де $p = 2,3,....$ $K_\tau > 0$ – константа, окремо отримана для кожного методу. В даному випадку (22) вказує на порядок збіжності рівний $\tau + 1$ для наближень до $m+1$-го. Далі для визначення змінного порядку $\rho$, що залежить від $p$, маємо рівняння

$$\rho = 1 + \frac{\tau}{\rho^{p-1}}.$$

Література.

1. М.Я.Бартіш, А.І.Чипурко. Про одну модифікацію методу Гаусса - Ньютона, Математичні Студії. - 1998. - Т.10, №1. -85-92. 2. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений.- М. Мир, 1988.- 440 с. 3. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. - М. Мир, 1975.- с. 4. Ульм С.Ю. Об обобщенных разделенных разностях. I. Изд. АН ЭССР. Физика. Матем., 1967, 16, N1, С.13-26.

*Bartish M.Ja., Nykolajchuk O.V., Chypurko A.I.*

## *About Some Difference Modifications of Gauss-Newton Method for a Nonlinear Least Squares Problem with Small Residual Norm*

*In this paper we study the difference analogue of the generalized scheme of the modifications of Gauss-Newton method, proposed in [1]. There are presented the conditions of convergence and estimates of the accuracy of the method for solving Nonlinear Least Squares Problem in the case when the residual is sufficiently small but not equal zero. We determine the influence of valid parameter on rate of convergence of process.*

*Стаття надійшла до редколегії 8.12.1998*

УДК 539.3

*П.П.Вагін, Р.Б.Малець, Г.А.Шинкаренко*

# Квазілінеаризація задачі термопружності для гнучких оболонок з деформівною нормаллю

Дослідження нелінійної теорії оболонок типу Тимошенка з врахуванням обтиску нормального елемента можна знайти в працях

[1,2,3]. У даній роботі сформульовано крайову задачу термопружності для геометрично нелінійної теорії оболонок з деформівною нормаллю та наведено схему квазілінеаризації відповідної варіаційної задачі.

Під квазістатичною задачею термопружності розуміють таку задачу, в котрій не враховуються ефект пов'язаності температурного поля і поля деформацій, а також сили інерції, обумовлені нестаціонарним температурним полем. Перший етап розв'язування такої задачі полягає в знаходженні температурного поля тонкої оболонки, що в свою чергу зводиться до розв'язування початково-крайової задачі теплопровідності. Потім за відомим температурним полем в кожний момент часу визначають відповідний напружено-деформований стан оболонки, що виникає під дією заданого силового навантаження в умовах нерівномірного нагріву оболонки.

Тут ми обмежимося розглядом процесу нелінійного деформування ізотропних оболонок з деформівною нормаллю під дією силових навантажень та нерівномірного нагріву.

Математична модель задачі базується на геометрично нелінійній теорії оболонок із урахуванням поперечних деформацій за зсувною моделлю Тимошенка (шестимодальний варіант).

**1. Постановка крайової задачі квазістатичної термопружності для геометрично нелінійної теорії тонких оболонок з деформівною нормаллю.**

Нехай оболонка постійної товщини $h$ в початковому (недеформованому) стані займає область $V$, обмежену поверхнею $S$, яка складається з двох лицьових поверхонь $\Omega_+$, $\Omega_-$ та бічної поверхні $\Sigma$:

$$V = \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega, -h/2 \le \alpha_3 \le h/2\right\},$$

$$S = \Omega_+ \cup \Omega_- \cup \Sigma .$$

Відносимо серединну поверхню оболонки $\Omega$ до криволінійної ортогональної системи координат $\alpha_i (i = 1,2,3)$, причому напрямок $\alpha_3$ нормальний до серединної поверхні $\Omega$, а координатні лінії $\alpha_1 = const$ та $\alpha_2 = const$ співпадають з лініями головних кривин $k_1 = k_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $k_2 = k_2(\alpha_1, \alpha_2)$. Серединна поверхня оболонки має неперервну в площині $(\alpha_1, \alpha_2)$ за Ліпшицем межу $\Gamma$ ($\Gamma \subset \Sigma$).

Згідно кінематичної гіпотези теорії оболонок типу Тимошенка з нежорсткою нормаллю, яка полягає в тому, що нормальний елемент недеформованої оболонки після її навантаження лишається прямолінійним, але може змінювати свою довжину і не обов'язково є ортогональним до деформованої серединної поверхні, переміщення довільної точки оболонки $U = \{U_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\}_{i=1}^{3}$ повністю визначаються переміщеннями $u_i$ та поворотами $\gamma_i$ нормалі її серединної поверхні

$$U_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \gamma_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad i = 1,2,3. \tag{1.1}$$

Розв'язування крайової задачі квазістатичної термопружності для геометрично нелінійної теорії тонких зсувних (з деформівною нормаллю) оболонок полягає у знаходженні такого вектора узагальнених переміщень $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$, що відповідні вектори компонент тензора деформації $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_i\}_{i=1}^{11} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}, \chi_{13}, \chi_{23})^T$, а також симетричних зусиль і моментів $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_i\}_{i=1}^{11} = (N_1, N_2, N_3, S, N_{13}, N_{23}, M_1, M_2, H, M_{13}, M_{23})^T$ задовольняють:

- співвідношення між деформаціями та узагальненими переміщеннями
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{C}_l\, \boldsymbol{u} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{C}_\Omega\, \boldsymbol{u})_{11}^T\, \boldsymbol{E}_\Omega\, \boldsymbol{C}_\Omega\, \boldsymbol{u} \tag{1.2}$$

з врахуванням того, що процес деформування оболонки супроводжується малими деформаціями при немалих кутах повороту довільного нескінченно малого об'ємного елементу оболонки. У співвідношеннях (1.2) перший доданок відповідає лінійній складовій деформаційних компонент, тобто за припущення про малі кути повороту граничним переходом можна отримати деформаційні співвідношення лінійної теорії оболонок;

- рівняння рівноваги
$$\boldsymbol{C}_\sigma \boldsymbol{\sigma}^* + \mathbf{P} = 0, \tag{1.3}$$

де $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^{6} = (P_1, P_2, P_3, m_1, m_2, m_3)^T$ – вектор усереднених характеристик зовнішнього навантаження, $\boldsymbol{\sigma}^* = \{\sigma_i^*\}_{i=1}^{14} = (N_{11}^*, N_{22}^*, N_{33}^*, S_{12}^*, S_{21}^*, N_{13}^*, N_{31}^*, N_{23}^*, N_{32}^*, M_{11}^*, M_{22}^*, H^*, M_{13}^*, M_{23}^*)^T$ – вектор введених зусиль-моментів, які зв'язані з симетричними зусиллями і моментами таким чином:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\sigma}. \tag{1.4}$$

З рівнянь рівноваги (1.3), котрі є лінійними відносно введених зусиль-моментів, граничним переходом можна отримати рівняння рівноваги лінійної теорії оболонок, і як частковий випадок рівняння теорії типу Тимошенка [5] або Кіргофа-Лява [4];

- співвідношення термопружності

$$\boldsymbol{\sigma}^* = B\varepsilon - \frac{\alpha_T E}{1-2\nu}\mathbf{F}_T \tag{1.5}$$

записані згідно гіпотези Дюамеля-Неймана для ізотропного матеріалу оболонки, яка знаходиться в нерівномірному температурному полі [6]. Тут $\boldsymbol{B}$ – матриця пружних постійних, $\alpha_T$ – коефіцієнт лінійного температурного розширення, $E$ – модуль Юнга, $\nu$ – коефіцієнт Пуассона,

$$\mathbf{F}_T = \left\{\mathbf{F}_T^i\right\}_{i=1}^{11} = \left(t_1 h, t_1 h, t_1 h, 0,0,0, t_2\frac{h^3}{12}, t_2\frac{h^3}{12}, 0,0,0\right)^T,$$

де $t_1$, $t_2$ – усереднені за товщиною температурні характеристики;

- статичні крайові умови на частині межі $\Gamma_\sigma \subset \Gamma$

$$G_1\boldsymbol{\sigma}^*\Big|_{\Gamma_\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_g, \tag{1.6}$$

$\boldsymbol{\sigma}_g^* = (N_t, N_s, N_n, M_t, M_s, M_n)$ – вектор заданих крайових зусиль-моментів;

- кінематичні граничні умови на частині межі $\Gamma_u \subset \Gamma$

$$G_2\boldsymbol{u}\Big|_{\Gamma_u} = \boldsymbol{u}_g, \tag{1.7}$$

$\boldsymbol{u}_g = (u_t^B, u_s^B, u_n^B, \gamma_t^B, \gamma_s^B, \gamma_n^B)$ – вектор заданих крайових переміщень.

Повний вигляд матриць $\boldsymbol{C}_l$, $\boldsymbol{C}_\Omega$, $\boldsymbol{E}_\Omega$, $\boldsymbol{C}_\sigma$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, $G_1$, $G_2$, $\mathbf{P}$ та решти матриць, що буде наведено нижче, можна знайти у праці [2].

**2. Варіаційна задача.** У даній роботі для розв'язання крайової задачі (1.1)-(1.7) пропонується використати метод скінченних елементів, заснований на варіаційних принципах. Для статичних задач використовується принцип Лагранжа [5]. Відомо [6], що узагальнений варіаційний функціонал Лагранжа квазістатичної термопружності для геометрично нелінійної теорії тонких зсувних оболонок можна отримати з функціоналу Лагранжа в нелінійній теорії оболонок (де принцип Лагранжа трактується лише як принцип стаціонарності функціоналу повної потенціальної енергії), якщо в ньому замінити густину енергії деформації густиною вільної енергії. Отже серед усіх геометрично можливих переміщень, що задовольняють (1.2)- (1.7), істинними будуть ті переміщення, котрі надають функціоналу:

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\iint_\Omega \varepsilon^T(\boldsymbol{u})\boldsymbol{E}_0 B\varepsilon(\boldsymbol{u})\,d\Omega - \iint_\Omega \frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)}\varepsilon^T(\boldsymbol{u})\mathbf{F}_T\,d\Omega - \\ - \iint_\Omega \boldsymbol{u}^T\mathbf{P}\,d\Omega - \int_\Gamma (G_2\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{\sigma}_g\,d\Gamma \end{aligned} \tag{2.1}$$

стаціонарного значення, тобто:

$$\delta l(\boldsymbol{u}) = 0\,. \tag{2.2}$$

Умова стаціонарності (2.2) функціоналу (2.1) приводить до рівнянь рівноваги (1.3), та до природних (статичних) граничних умов (1.6). При нелінійному деформуванні не існує єдиного мінімуму вище згадуваного функціоналу, оскільки деформації визначаються через переміщення за нелінійними залежностями (1.2).

**3. Квазілінеаризація.** Розкладемо в ряд вираз (2.1) для вільної енергії в околі її $i$ -того наближення до стаціонарного значення і, нехтуючи величинами вище квадратичних, отримаємо

$$l(\boldsymbol{u}_i + \Delta\boldsymbol{u}) = l(\boldsymbol{u}_i) + \delta l(\boldsymbol{u}_i) + \frac{1}{2}\delta^2 l(\boldsymbol{u}_i)\,. \tag{3.1}$$

Тоді приріст вільної енергії

$$l(\boldsymbol{u}_i;\Delta\boldsymbol{u}) = l(\boldsymbol{u}_i + \Delta\boldsymbol{u}) - l(\boldsymbol{u}_i) = \delta l(\boldsymbol{u}_i) + \frac{1}{2}\delta^2 l(\boldsymbol{u}_i)\,, \tag{3.2}$$

враховуючи (2.1), запишемо наступним чином

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{u}_i;\Delta\boldsymbol{u}) = &-\iint_{\Omega}(\Delta\boldsymbol{u})^T \mathbf{P}\,d\Omega - \int_{\Gamma}(G_2\Delta\boldsymbol{u})^T \boldsymbol{\sigma}_g\,d\Gamma - \\ &-\frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)}\iint_{\Omega}\left[\varepsilon(\boldsymbol{u}_i+\Delta\boldsymbol{u}) - \varepsilon(\boldsymbol{u}_i)\right]^T \mathbf{F}_T'\,d\Omega + \\ &+\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[\varepsilon(\boldsymbol{u}_i+\Delta\boldsymbol{u}) - \varepsilon(\boldsymbol{u}_i)\right]^T \boldsymbol{E_0 B}\left[\varepsilon(\boldsymbol{u}_i+\Delta\boldsymbol{u}) - \varepsilon(\boldsymbol{u}_i)\right] d\Omega + \\ &+\iint_{\Omega}\left[\varepsilon(\boldsymbol{u}_i+\Delta\boldsymbol{u}) - \varepsilon(\boldsymbol{u}_i)\right]^T \boldsymbol{E_0 B}\varepsilon(\boldsymbol{u}_i)\,d\Omega. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Зауважимо, що

$$\varepsilon(\boldsymbol{u}_i+\Delta\boldsymbol{u}) - \varepsilon(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{C}_l\Delta\boldsymbol{u} + \left(\boldsymbol{C}_\Omega\,\boldsymbol{u}_i\right)_{11}^T \boldsymbol{E}_\Omega\,\boldsymbol{C}_\Omega\,\Delta\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{C}_\Omega\,\Delta\boldsymbol{u}\right)_{11}^T \boldsymbol{E}_\Omega\,\boldsymbol{C}_\Omega\,\Delta\boldsymbol{u}\,.$$

Нехтуючи величинами, що мають більший ніж другий порядок малості, для приросту вільної енергії остаточно отримаємо

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{u}_i;\Delta\boldsymbol{u}) = &-\iint_{\Omega}(\Delta\boldsymbol{u})^T \mathbf{P}\,d\Omega - \int_{\Gamma}(G_2\Delta\boldsymbol{u})^T \sigma_g\,d\Gamma - \\ &-\frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)}\iint_{\Omega}\left[\boldsymbol{C}_l\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{C}_N(\boldsymbol{u}_i,\Delta\boldsymbol{u})\right]^T \mathbf{F}_T\,d\Omega + \\ &+\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[\boldsymbol{C}_l\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{C}_N(\boldsymbol{u}_i,\Delta\boldsymbol{u})\right]^T \boldsymbol{E_0}\,\boldsymbol{B}\left[\boldsymbol{C}_l\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{C}_N(\boldsymbol{u}_i,\Delta\boldsymbol{u})\right] d\Omega + \\ &+\iint_{\Omega}\left[\boldsymbol{C}_l\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{C}_N(\boldsymbol{u}_i,\Delta\boldsymbol{u})\right]^T \boldsymbol{E_0}\,\boldsymbol{B}\left[\boldsymbol{C}_l\boldsymbol{u}_i + \frac{1}{2}\boldsymbol{C}_N(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_i)\right] d\Omega + \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}\left[C_N(\Delta\boldsymbol{u},\Delta\boldsymbol{u})\right]^T \boldsymbol{E_0}\,\boldsymbol{B}\left[\boldsymbol{C_l u_i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{C_N}(\boldsymbol{u_i},\boldsymbol{u_i})\right]d\Omega\,-$$

$$-\frac{\alpha_T E}{2(1-2\nu)}\iint\limits_{\Omega}\left[C_N(\Delta\boldsymbol{u},\Delta\boldsymbol{u})\right]^T \mathbf{F}_T\,d\Omega.$$

Тут

$$C_N(a,b)=\left(C_\Omega\, a\right)_{11}^T E_\Omega\, C_\Omega\, b\,.$$

Використовуючи скінченноелементну ізопараметричну апроксимацію [7] представимо шуканий вектор переміщень у вигляді

$$\boldsymbol{u}=N\,\boldsymbol{q}\,, \tag{3.5}$$

де $\boldsymbol{q}$ – вектор невідомих вузлових переміщень і поворотів, $\boldsymbol{N}$ – блочно-діагональна матриця апроксимуючих поліномів.

Перетворимо підінтегральні вирази останніх двох інтегралів у формулі (3.4). Для цього введемо вектор

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{u}_i)=\left\{\mathbf{T}_k\right\}_{k=1}^{11}=\boldsymbol{E_0}\,\boldsymbol{B}\left|\boldsymbol{C_l u_i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{C_N}(\boldsymbol{u_i},\boldsymbol{u_i})\right| \tag{3.6}$$

і, використовуючи формули для апроксимацій переміщень (3.5), отримаємо

$$\left[\boldsymbol{C_N}(\Delta\boldsymbol{Nq},\Delta\boldsymbol{Nq})\right]^T \boldsymbol{E_0}\,\boldsymbol{B}\left|\boldsymbol{C_l N q_i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{C_N}(\boldsymbol{Nq_i},\boldsymbol{Nq_i})\right|=$$

$$=\left[\boldsymbol{C_N}(\Delta\boldsymbol{Nq},\Delta\boldsymbol{Nq})\right]^T \mathbf{T}(\boldsymbol{Nq_i})=(\Delta\boldsymbol{q})^T\left[\sum_{k=1}^{11}\mathbf{T}_k(\boldsymbol{Nq_i})\left(\boldsymbol{C_\Omega N}\right)^T \boldsymbol{E_k C_\Omega N}\right]\Delta\boldsymbol{q}\,;$$

$$\left[\left(\boldsymbol{C}_\Omega\Delta\boldsymbol{Nq}\right)_{11}^T\boldsymbol{E}_\Omega\boldsymbol{C}_\Omega\Delta\boldsymbol{Nq}\right]^T\mathbf{F}_T=(\Delta\boldsymbol{q})^T\left[\left(\boldsymbol{C}_\Omega\Delta\boldsymbol{Nq}\right)_{11}^T\boldsymbol{E}_\Omega\boldsymbol{C}_\Omega\boldsymbol{N}\right]^T\boldsymbol{E_0}\mathbf{F}_t=$$

$$=(\Delta\boldsymbol{q})^T\left[\sum_{k=1}^{11}\mathbf{F}_t^k\left(\boldsymbol{C}_\Omega\boldsymbol{N}\right)^T\boldsymbol{E_k C_\Omega N}\right]\Delta\boldsymbol{q}\,.$$

Тоді умова (2.2) стаціонарності функціоналу

$$\frac{\partial\Delta l(\boldsymbol{q_i};\Delta\boldsymbol{q})}{\partial\Delta\boldsymbol{q}}=\mathbf{K}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q_i})\,\Delta\boldsymbol{q}+\mathbf{K}(\boldsymbol{q_i})\,\boldsymbol{q_i}-\mathbf{R}(\boldsymbol{q_i})=0\,. \tag{3.7}$$

Тут використані наступні позначення:

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{q_i})=\iint\limits_{\Omega}\left[\left\{\boldsymbol{C_l}+\left(\boldsymbol{C}_\Omega\boldsymbol{Nq_i}\right)_{11}^T\boldsymbol{E}_\Omega\boldsymbol{C}_\Omega\right\}\boldsymbol{N}\right]^T\boldsymbol{E_0 B}\left[\left\{\boldsymbol{C_l}+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{C}_\Omega\boldsymbol{Nq_i}\right)_{11}^T\boldsymbol{E}_\Omega\boldsymbol{C}_\Omega\right\}\boldsymbol{N}\right]d\Omega\ -$$

матриця січної жорсткості;

$\mathbf{K}_T=\mathbf{K}_u+\mathbf{G}$ – матриця тангенціальної жорсткості,

$$\mathbf{K}_u(\boldsymbol{q_i})=\iint\limits_{\Omega}\left[\left\{\boldsymbol{C_l}+\left(\boldsymbol{C}_\Omega\boldsymbol{Nq_i}\right)_{11}^T\boldsymbol{E}_\Omega\boldsymbol{C}_\Omega\right\}\boldsymbol{N}\right]^T\boldsymbol{E_0 B}\left[\left\{\boldsymbol{C_l}+\left(\boldsymbol{C}_\Omega\boldsymbol{Nq_i}\right)_{11}^T\boldsymbol{E}_\Omega\boldsymbol{C}_\Omega\right\}\boldsymbol{N}\right]d\Omega\ -$$

матриця переміщень;

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{q}_i) = \iint_{\Omega} \sum_{k=1}^{11} \left[ \mathbf{T}_k(N\boldsymbol{q}_i) - \frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)} \mathbf{F}_t^k \right]^T (C_\Omega \boldsymbol{N})^T \boldsymbol{E}_k C_\Omega \boldsymbol{N}\, d\Omega -$$

матриця початкових напружень або геометрична матриця жорсткості;

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{q}_i) = \iint_{\Omega} \boldsymbol{N}^T \mathbf{P} d\Omega + \int_{\Gamma} (G_2 \boldsymbol{N})^T \sigma_g d\Gamma +$$

$$+ \frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)} \iint_{\Omega} \left[ \left\{ C_l + (C_\Omega N \boldsymbol{q}_i)_{11}^T \boldsymbol{E}_\Omega C_\Omega \right\} \boldsymbol{N} \right]^T \boldsymbol{E}_\theta \mathbf{F}_t d\Omega -$$

матриця-стовпець зовнішнього вузлового навантаження.

Розв'язуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь (3.7) відносно $\Delta\boldsymbol{q}$, на $i+1$ ітерації знаходимо вектор вузлових переміщень і поворотів

$$\boldsymbol{q}_{i+1} = \boldsymbol{q}_i + \Delta\boldsymbol{q} ,$$

при яких узагальнений варіаційний функціонал задачі квазістатичної термопружності (2.1) в першому наближенні набуває стаціонарного значення. Далі знову розв'язується система (3.7) і продовжується процес уточнення значення функціоналу для стану рівноваги. Алгоритм знаходження стаціонарного значення починається з пробного розв'язку $\boldsymbol{q}_0 = 0$. При цьому після першої ітерації отримується розв'язок геометрично лінійної задачі

$$\mathbf{K}_\mathrm{T}(0)\,\Delta\boldsymbol{q} = \mathbf{R}(0) .$$

Ітераційний процес закінчується на $n$-ній ітерації, коли для наперед визначеного числа $\varepsilon > 0$ виконується наступна умова [7]

$$\|\Delta\boldsymbol{q}\| = \left[ \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \left( \frac{\Delta\boldsymbol{q}^j}{\boldsymbol{q}_n^j} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon .$$

Тут $k$ – число ступенів свободи всього ансамблю скінченних елементів, $\boldsymbol{q}_i^j$ - $j$-та компонента вектора вузлових переміщень після $i$-тої ітерації.

Література.

1. Вагін П.П., Іванова Н.В., Шинкаренко Г.А. Аналіз зсувних оболонок: постановка та коректність варіаційних задач динаміки, Математичні Студії. 1998.- Т. 10, №2.- С.188-198. 2. Вагін П.П., Малець Р.Б., Шинкаренко Г.А. Моделювання нелінійного деформування зсувних оболонок при термосиловому навантаженні / Львів. ун-т. - Львів, 1998.- 29 с. - Бібліогр. : 18 назв. Укр.- Деп. в ДНТБ України 13.04.98 №186-Ук98. 3. Галимов К.З. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. -Казань: КГУ, 1977.- 211 с. 4. Григоренко

Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. - Киев: Вища школа, 1983.- 286 с. 5. Пелех Б.Л. Обобщенная теория оболочек. - Львов: Вища школа, 1978. - 159 с. 6. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. - Киев: Наукова думка, 1978.- 344 с. 7. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. - Рига: Зинатне, 1988.- 284 с.

*Vahin P.P., Malets R.B., Shynkarenko G.A.*

## *Quasilinearization of the thermoelasticity problem of elastic shells with deformable normal*

*In this paper we formulate the boundary-value problem of the static thermoelasticity of shear isotropic shells. The mathematical model is based on geometrically nonlinear shells theory with deformable normal. Physical relations have been adopted due to Dugamel-Neuman hypothesis. Strain-displacement relations acknowledged linear distribution of rotation tensor components respecting to the shell's thickness. The variational problem is solved by Finite Element Methods employing biquadratic isoparametric approximations of displacements.*

*Стаття надійшла до редколегії 14.12.1998*

УДК 517.6

*В.Д.Вовк*

# Проблеми застосування об'єктного підходу до програмної реалізаціїї чисельних методів розв'язування початково-крайових задач

Потреби інженерної практики важко адаптуються до існуючого розмаїття розроблених наукою математичних моделей та методів їх дослідження. Конструктори воліють постійно працювати з одним-двома універсальними пакетами прикладних програм, аніж для кожної конкретної задачі шукати, вивчати і адаптувати спеціалізоване програмне забезпечення, не зважаючи на його високу ефективність. Застосування нових потужних чисельних методів, таких як, наприклад, метод скінчених елементів (МСЕ), в цілому дозволило уніфікувати програмне забезпечення стосовно геометрії досліджуваного об'єкта. Проте спроби підтримки в одному пакеті програм аналізу більшого числа математичних моделей та ще й кількома методами неминуче приво-