розв'язок $y_\varepsilon = A_\varepsilon f$ крайової задачі

$$\begin{gathered}(k(x)y_\varepsilon'')'' + \rho_\varepsilon(x)y_\varepsilon = \rho_\varepsilon(x)f, \qquad x \in \Omega,\\ y_\varepsilon''(a) = (ky_\varepsilon'')'(a) = 0, \quad y_\varepsilon''(b) = (ky_\varepsilon'')'(b) = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Очевидно, що цей оператор обмежений і самоспряжений щодо скалярного добутку $a_\varepsilon(\cdot,\cdot)$, а також компактний. Крім того, $a_\varepsilon(A_\varepsilon u, v) = b_\varepsilon(u,v)$. Відповідні власні функції u_ε^k утворюють ортонормовану базу в $H^2(\Omega)$.

2. Асимптотична поведінка власних значень та власних функцій у випадках $m < 1$ і $m = 1$. Для таких значень параметра m сім'я операторів A_ε є рівномірно обмежена при $\varepsilon \to 0$. Поведінка спектру коливної системи (1), (2) у цьому випадку узгоджується з класичними результатами теорії коливних систем з приєднаними масами [3].

При $m < 1$ розглянемо компактний оператор $A : H^2(\Omega) \to H^2(\Omega)$, який функції f ставить у відповідність розв'язок $y = Af$ задачі

$$\begin{gathered}(k(x)y'')'' + p(x)y = p(x)f, \qquad x \in \Omega,\\ y''(a) = (ky'')'(a) = 0, \quad y''(b) = (ky'')'(b) = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Доведемо, що при $m < 1$ цей оператор є рівномірною границею операторів A_ε. Справді

$$|((A_\varepsilon - A)u, v)| = |b_\varepsilon(u,v) - (u,v)_{L_2(\Omega)}| + \left|\varepsilon^{-m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon)A_\varepsilon uv\,dx\right| =$$

$$= \left|\varepsilon^{-m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon)uv\,dx\right| + \left|\varepsilon^{-m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon)A_\varepsilon uv\,dx\right| \leqslant C\varepsilon^{1-m}\|u\|_2\|v\|_2.$$

Тобто, $\|A_\varepsilon - A\| \leqslant C\varepsilon^{1-m}$. Тому $A_\varepsilon \to A$ рівномірно при $\varepsilon \to 0$, а, отже, правильна і компактна збіжність цієї сім'ї в сенсі означення 2.

Теорема 1. *($m < 1$) Власні значення та власні функції задачі (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ збігаються до власних значень λ та власних функцій u задачі*

$$\begin{gathered}(k(x)u'')'' - \lambda p(x)u = 0, \qquad x \in \Omega,\\ u''(a) = (ku'')'(a) = 0, \quad u''(b) = (ku'')'(b) = 0,\end{gathered} \tag{7}$$

і правильні оцінки

$$|\lambda_\varepsilon^i - \lambda^i| \leqslant C_i\,\varepsilon^{1-m}, \quad \|u_\varepsilon^i - u^i\|_2 \leqslant C\,\varepsilon^{1-m}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Вивчимо випадок $m = 1$. Введемо у просторі $H^2(\Omega)$ білінійні форми

$$a_0(u,v) = \int_\Omega (ku''v'' + puv)\,dx + q_0 u(0)v(0), \quad b(u,v) = \int_\Omega puv\,dx + q_0 u(0)v(0).$$

Нехай $\Omega_0 = (a,0) \cup (0,b)$, а оператор $A : H^2(\Omega) \to H^2(\Omega)$ "розв'язує" таку задачу

$$\begin{gathered}(k(x)y'')'' + p(x)y = p(x)f, \quad x \in \Omega_0,\\ y''(a) = (ky'')'(a) = 0, \quad y''(b) = (ky'')'(b) = 0,\\ [y]_{x=0} = [y']_{x=0} = [k(x)y'']_{x=0} = 0, \quad [(k(x)y'')']_{x=0} = q_0(y(0) - f(0)),\end{gathered}$$

якій відповідає інтегральна тотожність $a_0(y,\varphi) = b(y,\varphi)$, $\varphi \in H^2(\Omega)$. Цей оператор є граничним при $\varepsilon \to 0$ для сім'ї A_ε, коли $m = 1$.

Для оцінки норми оператора $A_\varepsilon - A$ скористаємося нерівностями леми 1:

$$|a_0((A_\varepsilon - A)u, v)| \leqslant \left|\varepsilon^{-1}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon)A_\varepsilon uv\,dx - q_0(A_\varepsilon u)(0)v(0)\right| +$$

$$+\left|\varepsilon^{-1}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon)uv\,dx - q_0u(0)v(0)\right| \leqslant C\,\varepsilon\,\|u\|_2\|v\|_2.$$

Тому $A_\varepsilon \to A$ рівномірно при $\varepsilon \to 0$, а, отже, і компактно.

Теорема 2. *($m = 1$) Власні значення λ_ε та власні функції u_ε задачі (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ збігаються до власних значень λ та власних функцій u задачі*

$$\begin{gathered}(k(x)u'')'' - \lambda p(x)u = 0, \qquad x \in \Omega_0,\\ u''(a) = (ku'')'(a) = 0, \quad u''(b) = (ku'')'(b) = 0,\\ [u]_{x=0} = [u']_{x=0} = [k(x)u'']_{x=0} = 0, \quad [(k(x)u'')']_{x=0} - \lambda q_0 u(0) = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

і правильні оцінки

$$|\lambda_\varepsilon^i - \lambda^i| \leqslant C_i\,\varepsilon, \quad \|u_\varepsilon^i - u^i\|_2 \leqslant C\,\varepsilon, \quad i = 1,2,\ldots.$$

3. Поведінка спектру задачі (1), (2) для $1 < m < 3$, $m = 3$ та $3 < m < 4$. Ці випадки відповідають ситуації так званих помірно сингулярних задач, коли сім'я операторів A_ε ще залишається обмеженою на деякому замкненому підпросторі.

Нехай B_ε – сім'я компактних операторів у сепарабельному гільбертовому просторі H. Нехай також для всіх ε одиниця є власним значенням оператора B_ε з власним підпростором V. Для кожного замкненого підпростору V_1 із V правильне зображення $H = V_1 \oplus \mathcal{H}$. У просторі $\mathcal{H}$ розглянемо оператор $D_\varepsilon = PB_\varepsilon$, де P – проектор на $\mathcal{H}$. Тоді очевидно, що власному значенню та власній функції λ_ε, u_ε оператора B_ε відповідають власне значення λ_ε та власна функція $v_\varepsilon = Pu_\varepsilon$ оператора D_ε при умові, що $v_\varepsilon \not\equiv 0$. І, навпаки, кожній парі λ_ε та v_ε відповідає пара λ_ε та $u_\varepsilon = v_\varepsilon + \dfrac{1}{\lambda_\varepsilon - 1}(I-P)A_\varepsilon v_\varepsilon$, коли $\lambda_\varepsilon \neq 1$.

Нехай D_ε і B є операторами з простим спектром. Позначимо відповідні їм системи власних значень і нормованих власних функцій $\{\lambda_\varepsilon^k, v_\varepsilon^k\}_{k=1}^\infty$, $\{\lambda^k, u^k\}_{k=1}^\infty$.

Лема 2. *Якщо оператори B і D_ε компактні та фредгольмові, $D_\varepsilon \to B$ компактно при $\varepsilon \to 0$, причому $\|D_\varepsilon - B\| + \|(I-P)B_\varepsilon P\| \leqslant C\varepsilon^\gamma$, то для таких n, що $\lambda_\varepsilon^n \leqslant \theta < 1$ виконується*

$$|\lambda_\varepsilon^n - \lambda^n| \leqslant C\varepsilon^\gamma, \qquad \|u_\varepsilon^n - u^n\|_H \leqslant C\varepsilon^\gamma. \tag{9}$$

Доведення. Зауважимо, що коли v_ε^n – власна функція оператора D_ε, то $\|v_\varepsilon^n - u^n\|_H \leqslant C\varepsilon^\gamma$. Оскільки

$$\|v_\varepsilon^n - u^n\|_H \geqslant \|u_\varepsilon^n - u^n\|_H - \frac{1}{|\lambda_\varepsilon^n - 1|}\|(I-P)B_\varepsilon v_\varepsilon^n\|_H \geqslant$$
$$\geqslant \|v_\varepsilon^n - u^n\|_H - C\varepsilon^\gamma \frac{1}{|\lambda_\varepsilon^n - 1|} \geqslant \|v_\varepsilon^n - u^n\|_H - C\varepsilon^\gamma \frac{1}{1-\theta},$$

то виконується друга нерівність (9). Лему доведено.

Вивчимо поведінку власних значень та власних функцій задачі (4) для $m \in (1,3)$. Застосуємо лему 2, коли $H = H^2(\Omega)$, $B_\varepsilon = A_\varepsilon$, $\mathcal{H} = \{u \in H^2(\Omega) : u(0) = 0\}$ та $Pu = u(x) - u(0)$. Згідно з нерівністю (3), отримуємо

$$\|A_\varepsilon f\|_2 \leqslant b_\varepsilon(f,f)^{1/2} \leqslant (C_1 + C_2\varepsilon^{3-m})\|f\|_2, \qquad f \in \mathcal{H}.$$

Нехай функція φ тотожно дорівнює 1 в околі нуля і $\|\varphi\|_2 = 1$. Підставивши φ в інтегральну тотожність для задачі (5), отримаємо

$$\varepsilon^{-m}\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon) y_\varepsilon\, dx\right| \leqslant (C_1 + C_2\varepsilon^{2-m})\|f\|_2, \quad f \in \mathcal{H},$$

звідки

$$|(A_\varepsilon f)(0)| \leqslant (C_1\varepsilon^{m-1} + C_2\varepsilon)\|f\|_2, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Нехай оператор A для кожного $f \in \mathcal{H}$ розв'язує задачу

$$(k(x)u'')'' + p(x)u = p(x)f, \quad x \in \Omega_0,$$
$$u''(a) = (ku'')'(a) = 0, \;\; u''(b) = (ku'')'(b) = 0, \;\; u(0) = 0, \quad [u']_{x=0} = [u'']_{x=0} = 0.$$

Для функцій із $\mathcal{H}$ правильна оцінка

$$|((D_\varepsilon - A)u, v)| \leqslant |(A_\varepsilon u, v) - (Au, v)| + C_1|(A_\varepsilon u)(0)|\|v\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^{-m}\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon)A_\varepsilon uv\, dx\right| + |b_\varepsilon(u,v) - (u,v)_{L_2(\Omega)}| + C_1|(A_\varepsilon u)(0)|\|v\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant C(\varepsilon^{m-1} + \varepsilon^{3-m})\|u\|_2\|v\|_2.$$

Оскільки $D_\varepsilon \to A$ компактно при $\varepsilon \to 0$, то виконуються всі умови леми 2.

Теорема 3. *$(1 < m < 3)$ Для власних значень λ_ε та власних функцій u_ε задачі (1), (2) виконуються оцінки*

$$|\lambda_\varepsilon^i - \lambda^i| \leqslant C_i\,\varepsilon^\gamma, \qquad \|u_\varepsilon^i - u^i\|_2 \leqslant C\varepsilon^\gamma, \quad \gamma = \min\{m-1, 3-m\}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

де λ^i та u^i – додатні власні значення та нормовані в $H^2(\Omega)$ власні функції задачі

$$\begin{gathered} (k(x)u'')'' + \lambda p(x)u = 0, \;\; x \in \Omega_0, \\ u''(a) = (ku'')'(a) = 0, \quad u''(b) = (ku'')'(b) = 0, \; u(0) = 0, \quad [u']_{x=0} = [u'']_{x=0} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

У випадку $m = 3$ із нерівності (3) маємо, що $\|A_\varepsilon f\|_2 \leqslant C\|f\|_2$. Підставляючи в інтегральну тотожність задачі (5) тотожну одиницю як пробну функцію, матимемо

$$|\varepsilon^{-1} q_0 (A_\varepsilon f)(0) + q_1 (A_\varepsilon f)'(0) - q_1 f'(0)| \leqslant C\varepsilon\|f\|_2.$$

Нехай оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ функції f ставить у відповідність розв'язок $u = Af$ задачі

$$\begin{gathered} (k(x)u'')'' + p(x)u = p(x)f, \qquad x \in \Omega_0, \quad u''(a) = (ku'')'(a) = 0, \\ u''(b) = (ku'')'(b) = 0, \; u(0) = 0, \quad [u']_{x=0} = 0, \quad [ku'']_{x=0} + Q(u'(0) - f'(0)) = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

де $Q = q_2 - q_1^{-2} q_0$. Розв'язок цієї задачі справджує інтегральну тотожність

$$(u, \varphi) + Qu'(0)\varphi'(0) = (f, \varphi)_{L_2(\Omega)} + Qf'(0)\varphi'(0)$$

для всіх φ з простору $\mathcal{H}$.

Як і в попередніх випадках доводиться близькість розв'язків u та y_ε задач (11) та (1),(2) відповідно.

Теорема 4. *$(m = 3)$ Власні значення λ_ε та власні функції u_ε задачі (1), (2) справджують нерівності*

$$|\lambda_\varepsilon^i - \lambda^i| \leqslant C_i\,\varepsilon, \qquad \|u_\varepsilon^i - u^i\|_2 \leqslant C\varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

де λ^i та u^i – власні значення та нормовані в $H^2(\Omega)$ власні функції задачі

$$\begin{gathered} (k(x)u'')'' + \lambda p(x)u = 0, \;\; x \in \Omega_0, u''(a) = (ku'')'(a) = 0, \;\; u''(b) = (ku'')'(b) = 0, \\ u(0) = 0, \quad [u']_{x=0} = 0, \quad [ku'']_{x=0} - \lambda Q u'(0) = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Для дослідження задачі (4) у випадку $3 < m < 4$ застосуємо лему 2 для простору $\mathcal{H} = \{u \in H^2(\Omega) : \quad u(0) = u'(0) = 0\}$ та проектора $Pu = u(x) - u(0) - u'(0)x$. Легко показати, що $\|A_\varepsilon f\|_2 \leqslant C\|f\|_2$. Підставляючи в інтегральну тотожність задачі (5) почергово дві пробні функції, які рівні 1 та x в околі нуля, для $f \in \mathcal{H}$ та $y_\varepsilon = A_\varepsilon f$ отримуємо

$$|y_\varepsilon(0)| \leqslant C(\varepsilon^{m-2} + \varepsilon^{3/2})\|f\|_2, \qquad |y_\varepsilon'(0)| \leqslant C(\varepsilon^{m-3} + \varepsilon^{1/2})\|f\|_2.$$

Нехай оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ розв'язує задачу

$$\begin{gathered} (k(x)u'')'' + p(x)u = p(x)f, \qquad x \in \Omega_0, \\ u''(a) = (ku'')'(a) = 0, \quad u''(b) = (ku'')'(b) = 0, \; u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \end{gathered}$$

тоді для функцій з $\mathcal{H}$ виконується оцінка

$$|((D_\varepsilon - A)u, v)| \leqslant C_1 |(A_\varepsilon u)(0) + (A_\varepsilon u)'(0)| \, \|v\|_2 +$$
$$+ \Big| b_\varepsilon(u,v) - \varepsilon^{-m} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(x/\varepsilon) A_\varepsilon u v \, dx - (u,v)_{L_2(\Omega)} \Big| \leqslant C_2(\varepsilon^{m-3} + \varepsilon^{1/2}) \|u\|_2 \|v\|_2 +$$
$$+ C_3 \varepsilon^{4-m} \|u\|_2 \|v\|_2 \leqslant C(\varepsilon^{3-m} + \varepsilon^{4-m}) \|u\|_2 \|v\|_2.$$

Компактна збіжність D_ε до A при $\varepsilon \to 0$ перевіряється аналогічно попереднім випадкам. Отже, виконуються всі умови леми 2.

Теорема 5. *($3 < m < 4$) Власні значення $\lambda_\varepsilon > 0$ та власні функції u_ε задачі (1), (2) справджують нерівності*

$$|\lambda_\varepsilon^k - \lambda^k| \leqslant C_k \, \varepsilon^\gamma,$$
$$\|u_\varepsilon^k - u^k\|_2 \leqslant C\varepsilon^\gamma, \quad \gamma = min\{m-3, 4-m\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де λ^k та u^k – власні значення та нормовані в $H^2(\Omega)$ власні функції задачі

$$\begin{gathered}(k(x)u'')'' + \lambda p(x) u = 0, \quad x \in \Omega_0, \\ u''(a) = (ku'')'(a) = 0, \quad u''(b) = (ku'')'(b) = 0, \;\; u(0) = u'(0) = 0.\end{gathered} \tag{13}$$

4. Випадок $m > 4$: явище локальних власних коливань. Ми покажемо, що у випадку, коли параметр m більший за порядок диференціального оператора, усі додатні власні значення λ_ε^k коливної системи (1), (2) є нескінченно малими при $\varepsilon \to 0$, а власні функції прямують до нуля в просторі $L_2(\Omega)$, хоча і мають одиничну норму в $H^2(\Omega)$. Ці функції мають форму високочастотних коливань, локалізованих в околі точки $x = 0$.

У цьому розділі за скалярний добуток в просторі $H^2(\Omega)$ виберемо білінійну форму $(u,v) = \int_\Omega (ku''v'' + uv)\, dx$. Проведемо заміну змінних $\xi = \varepsilon^{-1}x$, ввівши позначення $\Omega^\varepsilon = (\varepsilon^{-1}a, \varepsilon^{-1}b)$ та

$$\tilde{w}(\xi) = \varepsilon^{-3/2} w(\varepsilon\xi). \tag{14}$$

Перетворення (14) здійснює ізометрію $H^2(\Omega)$ та простору $H^2(\Omega^\varepsilon)$ із нормою

$$\|w\|_\varepsilon = \Big(\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (k(\varepsilon\xi)|w''|^2 + \varepsilon^4 |w|^2) \, d\xi \Big)^{1/2},$$

а інтегральна тотожність задачі (1), (2) в нових змінних набуває вигляду

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} k(\varepsilon\xi) \tilde{u}'' \tilde{\varphi}'' \, d\xi - \lambda_\varepsilon \Big(\varepsilon^4 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} p(\varepsilon\xi) \tilde{u}\tilde{\varphi} \, d\xi + \varepsilon^{4-m} \int\limits_{-1}^{1} q(\xi) \tilde{u}\tilde{\varphi} \, d\xi \Big) = 0 \tag{15}$$

для всіх $\tilde{\varphi} \in H^2(\Omega^\varepsilon)$.

Введемо також простори $V = \{a + b\xi : \xi \in \Omega^\varepsilon, a, b \in \mathbb{R}\}$ та

$$\mathcal{H} = \Big\{ y \in H^2(\Omega^\varepsilon) : \int_{-1}^{1} q(\xi) y \, d\xi = 0, \int_{-1}^{1} q(\xi)\xi y \, d\xi = 0 \Big\}.$$

Очевидно, що $H^2(\Omega^\varepsilon) = \mathcal{H} \oplus V$. Оскільки для кожної функції u з підпростору $H^2(\Omega)$, який не містить лінійних функцій, виконується оцінка $(u,u)_{L_2(\Omega)} \leqslant C(u'', u'')_{L_2(\Omega)}$, то $\varepsilon^4 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} u(\xi)^2 \, d\xi \leqslant C \int\limits_{\Omega^\varepsilon} u''(\xi)^2 \, d\xi$. А тому форма $\{u, v\} = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} k(\varepsilon\xi) u'' v'' \, d\xi$ є скалярним добутком на $\mathcal{H}$.

Функцію $\varphi \in H^2(\Omega^\varepsilon)$ можна подати у вигляді $\varphi = \psi + \beta_0(\varphi) + \beta_1(\varphi)\xi$, де $\psi \in \mathcal{H}$. Вектор $\beta(\varphi) = (\beta_0(\varphi), \beta_1(\varphi))$ задається формулою $\beta(\varphi) = Q^{-1} T(\varphi)$, де

$$Q = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}, \quad T(\varphi) = \begin{pmatrix} \int\limits_{-1}^{1} q(\xi)\varphi(\xi) \, d\xi \\ \int\limits_{-1}^{1} q(\xi)\varphi(\xi)\xi \, d\xi \end{pmatrix}.$$

Крім того, власна функція $\tilde{u}_\varepsilon$, що відповідає ненульовому власному значенню λ_ε, має зображення

$$\tilde{u}_\varepsilon = v_\varepsilon(\xi) + \alpha_0^\varepsilon(v_\varepsilon) + \alpha_1^\varepsilon(v_\varepsilon)\xi, \ \ v_\varepsilon \in \mathcal{H}, \tag{16}$$

де функціонали α_k^ε знаходяться із системи $\alpha^\varepsilon(v_\varepsilon) = -R_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(v_\varepsilon)$, а

$$R_\varepsilon = \begin{pmatrix} q_0 + \varepsilon^{m-1} p_0 & q_1 + \varepsilon^{m-2} p_1 \\ q_1 + \varepsilon^{m-2} p_1 & q_2 + \varepsilon^{m-3} p_2 \end{pmatrix}, \qquad F_\varepsilon(\psi) = \begin{pmatrix} \varepsilon^m \int\limits_{\Omega^\varepsilon} p(\varepsilon\xi)\psi(\xi) \, d\xi \\ \varepsilon^m \int\limits_{\Omega^\varepsilon} p(\varepsilon\xi)\psi(\xi)\xi \, d\xi \end{pmatrix}.$$

Матриця R_ε є невиродженою при достатньо малих ε, оскільки невиродженою є матриця Q, а вектор F_ε справджує нерівність $|F_\varepsilon(\psi)| \leqslant C\varepsilon^{m-7/2} \|\psi\|_{\mathcal{H}}$. Неважко переконатись, що таку ж оцінку справджують функціонали $\alpha_i^\varepsilon(\psi)$.

Новий спектральний параметр $\mu_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \varepsilon^{4-m}$ та зображення (16) змінюють вигляд інтегральної тотожності (15)

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} k(\varepsilon\xi) v_\varepsilon'' \psi'' \, d\xi - \mu_\varepsilon \Big\{ \varepsilon^m \int\limits_{\Omega^\varepsilon} p(\varepsilon\xi) v_\varepsilon \psi \, d\xi + \int\limits_{-1}^{1} q(\xi) v_\varepsilon \psi \, d\xi - \big(R_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(v_\varepsilon), F_\varepsilon(\psi)\big) \Big\} = 0, \tag{17}$$

$\psi \in \mathcal{H}$. Розглянемо оператор $A_\varepsilon : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, такий, що

$$\{A_\varepsilon u, v\} = \int\limits_{-1}^{1} q(\xi) uv \, d\xi + \varepsilon^m \int\limits_{\Omega^\varepsilon} p(\varepsilon\xi) uv \, d\xi - \big(R_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(u), F_\varepsilon(v)\big),$$

який є обмежений, компактний і самоспряжений. Оскільки

$$\{A_\varepsilon u, u\} = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (q(\xi) + \varepsilon^m p(\varepsilon\xi))(u + \alpha_0^\varepsilon(u) + \alpha_1^\varepsilon(u)\xi)^2 \, d\xi \geqslant 0,$$

то A_ε – додатно визначений. Отже, задача (17) має зліченну множину власних значень $0 < \mu_\varepsilon^1 < \mu_\varepsilon^2 < \cdots < \mu_\varepsilon^k < \ldots$, яким відповідає ортонормована в $\mathcal{H}$ система власних функцій $\{v_\varepsilon^i\}_{i=1}^\infty$.

Перейдемо до побудови граничної задачі. Розглянемо інтегральну тотожність (17) на пробних функціях $\varphi \in \mathcal{H}$, які є лінійними поза відрізком $[-1,1]$. Нехай $\mu_\varepsilon \to \mu$ і $v_\varepsilon(\xi) \to v(\xi)$ слабко в $H^2(-1,1)$ при $\varepsilon \to 0$. Перейдемо в інтегральній тотожності (18) до границі при $\varepsilon \to 0$:

$$k(0)\int_{-1}^{1} v''(\xi)\varphi''(\xi)\,d\xi - \mu\int_{-1}^{1} q(\xi)v(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = 0.$$

Отримана інтегральна тотожність відповідає задачі

$$\begin{gathered} k(0)v^{(IV)}(\xi) - \mu q(\xi)v(\xi) = 0,\ \xi \in (-1,1),\ v''(\pm 1) = v'''(\pm 1) = 0, \\ \int_{-1}^{1} q(\xi)v(\xi)\,d\xi = 0,\ \int_{-1}^{1} q(\xi)v(\xi)\xi\,d\xi = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Введемо простір $\mathcal{H}_q = \left\{v \in H^2(-1,1) : \int_{-1}^{1} q(\xi)v(\xi)\,d\xi = 0,\ \int_{-1}^{1} q(\xi)v(\xi)\xi\,d\xi = 0\right\}$ зі скалярним добутком $\{u,v\}_q = k(0)\int_{-1}^{1} u''(\xi)v''(\xi)\,d\xi$. Розглянемо оператор A в просторі $\mathcal{H}_q$, який задається тотожністю $\{Au,v\}_q = (qu,v)_{L_2(-1,1)}$. Очевидно, A – обмежений, самоспряжений, компактний і додатний. Нехай $v \in H^2(-1,1)$ – власна функція задачі (17). Покладемо

$$\tilde{v}(\xi) = \begin{cases} v(-1) + v'(-1)(\xi+1), & \xi < -1, \\ v(\xi), & |\xi| < 1 \\ v(1) + v'(1)(\xi-1), & \xi > 1. \end{cases} \tag{19}$$

Так побудована функція $\tilde{v}$ є майже-власною функцією для оператора A_ε. Справді,

$$|\{A_\varepsilon\tilde{v} - \mu^{-1}\tilde{v},\varphi\}| = \Big|\int_{-1}^{1} qv\varphi\,d\xi + \varepsilon^m\int_{\Omega^\varepsilon} p\tilde{v}\varphi\,d\xi - (R_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon(\tilde{v}),F_\varepsilon(\varphi)) - \frac{1}{\mu}\int_{-1}^{1} kv''\varphi''\,d\xi\Big| \leqslant$$

$$\mu^{-1}\max_{\xi\in(-1,1)}|k(\varepsilon\xi) - k(0)|\Big|\int_{-1}^{1} v''\varphi''\,d\xi\Big| + C\varepsilon^{m-4}\|\varphi\|_{\mathcal{H}} + |(R_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon(\tilde{v}),F_\varepsilon(\varphi))| \leqslant C\,\varepsilon^\gamma\,\|\varphi\|_{\mathcal{H}},$$

де $\gamma = \min\{1, m-4\}$, $\|\tilde{v}\|_{\mathcal{H}} = 1$. Згідно з лемою Вішика–Люстерника [9] існує таке власне значення λ_ε задачі (1), (2), що $|\frac{1}{\lambda_\varepsilon\varepsilon^{4-m}} - \frac{1}{\mu}| \leqslant C\varepsilon^\gamma$, звідки можна показати $|\mu - \lambda_\varepsilon\varepsilon^{4-m}| \leqslant C_1\mu\varepsilon^\gamma$, $\gamma = \min\{1, m-4\}$. Виберемо число d таким чином, щоб в інтервалі $[\mu^{-1} - d, \mu^{-1} + d]$ містилось лише одне власне значення $\frac{1}{\lambda_\varepsilon\varepsilon^{4-m}}$ оператора A_ε. Тоді існує така нормована власна функція v_ε оператора A_ε, що $\|v_\varepsilon - \tilde{v}\|_{\mathcal{H}} \leqslant Cd^{-1}\varepsilon^\gamma$. Повертаючись до змінних x

$$(P_\varepsilon v)(x) = \varepsilon^{3/2}\tilde{v}(x/\varepsilon), \tag{20}$$

отримуємо $\|\varepsilon^{3/2}v_\varepsilon(x/\varepsilon) - P_\varepsilon v\|_2 \leqslant C_1\varepsilon^\gamma$. Оскільки $\|\varepsilon^{3/2}v_\varepsilon(x/\varepsilon) - u_\varepsilon(x)\|_2 \leqslant C_2\varepsilon^{m-3}$, то $\|u_\varepsilon - P_\varepsilon v\|_2 \leqslant C\varepsilon^\gamma$, де u_ε– власна функція задачі (1), (2), що задовольняє умову $\int_\Omega k(x)u_\varepsilon''(x)^2\,dx = 1$.

Теорема 6. *($m > 4$) Якщо λ_ε^i, u_ε^i– ненульове власне значення та відповідна йому власна функція задачі (1), (2), $i = 1, 2, \ldots$, причому $\int\limits_\Omega k(x){u_\varepsilon^i}''(x)^2\,dx = 1$, $\{\mu^k, v^k\}_{k=1}^\infty$– система власних елементів задачі (18), $\|v\|_{\mathcal{H}_q} = 1$, то виконуються оцінки*

$$|\mu^k - \lambda_\varepsilon^k \varepsilon^{4-m}| \leqslant C\mu^k\varepsilon^\gamma, \quad \|u_\varepsilon^k - P_\varepsilon v^k\|_2 \leqslant C\varepsilon^\gamma,$$

де $\gamma = min\{1, m-4\}$, а P_ε– оператор, заданий співвідношеннями (19),(20).

Зауважимо, що $\|P_\varepsilon v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_1\varepsilon^{3/2}(\|v\|_{\mathcal{H}_q} + C_2\varepsilon^{-1}\|v\|_{\mathcal{H}_q}) \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|v\|_{\mathcal{H}_q}$.

1. Sanchez-Palensia E. *Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses*// Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics. Berlin: Springer-Verlag,1984.— P.346-368.
2. Sanchez-Palensia E., Tchatat H. *Vibration de systems elastiques avec des masses concentrees* // Rend. Sem. Mat. Univers. Politech. Torino.— 1984.— V.42, N3.— P.43-63.
3. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. Осциляционные матрицы, ядра и малые колебания механических систем. – М.-Л.: Гос.изд., 1950.
4. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М: Изд-во МГУ, 1990.— 311 с.
5. Olejnik O.A. *Homogenization problems in elasticity.Spectrum of singularily perturbed operators*// Non-classical continuum mechanics. 1987. Lecture Notes series,122.— Cambridge University Press.— P.188-205.
6. Головатый Ю.Д. *Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами: эффект локальних колебаний*// Труды Московского мат. о–ва.— 1992.— Т.54.— С.29–72.
7. Головатый Ю.Д. *Спектральная задача Неймана для оператора Лапласа с сингулярно возмущённой плотностью* // Успехи матем. н. – 1990. – Т.45, N4 –.С.147-148.
8. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А., Соболева Т.С. *О собственных колебаниях струны с присоединенной массой* // Сибирский математический журнал. – 1988. – Т.29, N5. – С.71-91.
9. Вишик М.И., Люстерник А.А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром* // Успехи матем. н. – 1957. – Т.12, N5. – С.3-122.

Стаття надійшла до редколегії 24.04.1998

УДК 517.576.

ON OPERATOR OF MULTIPLICATION BY THE INDEPENDENT VARIABLE

V. E. Lyantse, O. O. Karabin

Lyantse V. E., Karabin O. O. On operator of multiplication by the independent variable. The framework of this paper is Internal Set Theory of Nelson. We give conditions for nearstandardness of the operator of multiplication by the independent variable and determine its shadow. Since each normal operator is unitarly equivalent to such a multiplication, we obtain conditions for nearstandardness and a way to determine the shadow of an arbitrary normal operator.

1. *Preleminaires.* Recall some definitions ([2],[3],[4]). Let $\mathbb{H}$ be a standard Hilbert space over $\mathbb{C}$. For a vector $x \in \mathbb{H}$ we write $\|x\| \ll \infty$ iff $\exists n \in {}^{st}\mathbb{N} \quad \|x\| < n$ (${}^{st}E$ denote the collection of standard elements of the set E). If $\|x\| \ll \infty$, then there exsists a unique standard vector ${}^\circ x$ (the shadow of x) such that $\forall y \in {}^{st}\mathbb{H} \quad (x|y) \approx ({}^\circ x|y)$; (for $a, b \in \mathbb{C}$ "$a \approx b$" means that "$\forall n \in {}^{st}\mathbb{N} \quad |a-b| < \frac{1}{n}$"). If $\|x\| \ll \infty$ and $\|x - {}^\circ x\| \approx 0$ then x is said to be nearstandard (write $x \in {}^{nst}\mathbb{H}$).

We need also the concept of the shadow ${}^\circ E$ for a set E in a standard metric space (X, d). The halo $\mathcal{H}(E)$ of E is the collection of those $x \in X$ for which $\exists y \in {}^{st}E \quad d(x,y) \approx 0$. The shadow ${}^\circ E$ is a standard set such that ${}^{st}E = {}^{st}\mathcal{H}(E)$. By the standartization principle of IST, ${}^\circ E$ exists and is unique.

Let (X, d_x), (Y, d_y) be standard metric spaces, and f be a map $X \to Y$. We consider its graph $\{(x,y) \in X \times Y : \ x \in \mathrm{dom} f, \ y = f(x)\}$ r as a set in the standard metric space $X \times Y$ (with a distance, e.g., $d_x(x_1, x_2) + d_y(y_1, y_2)$). The map f is said to be *graph-nearstandard* if the shadow ${}^\circ[\mathrm{graph} f]$ of its graph is a graph of some map. The last (if it exists) is exactly the shadow ${}^\circ f$ of f: ${}^\circ[\mathrm{graph}\, f] = \mathrm{graph}({}^\circ f)$.

Let $A : X \to Y$ (X, Y are normed spaces) be a linear map. Define $\mathrm{dom}_{nst} A := \{x \in {}^{nst}\mathrm{dom}\, A : \quad Ax \in {}^{nst}Y\}$. We say that for A the $< nst >$ condition holds, iff $(\forall x \in \mathrm{dom}_{nst} A)$ $(x \approx 0 \Rightarrow Ax \approx 0)$. It is known (see, e.g., [5]) that $< nst >$ is necessary and sufficient for graph-nearstandardness of A. If $< nst >$ holds, then

$$x \in {}^{st}\mathrm{dom}({}^\circ A) \iff (\exists x_1 \in \mathrm{dom} A)(x \approx x_1) \tag{1.1}$$

and for such x and x_1 we have

$$({}^\circ A)x = {}^\circ(Ax_1) \tag{1.2}$$

Since ${}^\circ A$ is standard its domain and action are uniquely determined by (1.1), (1.2). Recall that the shadow ${}^\circ A$ of a graph-nearstandard linear map A is a *closed* operator.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47S20, 28E05.

2. Let $(T, \mathfrak{P}, p)$ be a standard measure space with a $\sigma-$additive measure. Denote by $\mathbb{H}$ the standard Hilbert space $L_2(T, \mathfrak{P}, p)$ and fix some p-measurable p-bounded function $\lambda \in \mathbb{C}^T$. Define an operator $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ by

$$\forall x \in \mathbb{H} \quad Ax = \lambda(\cdot)x \tag{2.1}$$

(i.e, $Ax(t) = \lambda(t)x(t)$ a.e.). Observe that

$$\|A\| = \text{ess sup}_{t\in T}|\lambda(t)|; \tag{2.2}$$

this A is normal (if $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ a.e., then A is selfadjoint). The spectrum of A is

$$\sigma(A) = \text{esv } \lambda, \tag{2.3}$$

where esvλ denote the set of essential values of λ, i.e.,

$$\text{esv}\lambda := \{z \in \mathbb{C} : \quad \text{ess inf}_{t\in T}|\lambda(t) - z| = 0\}. \tag{2.3'}$$

We want to discover condition for nearstandardness of A. Denote by $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an increasing sequence of sets $T_n \in \mathfrak{P}$ such that

$$T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n \quad \text{and} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad pT_n < \infty \tag{2.4}$$

By the transfer principle (without loss of generality), we can assume that the sequence (T_n) is *standard*. In particular $\forall n \in {}^{st}\mathbb{N} \quad T_n \in {}^{st}\mathfrak{P}$ and $pT_n \in {}^{st}\mathbb{R}$.

2.1 Definition. A p-measurable p-bounded function $\lambda \in \mathbb{C}^T$ is said to be *p-nearstandard* iff there exists a *standard* p-measurable function $\mu \in \mathbb{C}^T$ such that

$$\forall n \in {}^{st}\mathbb{N} \quad \text{ess sup}_{t\in T_n}|\lambda(t) - \mu(t)| \approx 0. \tag{2.5}$$

If this holds, μ is called the *shadow* of λ and denoted by ${}^\circ\lambda$.

2.2 Remark. The above definition determines the shadow $\mu = {}^\circ\lambda$ uniquely a.e. Indeed, let (2.5) holds for another standard $(\widetilde{T}_n)$ and $(\tilde{\mu})$. Then $\forall m, n \in {}^{st}\mathbb{N}$ ess $\sup_{t\in T_m \cap \widetilde{T}_n}|\mu(t) - \tilde{\mu}(t)| \approx 0$. Since this ess sup is a standard number, it equals zero. Since $\bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} T_m \cap \widetilde{T}_n = T$ by the transfer principle, we get $\mu(t) = \tilde{\mu}(t)$ a.e on T.

2.3 Warning. The shadow ${}^\circ\lambda$ (of a p-bounded λ) may be *unbounded*. But for (2.5) and by the transfer principle,

$$\forall n \in {}^{st}\mathbb{N} \quad \text{ess sup}_{t\in T_n}|({}^\circ\lambda)(t)| \in {}^{st}\mathbb{R}. \tag{2.6}$$

2.4 Lemma. . *Let $\lambda \in \mathbb{C}^T$ be a p-nearstandard function. Then*

$$(\forall x \in {}^{nst}\mathbb{H})\,(\|Ax\| \ll \infty \Longrightarrow {}^\circ(Ax) = ({}^\circ\lambda)(\cdot){}^\circ x). \tag{2.7}$$

In particular, if $x \in \text{dom}_{nst}A$, then

$$\int_T |({}^\circ\lambda)(t)({}^\circ x)(t)|^2\, p(dt) < \infty. \tag{2.8}$$

Proof. Let $x \in {}^{nst}\mathbb{H}$, $\|Ax\| \ll \infty$, and $y \in {}^{st}\mathbb{H}$. Then $({}^\circ(Ax)|y) \approx (Ax|y) = (\lambda(\cdot)x|y)$. Therefore,

$$\forall n \in {}^{st}\mathbb{N} \quad \int_{T_n} {}^\circ(Ax)(t)\overline{y(t)}\, p(dt) \approx \int_{T_n} \lambda(t)x(t)\overline{y(t)}\, p(dt) \approx$$

$$\approx \int_{T_n} ({}^\circ\lambda(t))x(t)\overline{y(t)}\, p(dt) \approx \int_{T_n} ({}^\circ\lambda)(t)({}^\circ x)(t)\overline{y(t)}\, p(dt).$$

Indeed, $\|x - {}^\circ x\| \approx 0$ and by (2.6),

$$\forall n \in {}^{st}\mathbb{N} \quad \int_{T_n} |({}^\circ\lambda)(t)y(t)|^2\, p(dt) \ll \infty.$$

Since the first and the last members of the chain above are standard numbers, they are equal. By the transfer we find

$$\forall y \in \mathbb{H}\, \forall n \in \mathbb{N} \int_{T_n} {}^\circ(Ax)(t)\overline{y(t)}\, p(dt) = \int_{T_n} ({}^\circ\lambda)(t)({}^\circ x)(t)\overline{y(t)}\, p(dt),$$

whence (2.7) follows.

2.5 Theorem. *Let a function λ be p-nearstandard. Then the operator A defined by (2.1) is graph-nearstandard. Its shadow ${}^\circ A$ is a densely defined (possibly unbounded) operator given by*

$$\mathrm{dom}^\circ A = \{x \in \mathbb{H} : \quad ({}^\circ\lambda)(\cdot)x \ \in \mathbb{H}\}, \quad \forall x \in \mathrm{dom}^\circ A \quad ({}^\circ A)x = ({}^\circ\lambda)(\cdot)x. \tag{2.9}$$

Proof. Let $x \in \mathrm{dom}_{nst}A$ and $x \approx 0$. Since ${}^\circ x = 0$ by (2.7) ${}^\circ(Ax) = 0$. Therefore $Ax \approx 0$, what means that for A the $< nst >$ condition holds (see section 1), i.e. A is graph-nearstandard.

Assume that $x \in {}^{st}(\mathrm{dom}^\circ A)$. Then by (1.2) and *lemma 2.4* $({}^\circ A)x = {}^\circ(Ax) = ({}^\circ\lambda)(\cdot)x$. Therefore $({}^\circ\lambda)(\cdot)x \in \mathbb{H}$. By the transfer, $\forall x \in \mathrm{dom}^\circ A \quad ({}^\circ\lambda)(\cdot)x \in \mathbb{H}$ and $({}^\circ A)x = ({}^\circ\lambda)(\cdot)x$.

Conversely let $x \in {}^{st}\mathbb{H}$ and

$$\int_T |({}^\circ\lambda)(t)x(t)|^2\, p(dt) < \infty.$$

In view of (2.5), if $n \in {}^{st}\mathbb{N}$, then

$$\int_{T_n} |({}^\circ\lambda)(t) - \lambda(t)|^2 |x(t)|^2\, p(dt) \approx 0.$$

By the Robinson lemma this holds for some $n = n_0 \in \mathbb{N} \setminus {}^{st}\mathbb{N}$. Define $x_1 \in \mathbb{H}$ by $x_1(t) = x(t)$ for $t \in T_{n_0}$ and $x_1(t) = 0$ for $t \in T \setminus T_{n_0}$. Then

$$\|x - x_1\|^2 = \int_{T\setminus T_{n_0}} |x(t)|^2\, p(dt) \approx 0$$

because the standard sequence

$$\left(\int_{T_n} |x(t)|^2 \, p(dt)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converges. Therefore $x_1 \in {}^{nst}\mathbb{H}$, $\quad {}^\circ x_1 = x$. Besides,

$$\|Ax_1 - ({}^\circ\lambda)(\cdot)x\|^2 = \int_{T_{n_0}} |\lambda(t) - ({}^\circ\lambda)(t)|^2 |x(t)|^2 \, p(dt) + \int_{T\setminus T_{n_0}} |({}^\circ\lambda)(t)x(t)|^2 \, p(dt) \approx 0.$$

Thus $Ax_1 \in {}^{nst}\mathbb{H}$, what means that $x_1 \in \mathrm{dom}_{nst}A$. By (1.1) $x \in \mathrm{dom}({}^\circ A)$. Using the transfer principle, we get: $\forall x \in \mathbb{H}$ if $({}^\circ\lambda)(\cdot)x \in \mathbb{H}$, then $x \in \mathrm{dom}({}^\circ A)$.

3. Now we give conditions for

$$\sigma({}^\circ A) = {}^\circ[\sigma(A)], \tag{3.1}$$

where A is defined by (2.1) and $\sigma(\cdot)$ denotes the spectrum of $(\cdot)$.

Assume that a standard metric d is defined on T and for any $n \in {}^{st}\mathbb{N}$ the set T_n is d-compact (see(2.4)). Suppose that the following holds

(i) λ is p-nearstandard and its shadow (see definition 2.1) ${}^\circ\lambda$ is a d-continuous function;

(ii) if $|z| \ll \infty$ and $z \in \mathrm{esv}\lambda$, then $\exists n \in {}^{st}\mathbb{N} \quad \mathrm{ess\,inf}_{t\in T_n}|\lambda(t) - z| \approx 0$;

(iii) $\forall z \in {}^{st}\mathbb{C} \quad \mathrm{ess\,inf}_{t\in T}|\lambda(t) - z| \approx 0$ implies $\exists z_1 \approx z \quad z_1 \in \mathrm{esv}\lambda$.

3.1 Theorem. *In the above conditions (3.1) holds.*

Proof. Let $z \in {}^{st}\mathbb{C} \cap {}^\circ[\sigma(A)]$. Thus $z \approx z_1$ for some $z_1 \in \mathrm{esv}\lambda$. By (ii) $\mathrm{ess\,inf}_{t\in T_{n_0}}|\lambda(t) - z_1| = 0$ for some $n_0 \in {}^{st}\mathbb{N}$. Condition (2.5) implies $\mathrm{ess\,inf}_{t\in T_{n_0}}|\mu(t) - z| \approx 0$, where $\mu := {}^\circ\lambda$. Since T_{n_0} is d-compact and μ is standard and d-continuous there exists $t_0 \in {}^{st}T_{n_0}$ such that $\mu(t_0) \approx z$, hence $\mu(t_0) = z$ and $z \in \sigma({}^\circ A)$. By the transfer principle, ${}^\circ[\sigma(A)] \supseteq \sigma({}^\circ A)$.

Conversely, let $z \in {}^{st}\mathbb{C} \cap \sigma({}^\circ A)$. Since ${}^\circ A$ is the operator of multiplication by a standard continuous function μ $\forall \varepsilon > 0 \, \exists t \in T \quad |\mu(t) - z| < \varepsilon$. For standard $\varepsilon > 0$ the above t may be choosen *standard.* Therefore there exists $n \in {}^{st}\mathbb{N}$ such that $|\mu(t_0) - z| < \varepsilon$ for some $t_0 \in {}^{st}T_n$. By (2.5) $\mathrm{ess\,inf}_{t\in T_n}|\lambda(t) - z| < 2\varepsilon$. Let $E := \{\varepsilon > 0 : \quad \mathrm{ess\,inf}_{t\in T}|\lambda(t) - z| < 2\varepsilon\}$. We have proved that E contains all $\varepsilon \gg 0$. By the permanence principle there exists an infinitesimal $\varepsilon \in E$. Therefore $\mathrm{ess\,inf}_{t\in T}|\lambda(t) - z| \approx 0$. By (iii) $\exists z_1 \approx z \quad z_1 \in \mathrm{esv}\lambda$. For (2.3) $z_1 \in \sigma(A)$, thus $z \in {}^\circ[\sigma(A)]$. By the transfer, $\sigma({}^\circ A) \subseteq {}^\circ[\sigma(A)]$.

4. *Example.* Denote by $\mathbb{H}$ the standard Hilbert spase $L_2(\mathbb{R})$. For a fixed infinitesimal $h > 0$ define

$$\forall x \in \mathbb{H} \quad D_h x(t) = \frac{1}{h^2}\left[x(t+2h) - 2x(t+h) + x(t)\right], \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Obviously, $D_h \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ but $\|D_h\| \approx \infty$ (namely $\|D_h\| = 4/h^2$; see below). We claim that the operator D_h is *graph-nearstandard* and its shadow $D := {}^\circ D_h$ is given by

$$\mathrm{dom}D = H^2(\mathbb{R}), \quad \forall x \in H^2(\mathbb{R}) \quad Dx(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t), \quad t \in \mathbb{R}; \tag{4.2}$$

where $H^2(\mathbb{R}) := \{x \in L_2(\mathbb{R}) : \quad \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \in L_2(\mathbb{R})\}$.

For proof use the unitary transformation $\mathcal{F}$

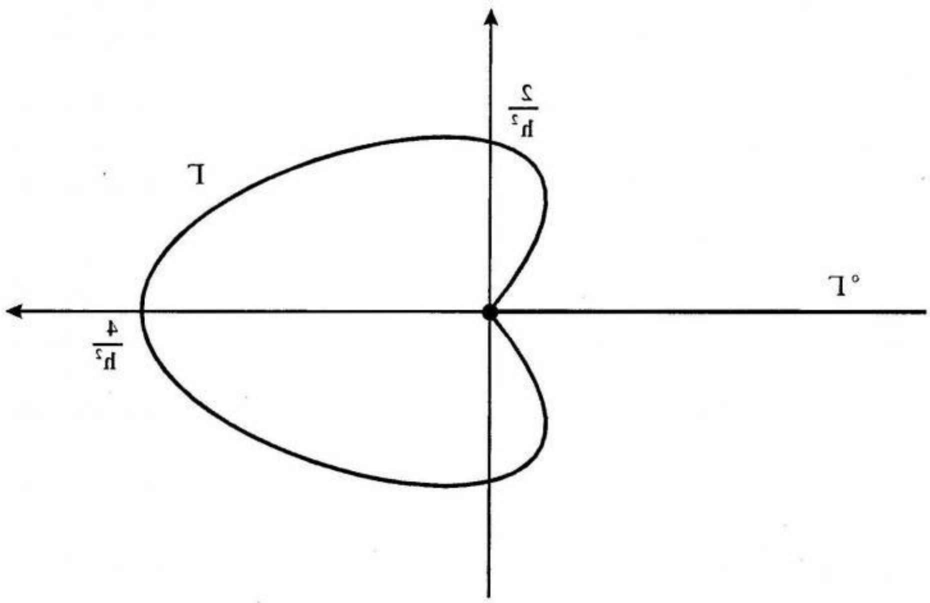
$$\forall x \in L_2(\mathbb{R}) \quad \hat{x}(\tau) = \mathcal{F}x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} x(t) e^{-it\tau}\, dt, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

The Fourier-image $\widehat{D}_h$ of D_h (i.e. the operator $\mathcal{F}D_h\mathcal{F}^{-1}$) is the operator of multiplication by a function

$$\widehat{D}_h \hat{x} = \lambda(\cdot)\hat{x}, \tag{4.3}$$

where $\lambda(\tau) = \frac{1}{h^2}(e^{i\tau h} - 1)^2$. Since $|\tau| \ll \infty$ implies $\frac{1}{h}(e^{i\tau h} - 1) \approx i\tau$, this function λ is nearstandard with respect to the Lebesque measure on $\mathbb{R}$ and its shadow $^\circ\lambda$ is (see definition 2.1)

$$^\circ\lambda(\tau) = -\tau^2. \tag{4.4}$$



By *theorem 2.5* $\widehat{D}_h$ is graph-nearstandard and by (2.9),

$$\operatorname{dom}^\circ \widehat{D}_h = \left\{ \hat{x} \in L_2(\mathbb{R}) : \int\limits_{\mathbb{R}} |\tau^2 \hat{x}(\tau)|^2\, d\tau < \infty \right\},$$

$^\circ\widehat{D}_h \hat{x}(\tau) = -\tau^2 \hat{x}(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}$. Using $\mathcal{F}^{-1}$ we get (4.2).

Remark. Since for the above function λ the conditions (i), (ii), (iii) of section **3** are satisfied, we have $\sigma(D) = {}^\circ[\sigma(D_h)]$. But we can see this immediately. Indeed, let $z = \frac{1}{h}(e^{i\tau h} - 1), \quad \tau \in \mathbb{R}$. Then $|hz + 1| = 1$ i.e. values of z form a circle with centre $\left(-\frac{1}{h}, 0\right)$ and radius $\frac{1}{h}$, with a polar equation $\rho = -\frac{2}{h}\cos\varphi, \quad \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}$. Values $\lambda = \frac{1}{h}(e^{i\tau h} - 1)^2$ fill in a curve Γ which arises from this circle by the transformation $z \longmapsto z^2$ or in polar coordinates, $\rho \longmapsto \rho^2, \quad \varphi \longmapsto 2\varphi$. Thus the polar equation of Γ is $\sqrt{\rho} = -\frac{2}{h}\cos\frac{\varphi}{2}$ i.e., $\rho = \frac{2}{h^2}(1 + \cos\varphi), \quad \pi \leqslant \varphi \leqslant 3\pi$. We see that the spectrum $\sigma(D_h) = \sigma(\widehat{D}_h)$ is an infinitely large *cardioid*. Its shadow is the semiaxe $^\circ\Gamma =]-\infty, 0]$.

Remark. Obviously, the operator D (see (4.2)) is the shadow not only of the (normal) difference operator D_h. For instance (instead of (4.1)) consider the (selfadjoint) difference operator $\widetilde{D}_h$ given by $\widetilde{D}_h x(t) = \frac{1}{h^2}[x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)]$. It is easy to check that $\widetilde{D}_h$ is graph-nearstandard with shadow $^\circ\widetilde{D}_h = D$. Now the spectrum of $\widetilde{D}_h$ is simply the segment $\left[-\frac{4}{h^2}, 0\right]$, but as before $\sigma(^\circ\widetilde{D}_h) = {}^\circ[\sigma(\tilde{D}_h)]$ (because $^\circ\left[-\frac{4}{h^2}, 0\right] = [-\infty, 0]$).

1. Nelson E. *Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis* // Bull. Amer. Math. Soc. 83 - 1977. - 83. - P.1165-1198.
2. Diener F., Reeb G. Analyse Nonstandard. - Hermann, Paris, 1989.
3. Lyantse V. E., Kudryk T. S. Elements of nonstandard analysis. - Kyiv, 1996.
4. Lutz R., Goze M. Nonstandard Analysis: a Practical Guide with Applications. - Lecture Notes in Math. 881, Springer, 1981.
5. Lyantse V, Nearstandardness on a finite set, *Dissert. Math.*. - CCCLXIX, Warszawa, 1997.

Стаття надійшла до редколегії 29.05.1998

УДК 517.927.25

ПРО ЛОКАЛЬНІ ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ Е. САНЧЕЗ-ПАЛЕНСІЇ ДЛЯ ПЛАСТИНИ ІЗ ЗБУРЕННЯМ ГУСТИНИ В ОКОЛІ ОДНОВИМІРНОГО МНОГОВИДУ

Ю. Д. Головатий, А. С. Лавренюк

Golovatyj Yu. D., Lavrenyuk A. S. On E. Sanchez-Palencia local proper vibrations for plate with density perturbed in neighbourhood of one-dimensional manifold. We study an asymptotic behaviour as $\varepsilon \to 0$ of eigenvalues and eigenfunctions of a singular perturbed problem $\Delta^2 u_\varepsilon - \lambda_\varepsilon(p + \varepsilon^{-m} q_\varepsilon) u_\varepsilon = 0$ in $\Omega \subset R^2$, $u_\varepsilon = \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0$ on $\partial\Omega$ where the support of a function q_ε is an ε-neighbourhood of one-dimensional closed manifold $\gamma \subset \Omega$. The phenomenon of E. Sanchez-Palencia local proper vibrations is described. Two-parameter spectral problem on the first terms of eigenvalue asymptotics is obtained.

Композитні (локально неоднорідні) коливні системи мають властивості, які не притаманні класичним системам з приєднаними чи зосередженими масами. Для багатьох систем вдалося математично описати явище локальних коливань [1-12]. А саме, доведено існування серії нескінченно малих власних частот, яким відповідають власні коливання з нескінченно малою амплітудою. Такі власні функції мають вигляд високочастотних коливань в околі збурення густини і швидко згасають поза ним. У згаданих працях вивчалися спектральні задачі із збуренням коефіцієнтів диференціального оператора в околі множини міри нуль (скінченна чи злічення множина точок). Ми ж описали явище локальних коливань для системи, густина якої збурена в околі одновимірного многовиду.

1. Формулювання задачі. Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^2$ з гладкою межею $\partial\Omega$, а γ – гладка замкнена крива, яка лежить в Ω. Через ω_ε позначимо ε-окіл кривої γ, тобто об'єднання всіх відкритих куль радіуса ε з центром на γ. В області Ω введемо додатну гладку функцію p, а також гладку і додатну в ω_ε функцію $q_\varepsilon(x)$, яка продовжена нулем на $\mathbb{R}^2$. Ми вивчатимемо асимптотичну поведінку при $\varepsilon \to 0$ власних значень λ_ε та власних функцій u_ε задачі

$$\Delta^2 u_\varepsilon - \lambda_\varepsilon(p + \varepsilon^{-m} q_\varepsilon) u_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \Omega, \qquad u_\varepsilon = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{1}$$

де Δ^2 – бігармонічний оператор, ν – зовнішня нормаль до межі $\partial\Omega$, а m – дійсний параметр. Оскільки на $\partial\omega_\varepsilon$ функція q_ε зазнає розриву, то додатково вимагатимемо виконання умов спряження

$$[u_\varepsilon]_{\partial\omega_\varepsilon} = \left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}\right]_{\partial\omega_\varepsilon} = [\Delta u_\varepsilon]_{\partial\omega_\varepsilon} = \left[\frac{\partial \Delta u_\varepsilon}{\partial n}\right]_{\partial\omega_\varepsilon} = 0, \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47A75; Secondary 35B25.

де n – вектор нормалі до $\partial\omega_\varepsilon$.

У статті вивчено випадок, коли параметр m більший, ніж порядок диференціального оператора, тобто $m > 4$. Саме у цьому випадку задача (1) є моделлю композитної пластини, якій властивий ефект локальних коливань Е. Санчез-Паленсіі. Дамо математичне означення цього виду власних коливань.

Означення 1. *Нехай λ_ε і u_ε – власне значення і нормована у просторі $W_2^2(\Omega)$ власна функція задачі (1). Будемо говорити, що пара $(\lambda_\varepsilon, u_\varepsilon)$ моделює локальну форму коливань нашої системи, якщо $\lambda_\varepsilon \to 0$ та $u_\varepsilon \to 0$ у просторі $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$.*

Ми встановили, що спектр задачі (1) при $m > 4$ складається із трьох зліченних серій Λ_{m-1}, Λ_{m-3} та Λ_{m-4} нескінченно малих власних значень, де номер серіі вказує на порядок малості власних значень при $\varepsilon \to 0$. Однак, лише власним значенням серії Λ_{m-4} відповідають високочастотні форми коливань, зосереджені в околі многовиду γ.

2. Двочленна асимптотика власних значень серії Λ_{m-4}. Без втрати загальності візьмемо $m = 5$, бо в головному поведінка при $\varepsilon \to 0$ власних значень λ_ε та власних функцій u_ε однакова для всіх $m > 4$.

В області ω_ε введемо локальні координати (s, n), де s – натуральний параметр кривої γ, а $n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ – орієнтована віддаль до неі вздовж нормалі. Нехай у цих координатах густина збурення має вигляд $q_\varepsilon(x) = q(n/\varepsilon)$.

Зауваження 1. У загальному випадку, коли функція q_ε залежить від змінної s, питання побудови асимптотичних розвинень залишається відкритим.

Будемо шукати асимптотику власних значень серіі Λ_{m-4}, де $m = 5$, та відповідних власних функцій у вигляді

$$\lambda_\varepsilon \sim \varepsilon(\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \dots), \qquad \text{де } \lambda_0 \neq 0, \tag{3}$$

$$u_\varepsilon(x) \sim \sqrt{\varepsilon}\big(v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \varepsilon^2 v_2(x) + \dots\big), \qquad \text{коли } x \in \Omega \setminus \omega_\varepsilon, \tag{4}$$

$$u_\varepsilon(x) \sim \varepsilon\sqrt{\varepsilon}\big(w_0(s, n/\varepsilon) + \varepsilon w_1(s, n/\varepsilon) + \dots\big), \qquad \text{коли } (s, n) \in \omega_\varepsilon. \tag{5}$$

Зауваження 2. Множники $\sqrt{\varepsilon}$ та $\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$ у рядах (4), (5) вибрані з умови обмеженості норми функції u_ε у просторі $W_2^2(\Omega)$. Вважаємо також, що ряд (5) має вказаний вигляд у кожній локальній карті скінченного відкритого покриття ε-околу γ.

Введемо "швидку" змінну $\xi = n/\varepsilon$. У координатах (s, ξ), де $\xi \in (-1, 1)$, а s пробігає криву γ (надалі писатимемо $s \in \gamma$) оператор Лапласа має вигляд

$$\Delta = \frac{1}{\varepsilon^2(1 - \varepsilon\xi k(s))}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left((1 - \varepsilon\xi k(s))\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial s}\left((1 - \varepsilon\xi k(s))^{-1}\frac{\partial}{\partial s}\right)\right),$$

де $k(s)$ – кривина кривої γ в точці $(s, 0)$. Тоді для бігармонічного оператора правильне асимптотичне розвинення

$$\Delta^2_{\xi,s} = \varepsilon^{-4}L_0 + \varepsilon^{-3}L_1 + \varepsilon^{-2}L_2 + \dots,$$

де перші коефіцієнти ряду мають вигляд

$$L_0 = \frac{\partial^4}{\partial \xi^4}, \quad L_1 = -2k(s)\frac{\partial^3}{\partial \xi^3}, \quad L_2 = -k(s)^2\Big(2\xi\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\Big) + 2\frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial s^2}.$$

Підставляючи ряд (4) у задачу (1), отримаємо

$$\Delta^2 v_0 = 0, \quad x \in \Omega \setminus \gamma, \quad v_0 = \frac{\partial v_0}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{6}$$

Для коефіцієнтів ряду (5) в області збурення $(s,\xi) \in \gamma \times (-1,1)$ маємо

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^4} - \lambda_0 q(\xi) w_0 = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial \xi^4} - \lambda_0 q(\xi) w_1 = \lambda_1 q(\xi) w_0 + 2k(s)\frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi^3}. \tag{8}$$

На межі кільця ω_ε ряди (4), (5) повинні задовольняти умови спряження (2). Звідси для перших членів цих рядів маємо рівності

$$v_0|\gamma = 0, \qquad \frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_-} = \frac{\partial w_0}{\partial \xi}(s,-1), \qquad \frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_+} = \frac{\partial w_0}{\partial \xi}(s,1), \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2}(s,-1) = \frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi^3}(s,-1) = 0, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2}(s,1) = \frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi^3}(s,1) = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2}(s,-1) = (\Delta v_0)\big|_{\gamma_-}, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2}(s,1) = (\Delta v_0)\big|_{\gamma_+}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^3}(s,-1) = 0, \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^3}(s,1) = 0, \tag{12}$$

де $g|_{\gamma_\pm}$ – односторонні границі функції g на кривій γ.

Згідно з (7), (10) число λ_0 повинно бути власним значенням оператора

$$(Af)(\xi) = \frac{1}{q(\xi)}\frac{d^4 f}{d\xi^4}(\xi), \quad D(A) = \{f \in W_2^4(-1,1) | f''(\pm 1) = f'''(\pm 1) = 0\} \tag{13}$$

у ваговому просторі $L_2(q;[-1,1])$, бо інакше функція w_0 є тотожним нулем. А тоді з умов (6), (9) матимемо, що v_0 також дорівнює нулю як бігармонічна функція в області $\Omega \setminus \gamma$, яка на межі $\partial\Omega \cup \gamma$ цієї області справджує однорідні умови Діріхле.

Подальша побудова формальної асимптотики можлива лише тоді, коли крайова задача (8), (11), яка залежить від s як від параметра, матиме розв'язок. Необхідну та достатню умову його існування можна отримати інтегруванням частинами рівняння (8), яке помножене на функцію w_0. Використавши рівності (9)-(12), цю умову можна записати так

$$\left[\frac{\partial v_0}{\partial n}\Delta v_0\right]_\gamma + 2k(s)\int_{-1}^{1} w_0 \frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi^3}(s,\xi)\,d\xi + \lambda_1 \int_{-1}^{1} q w_0(s,\xi)^2\,d\xi = 0.$$

Тепер ми можемо сформулювати задачу для головних членів рядів (3)-(5):

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^4}(s,\xi) - \lambda_0 q(\xi) w_0(s,\xi) = 0, \qquad \xi \in (-1,1), \quad s \in \gamma, \tag{14_0}$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2}(s,\pm 1) = \frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi^3}(s,\pm 1) = 0, \tag{14_1}$$

$$\Delta^2 v_0(x) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \gamma, \tag{14_2}$$

$$v_0 = \frac{\partial v_0}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad v_0\big|_\gamma = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_\pm} = \frac{\partial w_0}{\partial \xi}(s,\pm 1), \tag{14_3}$$

$$\left[\frac{\partial v_0}{\partial n}\Delta v_0\right]_\gamma + 2k(s)\int_{-1}^{1} w_0 \frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi^3}(s,\xi)d\xi + \lambda_1 \int_{-1}^{1} q w_0(s,\xi)^2 d\xi = 0, \tag{14_4}$$

Отже, пара (λ_0, λ_1) повинна бути "власним значенням", а (w_0, v_0) – власним вектором двопараметричної спектральної задачі (14) з нелінійною умовою спряження на кривій γ.

3. Дослідження спектру двопараметричної задачі. Введемо для задачі (14) природне угагальнення поняття власного значення та власного вектора. Далі ми покажемо, що класичне означення спектру (як доповнення до резольвентної множини в $\mathbb{C}^2$) у даному випадку не має сенсу.

Означення 2. *Точку $(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{C}^2$ називатимемо власним значенням задачі (14), якщо їй відповідає нетривіальний розв'язок (w_0, v_0) цієї задачі.*

Лема. *Нехай $q(\xi)$ є вимірною і додатною функцією, а $\lambda > 0$ та y – власне значення та власна функція задачі*

$$y^{(\mathrm{iv})} - \lambda q(\xi) y = 0, \quad y''(\pm 1) = y'''(\pm 1) = 0. \tag{15}$$

Тоді числа $y'(-1)$ та $y'(1)$ не дорівнюють нулю.

Доведення (Р. Гринів). Припустимо, що $y'(-1) = 0$. Не зменшуючи загальності, покладемо $y(-1) = 1$. Тоді

$$y(\xi) = 1 + \lambda \int_{-1}^{\xi} ds \int_{-1}^{s} dt \int_{-1}^{t} d\sigma \int_{-1}^{\sigma} q(\tau) y(\tau) d\tau. \tag{16}$$

Введемо позначення $\alpha = \sup\{\beta \in [-1,1] \,:\, y(x) > 0, x \in [-1,\beta)\}$. Якщо $\alpha < 1$, то $y(\alpha) = 0$. Але згідно з рівністю (16) маємо, що $y_0(\alpha) \geqslant 1$. Отже, $\alpha = 1$ і $y(x) > 0$ на $[-1,1]$. Тоді $y'''(1) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} q(x) y(x) dx > 0$, що суперечить умові $y'''(1) = 0$. Тому $y'(-1) \neq 0$. Так само доводимо, що $y'(1) \neq 0$.

Наслідок. *Усі додатні власні значення задачі (15) є простими.*

Доведення. Якщо власному значенню λ відповідають дві лінійно незалежні власні функції y_1 і y_2, то похідна функції $y(\xi) = y_2'(1)y_1(\xi) - y_1'(1)y_2(\xi)$ дорівнює нулю в точці $\xi = 1$. Але це суперечить лемі.

Оскільки ми вивчаємо асимптотику серії Λ_{m-4}, тобто для $m = 5$ асимптотику власних значень порядку ε, то λ_0 – *додатне* власне значення оператора A (або задачі (15)). Згідно з наслідком, будь-який нетривіальний розв'язок w_0 задачі (14_0), (14_1) має вигляд

$$w_0(s, \xi) = a(s)W(\xi), \tag{17}$$

де a – довільна ненульова функція на γ, а W – власна функція задачі (15), яка відповідає власному значенню λ_0. Нехай також W справджує умови нормування

$$\int_{-1}^{1} q(\xi)W^2\,d\xi = 1, \quad W'(-1) > 0. \tag{18}$$

Тепер остання рівність (14_3) матиме вигляд

$$\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_\pm} = a(s)W'(\pm 1).$$

Згідно із лемою, числа $W'(-1)$ та $W'(1)$ не дорівнюють нулю. Позначимо їх β_- та β_+ відповідно. Тоді отримаємо формулу

$$a(s) = \beta_-^{-1}\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_-} = \beta_+^{-1}\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_+}, \tag{19}$$

а також умову для нормальної похідної функції v_0 на кривій γ

$$\beta_-\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_+} - \beta_+\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_-} = 0.$$

Зображення (17) також дає змогу позбутися нелінійності в умові (14_4):

$$\beta_+(\Delta v_0)\big|_{\gamma_+} - \beta_-(\Delta v_0)\big|_{\gamma_-} + \beta_+^{-1}\big(k(s)(\beta_-^2 - \beta_+^2) + \lambda_1\big)\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_+} = 0.$$

Тут ми скористались формулою (19) і рівністю $\int\limits_{-1}^{1} WW'''d\xi = \frac{1}{2}(\beta_-^2 - \beta_+^2)$.

Отже, число λ_1 і функція v_0 повинні справджувати задачу

$$\begin{aligned}
&\Delta^2 v_0 = 0, \quad x \in \Omega \setminus \gamma, \qquad v_0 = \frac{\partial v_0}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega,\\
&v_0\big|_\gamma = 0, \quad \beta_-\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_+} - \beta_+\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_-} = 0,\\
&\beta_+^2(\Delta v_0)\big|_{\gamma_+} - \beta_+\beta_-(\Delta v_0)\big|_{\gamma_-} + \big(k(s)(\beta_-^2 - \beta_+^2) + \lambda_1\big)\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_{\gamma_+} = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Зауваження 3. Розглянемо матричний лінійний оператор

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad A_{kl} : H_l \to H_k, \quad k, l = 1, 2,$$

який діє у гільбертовому просторі $\mathbb{H} = H_1 \times H_2$ та двопараметричну спектральну задачу

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Матрицю $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ можна трактувати як точку простору $\mathbb{C}^2$. Будемо говорити, що Λ належить *резольвентній множині* $\rho(\mathbb{A})$ оператора $\mathbb{A}$, якщо оператор $\mathbb{A}-\Lambda$ має обмежений обернений в $\mathbb{H}$, інакше — Λ є *точкою спектру* $\sigma(\mathbb{A})$.

Оминаючи деталі, скажемо, що задачі (20) відповідає деякий оператор $B(W) = B(\beta_-, \beta_+)$ в просторі $L_2(\gamma)$, а задачі (14) — матричний оператор

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B(\cdot) \end{pmatrix} \quad \text{у просторі} \quad \mathbb{H} = L_2(q; [-1, 1]) \times L_2(\gamma).$$

У нашому випадку розв'язність системи

$$\begin{cases} Ax_1 \qquad - \lambda_1 x_1 = f_1, \\ B(x_1)x_2 - \lambda_2 x_2 = f_2 \end{cases}$$

залежить не лише від Λ, але й вектора f_1, який через x_1 впливає на оператор $B(x_1)$. Отже, немає сенсу говорити про спектр оператора $\mathbb{A}$. Надалі під спектром задачі (14) розуміємо множину всіх власних значень в сенсі означення 2.

Теорема. *Спектр задачі (14) дійсний і лежить у півплощині $\lambda_0 \geqslant 0$ простору $\mathbb{R}^2_{\lambda_0,\lambda_1}$. Крім того,*

(i) Якщо (λ_0, λ_1) точка спектру, то λ_0 - власне значення задачі (15).

(ii) У півплощині $\lambda_0 > 0$ спектр складається із ізольованих точок (λ_0, λ_1), де λ_1 - власне значення задачі (20). Всі такі власні значення (λ_0, λ_1) мають скінченну кратність.

(iii) Промінь $P_0 = \{(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_0 = 0, \lambda_1 \geqslant 0\}$ належить спектру і кожна його точка має нескінченну кратність.

Доведення. Частина (i) була доведена у ході побудови асимптотики. Оскільки, згідно із наслідком, власне значення $\lambda_0 > 0$ є простим, то за його власною функцією, нормованою умовами (18), однозначно знаходяться числа $\beta_\pm$. Отже, кожному $\lambda_0 > 0$ відповідає задача (20) з деякими $\beta_\pm$. Друга компонента власного вектора (w_0, v_0) не повинна дорівнювати нулю, бо тоді дорівнюватиме нулю і функція a (див. (19)), а, отже, і перша компонента w_0. Тому для доведення частини (ii) треба показати, що задача (20) має дійсний дискретний спектр. Введемо гільбертовий простір

$$\mathcal{H}^l_{\beta_\pm} = \left\{ \varphi \in W^s_2(\omega \setminus \gamma) : \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \partial\omega, \quad \varphi_{|_\gamma} = 0, \quad \beta_+ \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\gamma+} = \beta_- \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\gamma-} \right\}, \quad l > 3/2.$$

Тоді задачі (20) відповідає інтегральна тотожність

$$\beta_+^2 \int\limits_\omega \Delta v_0 \Delta\overline{\varphi}\, dx + (\beta_+^2 - \beta_-^2) \int\limits_{\gamma_+} k(s) \frac{\partial v_0}{\partial n} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n}\, ds - \lambda_1 \int\limits_{\gamma_+} \frac{\partial v_0}{\partial n} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n}\, ds = 0, \quad \varphi \in \mathcal{H}^2_{\beta_\pm}. \tag{21}$$

Нехай $\varkappa_0 = (\beta_+^2 - \beta_-^2) \min\limits_{s\in\gamma} k(s)$ та $\varkappa = \max\{-\varkappa_0, 0\}$. Розглянемо неперервні ермітові форми

$$a_{\beta_\pm}(u,v) = \beta_+^2 \int\limits_\omega \Delta u \Delta \overline{v}\, dx + \int\limits_{\gamma^+} \big(\varkappa + (\beta_+^2 - \beta_-^2) k(s)\big) \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial \overline{v}}{\partial n}\, ds \quad \text{в} \quad \mathcal{H}^2_{\beta_\pm},$$

$$b_\gamma(u,v) = \int\limits_{\gamma^+} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial \overline{v}}{\partial n}\, ds \quad \text{в} \quad \mathcal{H}^l_{\beta_\pm}, \quad 3/2 < l \leqslant 2.$$

Окрім того, форма $a_{\beta_\pm}$ є додатновизначена. Тоді тотожність (21) набуває вигляду

$$a_{\beta_\pm}(v_0, \varphi) - (\lambda_1 + \varkappa) b_\gamma(v_0, \varphi) = 0, \quad \varphi \in \mathcal{H}^2_{\beta_\pm}.$$

Оскільки вкладення $H^2_{\beta_\pm} \subset H^l_{\beta_\pm}$ є компактним для $l < 2$, то задачі (20) відповідає самоспряжений компактний оператор C в просторі $H^2_{\beta_\pm}$, дія якого визначена рівністю

$$a_{\beta_\pm}(Cu, v) = b_\gamma(u,v) \qquad \text{для всіх} \quad u, v \in H^2_{\beta_\pm}.$$

Отже, спектр задачі (20) дійсний дискретний і обмежений знизу числом $-\varkappa$.

Точки променя P_0 не мають стосунку до асимптотики локальних коливань, тому опишемо лише ідею доведення частини (iii). Нехай у зауваженні 3 число λ_0 є кратним власним значенням оператора A, а $g_\alpha = g_1 + \alpha g_2$ – елемент відповідного власного підпростору. Тоді власні значення оператора $B_\alpha = B(g_\alpha)$ будуть, взагалі кажучи, неперервними функціями параметра α. Залишилося зауважити, що $\lambda_0 = 0$ є двократним власним значенням оператора A. Теорему доведено.

Отже, ми побудували формальні асимптотичні розвинення власних значень задачі (1) серії Λ_{m-4} і відповідних власних функцій, які моделюють локальні коливання в околі многовиду γ:

$$\lambda_\varepsilon \sim \varepsilon\lambda_0 + \varepsilon^2\lambda_1 + \dots,$$

$$u_\varepsilon(x) \sim \begin{cases} \sqrt{\varepsilon} v_0(x) + \dots & \text{коли} \ \ x \in \Omega \setminus \omega_\varepsilon, \\ \varepsilon\sqrt{\varepsilon} \left.\dfrac{\partial v_0}{\partial n}\right|_{\gamma_+}\!(s) \cdot \dfrac{W(n/\varepsilon)}{W'(1)} + \dots, & \text{коли} \ \ (s,n) \in \omega_\varepsilon, \end{cases}$$

де (λ_0, λ_1) – ізольована точка спектру задачі (14), W – власна функція задачі (15), яка відповідає власному значенню λ_0 і v_0 – власна функція задачі (20) для власного значення λ_1.

1. Sanchez-Palensia E. *Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses*// Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics. Berlin: Springer-Verlag,1984.– P.346-368.

2. Sanchez-Palensia E., Tchatat H. *Vibration de systems elastiques avec des masses concentrees* // Rend. Sem. Mat. Univers. Politech. Torino.– 1984.– V.42, N3.– P.43-63.

3. Olejnik O.A. *Homogenization problems in elasticity.Spectrum of singularily perturbed operators*// Non-classical continuum mechanics. 1987. Lecture Notes series,122.– Cambridge University Press.– P.188-205.

4. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А., Соболева Т.С. *О собственных колебаниях струны с присоединенной массой* // Сибирский математический журнал. – 1988. – Т.29, N5. – С.71-91.

5. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М: Изд-во МГУ, 1990.– 311 с.

6. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А. *Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями* // Тру- ды Математ. ин–та им. В.А.Стеклова.— 1990.— Т.192.— С.42–60

7. Головатый Ю.Д. *Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами: эффект локальних колебаний*// Труды Московского мат. о-ва.– 1992.– Т.54.– С.29-72.

8. Lobo M., Perez E. *On vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary* // Math.Models Methods Appl. Sci. – 1993. – Vol.3, No.2. – P.249–273.

9. Lobo M., Perez E. *Vibrations of a membrane with many concentrated masses near the boundary*// Math.Models Methods Appl. Sci. – 1995. – Vol.5, No.5. – P.565–585.

10. Leal C., Sanchez-Hubert *Perturbation of eigenvalues of membrane with a concentrated mass* // Quart. Appl. Math.– 1989.– V.47.– P.93-103.

11. Nazarov S.A. *Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions* // Mathematical Modelling and Numerical Analysis.— 1993.— V.7,N6.— P.777–799.

12. Назаров С.А. *Об одной задаче Санчес-Паленсия с краевыми условиями Неймана*// Изв. ВУЗов, Матем.— 1989.— N11.— С.60–66.

Стаття надійшла до редколегії 29.04.1998

УДК 511.364

Холявка Я. М. О приближении инвариантов эллиптических функций Вейєрштрасса// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.51.— С.5–11.

Пусть $\wp_1(z), g_{2,1}, g_{3,1}, 2\omega, 2\omega_1$ и $\wp_2(z), g_{2,2}, g_{3,2}, 2\omega, 2\omega_2$ - принятые обозначения теории эллиптических функций Вейєрштрасса. Получена оценка совместного приближения $\omega, g_{2,1}, g_{3,1}, g_{2,2}, g_{3,2}$.
Библиогр. 6 назв.

УДК 512.553

Вовк Р. В. Спектр расслоенных произведений колец// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.51.— С.12–21.

Исследуются кручения над расслоенным произведением колец и спектр как множество первичных кручений. Изучается связь между спектром расслоенного произведения колец и спектрами соответствующих сомножителей.
Библиогр. 18 назв.

УДК 512.58

Левицкая В. С. О продолжении контравариантного функтора C_p на категории многозначных отображений// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.51.— С.22–26.

Доказано, что контравариантный функтор C_p (пространств функций в топологии поточечной сходимости) имеет продолжение на категорию тихоновских пространств и конечнозначных отображений и не имеет продолжения на категорию тихоновских пространств и компактнозначных отображений.
Библиогр. 8 назв.

УДК 512.581.2

Кокорузь Р. Е. О характеризации целочисельного объекта в декартово замкнутой категории// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.51.— С.27–32.

Рассматривается вопрос существования объекта целых чисел в декартово замкнутой категории. Найдено необходимое и достаточное условие существования такого объекта и получена его характеризация как универсального обьекта в некоторой вспомогательной категории. В случае произвольного элементарного топоса доказана эквивалентность аксиомы объекта целых чисел и аксиомы объекта натуральных чисел.
Библиогр. 5 назв.

УДК 517.535

Луцишин М. Р. О максимальном члене целого ряда Дирихле с комплексными показателями и монотонными коэффициентами// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.51.— С.33–36.

Устанавливаются условия, при которых для целой функции $F(z)$, представленной рядом Дирихле, выполняется соотношение $F(z) = (1 + o(1))\mu(z)$ при $|z| \to +\infty$ $(z \in \gamma)$ вне достаточно малого множества E, $\iint_E \frac{dx\,dy}{|z|^2} < +\infty$, $z = x + iy$, где $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln|\mu(tz)|}{t} = +\infty\}$ и $\mu(z)$ — максимальный член ряда Дирихле.
Библиогр. 1 назв.

УДК 517.95

Флюд В. М. Асимптотика решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности с сингулярным коэффициентом// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.51.— С.37–41.

Рассматривается математическая модель расспространения тепла в сильно неоднородном композитном стержне. Для этой задачи построено асимптотическое разложение решения, содежащее два масштаба времени.
Библиогр. 7 назв.

УДК 531

Доманский П.П. Об условиях устойчивости движения по двум метрикам упругих тел в линеаризованной постановке задачи// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.51.— С.42–54.

Получены достаточные условия устойчивости по двум конкретным метрикам нулевого решения линеаризованного уравнения устойчивости движения изотропных упругих тел, находящихся под воздействием силового нагружения, при кинематических, динамических и смешанных граничных условиях. Исследование условий устойчивости иллюстрируется на телах из материалов Мурнагана и стандартных материалов первого и второго порядков.

Библиогр. 6 назв.

УДК 517.95

Лавренюк С. П. О единственности решения некоторых вырождающихся эволюционных систем// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.51.— С.55–60.

В работе получены достаточные условия единственности обобщенного решения смешанной задачи для одной эволюционной системы со второй производной по времени, вырождающейся на начальной плоскости в эллиптическую систему.

Библиогр. 11 назв.

УДК 517.95

Сымотюк М. М., Задорожная Н. Н. Нелокальная краевая задача для нелинейных уравнений с дробной производной по времени с переменными коэффициентами// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.51.— С.61–69.

Установлены условия существования и единственности решения нелокальной краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения с регуляризованной дробной производной Лиувилля-Римана по времени с переменными коэффициентами. Метод решения основывается на использовании представления решения в виде ряда Фурье и сведении рассматриваемой задачи к некоторому интегро- функциональному уравнению.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.956.25

Борсук М. В., Портнягин Д. В. Барьеры в конусе для вырождающегося квазилинейного эллиптического оператора// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.51.— С.70–75.

Построены барьерные функкции граничной задачи для квазилинейного эллиптического оператора второго порядка дивиргентного вида в конусе.

Библиогр. 12 назв.

УДК 539.3

Процюк Б. В., Синюта В. М. Метод функции Грина в одномерных нестационарных задачах теплопроводности многослойных пластин// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.51.— С.76–84.

Предложен способ построения функции Грина одномерных нестационарных задач теплопроводности многослойных пластин. Используется интегральное преобразование Лапласа, фундаментальная система решений соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения с разрывными коэффициентами и обобщенные функции. Проиллюстрировано ее применение к решению нестационарной тепловой задачи трения двух пакетов пластин, находящихся в условиях конвективного теплообмена.

Библиогр. 7 назв.

УДК 517.95

Бокало Н. М., Сикорский В. М. О свойствах решений задачи без начальных условий для уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.51.— С.85–98.

Доказано существование и единственность обобщённого решения задачи без начальных условий (задачи Фурье) для уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации. При этом не требуется никаких условий на поведение обобщённого решения и рост правой части уравнения при $t \to -\infty$. Показана непрерывная зависимость решения рассматриваемой задачи от исходных данных. Установлены также некоторые свойства обобщённых решений этой задачи (ограниченность, периодичность, почти периодичность).

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.956

Береговая Г. И., Кирилич В. М. Об одном варианте гиперболической задачи Стефана в криволинейном секторе// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.51.— С.99–107.

Рассматривается задача с неизвестными границами для полулинейной гиперболической системы уравнений первого порядка в случае вырождения линии задания начальных условий в точку, при этом некоторые характеристики, выпущенные из вершины сектора, попадают в область. С помощью метода характеристик доказывается локальная по t теорема существования и единственности обобщенного решения задачи.
Библиогр. 6 назв..

УДК 517.95

Пабыривская Н. В. Определение двух неизвестных коэффициентов в обратных задачах для параболического уравнения// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.51.— С.108–117.

Рассматриваются две обратные задачи для параболического уравнения, в котором два неизвестных коэффициента зависят от временной переменной. С помощью теоремы Шаудера выведены условия существования решения этих задач, а также установлены условия единственности этих решений.
Библиогр. 7 назв.

УДК 517.927.25

Бабыч Н. А., Головатый Ю. Д. Спектральная задача Неймана для сингулярно возмущенного дифференциального оператора четвертого порядка// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.51.— С.118–127.

В работе исследуются собственные колебания свободного на концах стержня с локальным возмущением плотности. В зависимости от величины присоединенной массы изучено поведение собственных значений и собственных функций системы. Получены задачи для главных членов их асимптотических разложений и соответствующие оценки для остаточных членов. Самым интересным является случай, свойственный композитным системам, когда при достаточно больших возмущениях массы стержня наблюдается эффект локальных колебаний.
Библиогр. 9 назв.

УДК 517.576

Лянце В. Э., Карабин О. О. Об операторе умножения на независимую переменную// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.51.— С.128–133.

Основой этой работы есть Внутренняя Теория Множеств Нельсона. Найдено условия околостандартности для оператора умножения на независимую переменную и установлена его тень. Поскольку каждый нормальный оператор есть унитарно эквивалентный оператору умножения на независимую переменную, то получено условия околостандартности и способ определения тени произвольного нормального оператора.
Библиогр. 5 назв.

УДК 517.927.25

Головатый Ю.Д., Лавренюк А.С. О локальных собственных колебаниях Э. Санчез-Паленсии для пластины с возмущением плотности в окрестности одномерного многообразия// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1998— Вып.51.— С.134–141.

В работе рассматривается задача на собственные значения для бигармонического оператора с краевыми условиями Дирихле, которая описывает колебательную систему с локальным возмущением плотности в окрестности одномерного многообразия. Изучен эффект локальных собственных колебаний Э. Санчез-Паленсии. Получена двухпараметрическая спектральная задача на главные члены асимптотики.
Библиогр. 10 назв.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити нові результати автора з повним їх доведенням. Не рекомендується робити великі огляди вже опублікованих результатів. Посилання на неопубліковані роботи не допускаються.

2. Текст статті повинен бути підготовлений на комп'ютері, як правило, українською або англійською мовами. До редакції подається:

– два екземпляри статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

– анотації англійською та російською мовами, які повинні містити прізвище автора та назву статті;

– електронний варіант статті та анотацій на дискеті 3,5", яка буде повернена автору (тексти можна надіслати за адресою *holovaty@yahoo.com*)

– довідка про автора (співавторів), в якій треба вказати ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, домашню адресу, телефон та електронну адресу.

Обсяг статті не повинен перевищувати 12 сторінок при розмірі шрифтів 12pt. На першій сторінці вказується номер УДК.

3. Вимоги до набору:

– текст статті створюється в одній з версій TEX'у (формати Plain-TEX, AMS-TEX чи LATEX). Рекомендуємо використовувати стильовий файл amsppt.sty; тексти, набрані в редакторах ChiWriter та Word не приймаються;

– номери формул ставляться з правого боку; нумерувати треба лише формули, на які є посилання;

– в посиланнях на теорему з монографії вказуєть сторінка, на якій вона знаходиться.

4. Рисунки до статті подаються у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунку чи його номер не входять у зображення і створюються засобами TEX'у. Реальний розмір графічного зображення вибирається з міркувань, що воно буде друкуватися на принтері з розділювальною здатністю 600 dpi.

5. Література подається загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті. Подаємо зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів і т. п.):

1. Грабович А.І. Назва. – К.: Наукова думка. 1985. – 306 с. *або*
   Грабович А.І. Назва: В 2-х т.– К.: Наукова думка, 1985.–Т.1.–306 с.
2. Кравчук О.М. *Назва*: // Мат. сб.–1985.–2, №2 2.–С.4–20.
3. Михайленко Г.Д. Назва.– М., 1993.– 9 с.– (Препринт/НАН України. ІППММ; N80.1).
4. Коваленко О. В. Назва: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – К., 1977, – 30 с.
5. Сенів С.М. *Назва*.–К., 1992.– 17 с. – Деп. в ДНТБ України, №2020-1995.
6. Муравський В.К. *Назва* // Нелінійні диференціальні рівняння: Тези доповідей. (Київ, 27 сер.–2 вер. 1994 р.).– Київ, 1994.–С. 540–551.