

```

Class TProjectCondition : public TCondition
{
    double (weight **) (double, ... );    // Набір вагових функцій
}

```

Підстановка `weight = fun` з класу `TTestApproximation` приводить до класу `TGaliorKinMethod : public TProjectMethod`

Наведена ієрархія класів в межах статті не претендує ні на достатню повноту структури ні на детальний опис реалізації. За мету даної роботи поставлено лише показ необхідності, можливості і основні напрямки розробки такої ієрархії.

Література.

1. Буч Г. Объектно-ориентированное проектирование с примерами применения: Пер. с англ. – М.: Конкорд, 1992.- 519 с. 2. В.Д.Вовк, Р.Б.Петришин, Г.А.Шинкаренко. Верхівка системи класів програмної реалізації чисельних методів // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. - 1998.- Вип.50.- С. 48-51.

V.D.Vovk

The problems of object approach application to program implementation of the numerical methods of initial-boundary value problems solution.

Some problems of Object-Oriented Approach application to the development of numerical methods software have been investigated. It has been proved that its necessary to analyze the general structure of numerical methods class types for realization all the advantages of Object-Oriented Approach. A well-founded version of program classes top level structure is presented.

Стаття надійшла до редколегії 30.11.1998

УДК 533.6.013.42

В.М.Горlach, Я.В.Кондратюк

Чисельна модель акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною. 4. Осесиметрична задача для ізотропних середовищ з в'язкістю

Дана праця присвячена чисельному моделюванню акустичної взаємодії осесиметричної системи в'язкопружне ізотропне тіло –

ізотропна н'ютонівська рідина. В роботі формулюються початково крайова та варіаційна задачі взаємодії. Для розв'язування варіаційної задачі застосовується проекційно-сіткова схема, базована на методі скінченних елементів та однокроковій рекурентній схемі інтегрування за часом. Ефективність чисельної схеми демонструється на прикладі задачі про імпульсне навантаження нескінченного циліндра заповненого рідиною.

1. Постановка задачі: загальний випадок

В праці [1] задача акустичної взаємодії пужного тіла з рідиною у випадку середовищ з дисипацією була узагальнена наступним чином.

Нехай пружне тіло та рідина займають область $\Omega = \Omega_S \cup \Omega_F$ точок $x = (x_1, x_2, x_3)$ евклідового простору R^3 з межею Γ . Позначимо через $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ . Рух середовища описується вектором переміщень $u = (u_1, u_2, u_3)$, що задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} \rho u_i'' - \sigma_{ij,j} &= f_i \quad \text{в } \Omega \times (0, T] \\ \sigma_{ij,j}(u) &= a_{ijkm} \varepsilon_{km}(u) + c_{ijkm} \varepsilon_{km}(u') \\ \varepsilon_{ij}(u) &= (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2 \end{aligned} \quad (1),$$

граничні умови

$$u_i = 0 \quad \text{на } \Gamma_U, \quad \sigma_{ij} \nu_j = \hat{\sigma}_i \quad \text{на } \Gamma_P \quad (2),$$

причому $\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_P$, Γ_U – не порожня множина точок.

Для визначеності розв'язку до (1)–(2) додаємо початкові умови:

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1 \quad \text{в } \Omega \quad (3)$$

де ρ – густина, $f = (f_1, f_2, f_3)$ – інтенсивність розподілених джерел звуку в середовищі, яке заповнює область Ω , $\{a_{ijkm}\}$ і $\{c_{ijkm}\}$ – модулі пружності та в'язкості, відповідно, зі звичайними властивостями симетрії та додатньої визначеності.

Вектор переміщень $u = (u_1, u_2, u_3)$ введений наступним чином:

$$u = \begin{cases} u^S, & x \in \Omega_S \\ u^F, & x \in \Omega_F \end{cases}.$$

Тут u^S та u^F переміщення в пружному тілі та рідині відповідно.

2. Постановка задачі: осесиметричний випадок

Будемо припускати, що форма взаємодіючої системи пружне тіло – рідина та діючі на неї механічні навантаження осесиметричні. Тоді, якщо розглядуваний об'єкт віднесений до циліндричної системи координат (r, z, θ) , достатньо провести аналіз акустичних полів в його меридіанному перетині, наприклад, в площині $\theta = 0$. Розглянемо випадок взаємодії в'язкої стисливої рідини з в'язкопружним

ізотропним тілом. Для ізотропного в'язкопружного тіла тензор a_{ijkl} модулів пружності та тензор c_{ijkl} модулів в'язкості мають вигляд [2]:

$$a_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

$$c_{ijkl} = \eta \delta_{ij} \delta_{kl} + \xi (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

а компоненти тензора напружень приймуть вигляд

$$\sigma_{ij} = \{\lambda \theta(u) + \eta \theta(u')\} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u) + 2\xi \varepsilon_{ij}(u')$$

де $\theta = \varepsilon_{kk}$, δ_{ij} – одиничний симетричний тензор другого рангу, λ , μ – параметри Ламе, ξ , η – коефіцієнти в'язкості.

Нехай границя меридіанного перетину середовища $\Gamma = \partial\Omega$ складається з частин що не перетинаються $\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_P \cup \Gamma_0$. При цьому: Γ_U – нерухома, а Γ_P – вільна (або з заданим тиском) частини границі Γ ; на Γ_0 , яка співпадає з віссю обертання OZ , мають місце умови симетрії.

Таким чином початково-крайова задача (1) у випадку не-стаціонарної акустичної взаємодії осесиметричної системи в'язкопружне ізотропне тіло – в'язка стислива рідина приймає вигляд:

Знайти вектор-функцію $u(r, z, t) = (u_r, u_z)$ таку, що

$$\begin{cases} \rho u_r'' - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \sigma_{rr}(u)] + \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta}(u) - \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{rz}(u) = f_r \\ \rho u_z'' - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \sigma_{rz}(u)] - \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}(u) = f_z \end{cases} \quad \text{в } \Omega \times (0, T]$$

$$u_r = 0, \quad u_z = 0 \quad \text{на } \Gamma_U \times [0, T]$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(u) \cos(\nu, r) + \sigma_{rz}(u) \cos(\nu, z) = \bar{\sigma}_r \\ \sigma_{rz}(u) \cos(\nu, r) + \sigma_{zz}(u) \cos(\nu, z) = \bar{\sigma}_z \end{cases} \quad \text{на } \Gamma_P \times [0, T]$$

$$u_r = 0, \quad \sigma_{rz}(u) = 0 \quad \text{на } \Gamma_0 \times [0, T]$$

$$u_r = u_r^0, \quad u_z = u_z^0 \quad \text{в } \Omega \quad \text{при } t = 0$$

$$u_r' = u_r^1, \quad u_z' = u_z^1 \quad \text{в } \Omega \quad \text{при } t = 0$$

$$\sigma_{rr}(u) = \lambda e(u) + 2\mu \varepsilon_{rr}(u) + \eta e(u') + 2\xi \varepsilon_{rr}(u')$$

$$\sigma_{\theta\theta}(u) = \lambda e(u) + 2\mu \varepsilon_{\theta\theta}(u) + \eta e(u') + 2\xi \varepsilon_{\theta\theta}(u')$$

$$\sigma_{zz}(u) = \lambda e(u) + 2\mu \varepsilon_{zz}(u) + \eta e(u') + 2\xi \varepsilon_{zz}(u')$$

$$\sigma_{rz}(u) = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \xi \left(\frac{\partial u_z'}{\partial r} + \frac{\partial u_r'}{\partial z} \right) = 2\mu \varepsilon_{rz}(u) + 2\xi \varepsilon_{rz}(u')$$

$$e(u) = \varepsilon_{rr}(u) + \varepsilon_{zz}(u) + \varepsilon_{\theta\theta}(u) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial}{\partial z} u_z$$

Коефіцієнти λ , μ , η , ξ введені наступним чином:

$$\lambda = \begin{cases} \rho_F c^2 & \text{в } \Omega_F; \\ \lambda_S & \text{в } \Omega_S; \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} 0 & \text{в } \Omega_F; \\ \mu_S & \text{в } \Omega_S; \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} \eta_F & \text{в } \Omega_F; \\ \eta_S & \text{в } \Omega_S; \end{cases} \quad \xi = \begin{cases} \xi_F & \text{в } \Omega_F; \\ \xi_S & \text{в } \Omega_S; \end{cases}$$

де ρ_F – густина рідини, c – швидкість звуку в рідині, λ_S, μ_S – коефіцієнти Ламе пружного тіла, $\eta_F, \xi_F, \eta_S, \xi_S$ – коефіцієнти в'язкості рідини та пружного тіла відповідно.

3. Постановка задачі: варіаційне формулювання

Побудувавши принцип віртуальних робіт перейдемо до варіаційної постановки задачі.

Введемо простори

$$V = \{v = (v_r, v_z)^T \in H^1(\Omega)^2 \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_U\}, \quad H = L^2(\Omega)^2.$$

Варіаційна постановка задачі має вигляд:

$$\begin{cases} \text{Задано } l \in L^2(0, T; V'), u_0 \in V, u^1 \in H \\ \text{Знайти } u \in L^2(0, T; V) \text{ таку що} \\ m(u''(t), v) + c(u'(t), v) + a(u(t), v) = \langle l(t), v \rangle \\ a(u(0) - u^0, v) = 0, \quad m(u'(0) - u^1, v) = 0 \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Тут білінійні форми та лінійний функціонал введені наступним чином:

$$\begin{cases} m(u, v) = \int_{\Omega} \{\rho u v_r + \rho u_z v_z\} dr dz \\ d(u, v) = \int_{\Omega} \{\lambda e(u) e(v) + 2\mu(\varepsilon_{rr}(u)\varepsilon_{rr}(v) + \varepsilon_{\theta\theta}(u)\varepsilon_{\theta\theta}(v) + \varepsilon_{zz}(u)\varepsilon_{zz}(v)) + 4\mu\varepsilon_{rz}(u)\varepsilon_{rz}(v)\} dr dz \\ c(u, v) = \int_{\Omega} \{\eta e(u) e(v) + 2\xi(\varepsilon_{rr}(u)\varepsilon_{rr}(v) + \varepsilon_{\theta\theta}(u)\varepsilon_{\theta\theta}(v) + \varepsilon_{zz}(u)\varepsilon_{zz}(v)) + 4\xi\varepsilon_{rz}(u)\varepsilon_{rz}(v)\} dr dz \\ \langle l, v \rangle = \int_{\Omega} \{f_r v_r + f_z v_z\} dr dz - \int_{\Gamma_p} \{\sigma_r v_r + \sigma_z v_z\} r d\gamma \end{cases}$$

4. Проекційно-сіткова схема

Для розв'язування варіаційної задачі застосовується проекційно-сіткова схема інтегрування за часом [1,3], яка з використанням матричних позначень має наступне алгебраїчне представлення:

$$\text{Задано } \Delta t, \beta, \gamma = \text{const} > 0; \{U^j\}, \{V^j\} \subset R^N.$$

$$\text{Знайти } \{U^{j+1}\}, \{V^{j+1}\} \subset R^N \text{ такі що}$$

$$\begin{cases} \{M + \Delta t \gamma C + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta A\} V^{j+\gamma} = \gamma \Delta t \{L_{j+1/2} - A U^j\} \\ + \{M + \frac{1}{2} \Delta t^2 (\beta - 2\gamma^2) A\} V^j, \\ \text{де } U^{j+1} = U^j + \frac{1}{2} \Delta t [V^{j+1} + V^j], \quad V^{j+1} = V^j + \frac{1}{\gamma} [V^{j+\gamma} - V^j], \quad j = 0, 1, \dots, K. \end{cases}$$

5. Задача про імпульсне навантаження нескінченного в'язкопружного циліндра заповненого рідиною

Розглянемо задачу про імпульсне навантаження нескінченного в'язкопружного циліндра заповненого рідиною. Нехай в початковий момент часу гідропружна система перебуває в стані спокою. В наступні моменти часу на сисему діє навантаження характеристики якого приведені на рис.1. Будемо припускати, що сила, яка діє на циліндр, розподілена по його поверхні рівномірно.

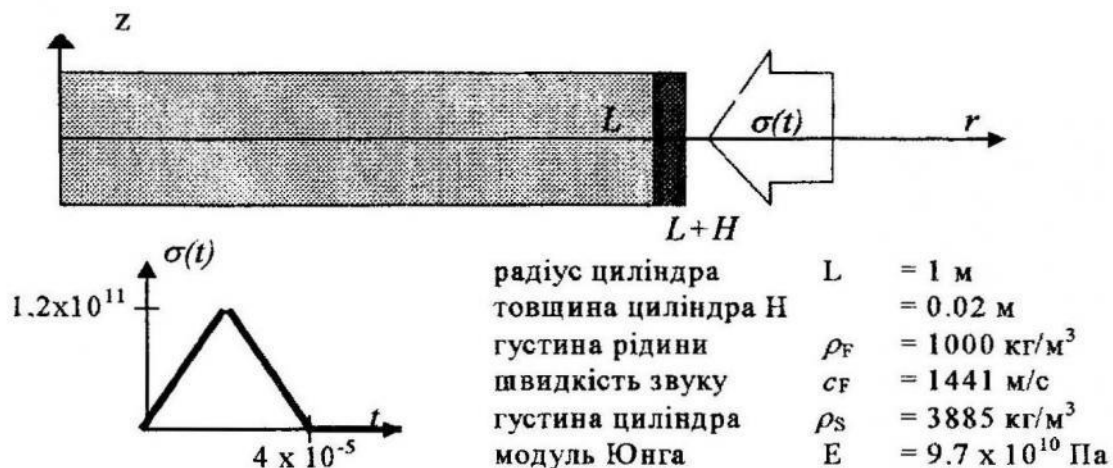


Рис. 1.

В даній постановці задачу можемо розглядати як одновимірну, розв'язок якої залежить тільки від \$t\$.

Розв'язуючи задачу за побудованою вище проекційно-сітковою схемою з використанням лінійних апроксимацій методу скінченних елементів отримаємо значення шуканих величин в дискретні моменти часу \$t_j\$.

Розрахунки проводились при 100, 200 та 400 елементів в рідині та 5, 10, 20 по товщині циліндра. При такій структурі розрахункової сітки обмеження, що накладаються умовою Куранта на крок по часу мають вигляд \$\Delta t_1 \leq 3.6e^{-7}\$, \$\Delta t_2 \leq 1.8e^{-7}\$ та \$\Delta t_3 \leq 9e^{-8}\$ відповідно. Проведені розрахунки на різних просторових та часових сітках підтверджують очікуваний порядок збіжності чисельного розв'язку як по \$r\$ так і по \$t\$.

Приведені нижче результати отримані на сітці із 100 елементів в рідині та 10 елементів по товщині циліндра.

Просторовий профіль поля швидкостей при $t=0.00048$

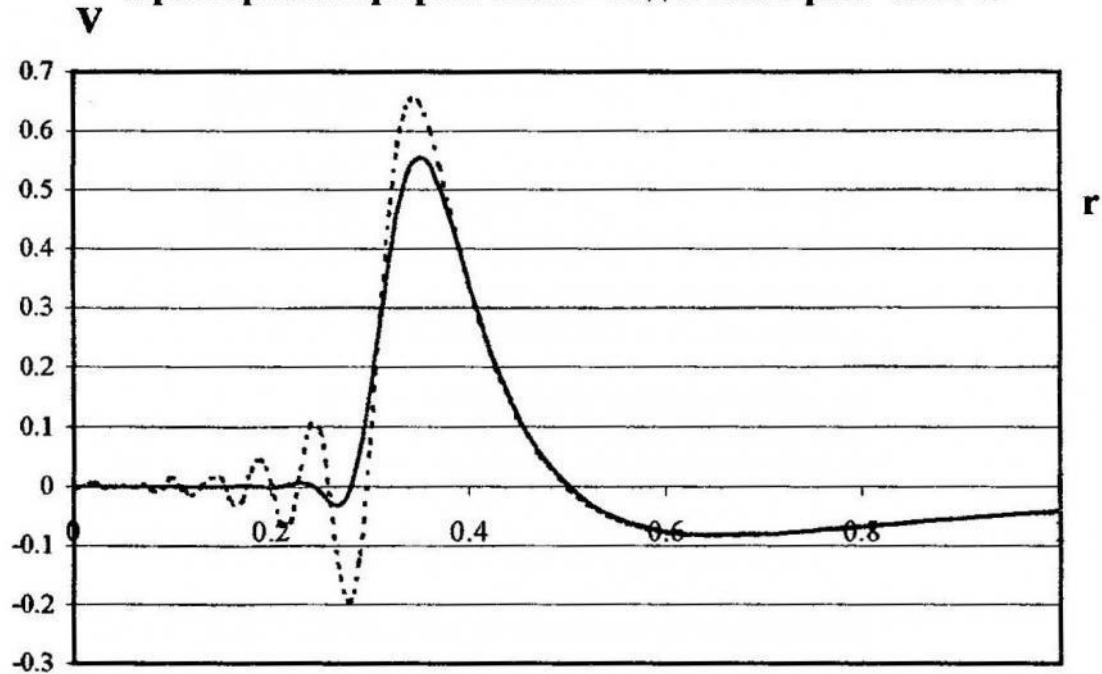


Рис. 2

Розподіл тиску в рідині при $t=0.00048$

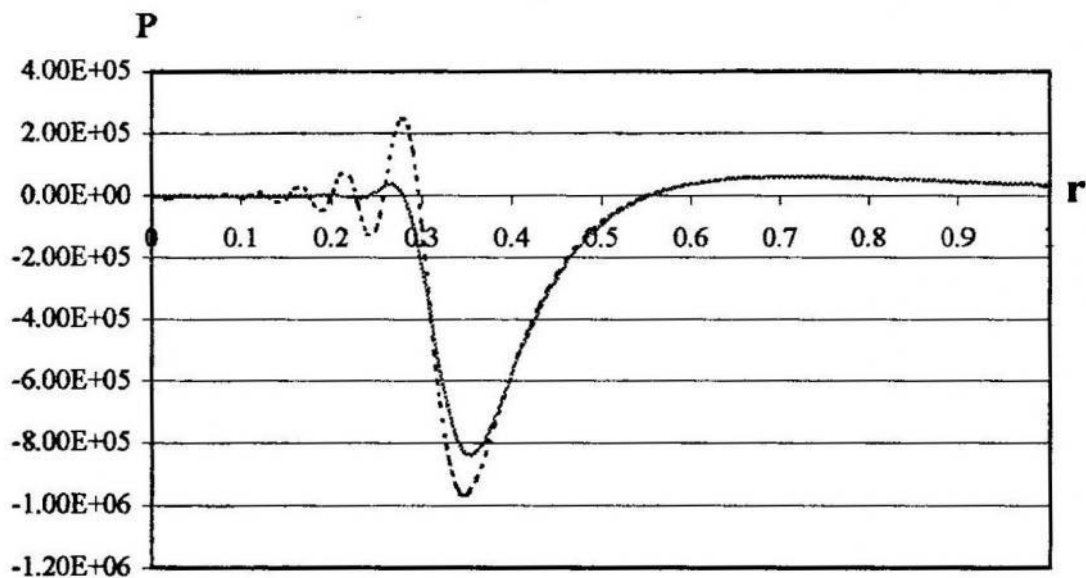


Рис. 3

На рис 2, 3 зображені просторовий профіль поля швидкостей та розподіл тиску в рідині в момент часу $t=0.00048$. Причому пунктирні лінії відповідають розв'язку задачі для ідеальних середовищ, суцільні – для середовищ з дисипацією.

На цих рисунках добре помітно, що у випадку ідеальних середовищ в зонах нерегулярності шуканого розв'язку має місце нефізична поведінка чисельного розв'язку. Перед переднім фронтом хвилі спостерігаємо осциляції чисельного розв'язку, оскільки пояснити поведінку розв'язку фізичними міркуваннями авторам не вдалось. Врахування в'язкості середовищ дозволяє позбутись цих осциляцій.

Добре погодження інтегральних характеристик наближеного розв'язку можна побачити на рис 4 для всіх моментів часу.

Графік повної енергії гідропружної системи

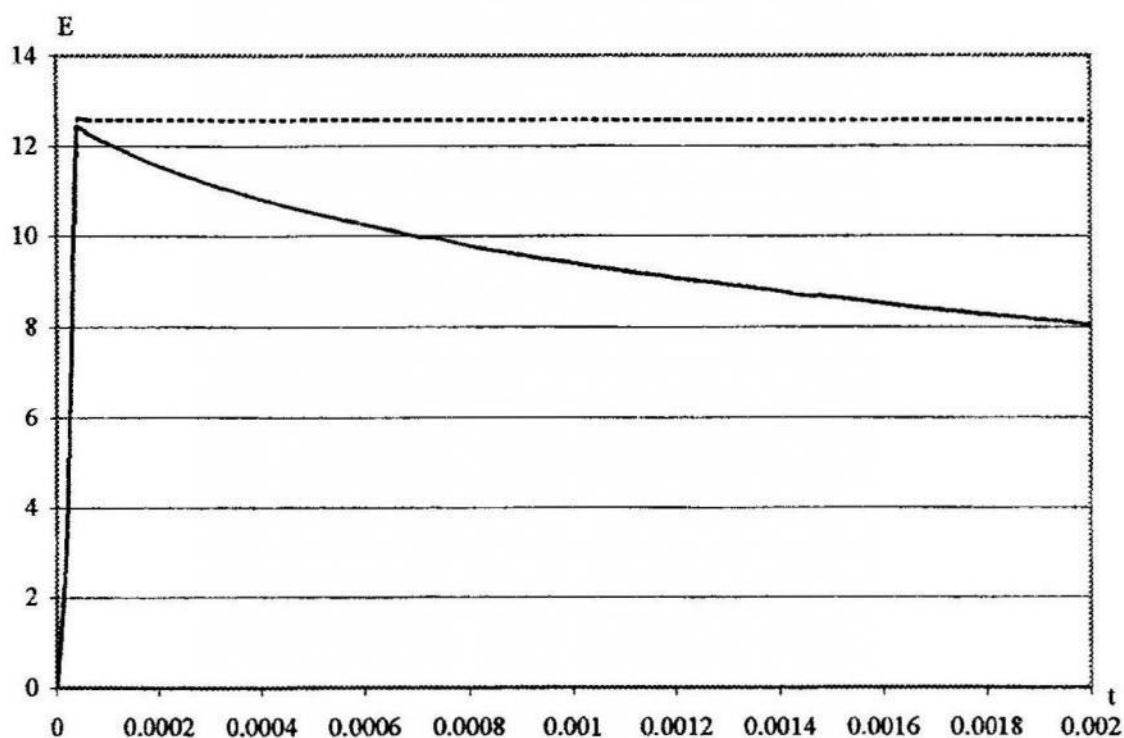


Рис. 4

На цьому рисунку зображена повна енергія гідропружної системи у випадку ідеальних середовищ та середовищ з дисипацією. У випадку ідеальних середовищ інтенсивність дисипації енергії рівна нулю. Відсутність втрат енергії в системі підтверджується незмінністю повної енергії після зняття навантаження. У випадку середовищ з дисипацією спостерігаємо втрати енергії гідропружної системи.

Література.

1. Горлач В.М., Кондратюк Я.В. Чисельна модель акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною. 3. Аналіз впливу в'язкості середовищ // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1997. Вип. 46. С.25-32.
2. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел.-МГУ. 1976. -376с.
- 3.

Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач.- Київ: УМК ВО, 1991.- 87с.

Horlatch V., Kondratyuk Y.

Numerical analysis of the fluid-structure acoustic interaction.

4. Axial-symmetric problem in case of viscous mediums

This paper presents investigation displacement-based fluid finite elements methodology for the determination of the transient dynamic fluid-structure acoustic interaction. The viscosity of the fluid will be taken into consideration with a view to get rid of the oscillation of the numeric solution. Dynamic problem involving the interaction between an elastic structure and an acoustic fluid will be formulated for FEM solution by using fluid displacement as the fundamental unknown in the fluid region.

Using equation of acoustic fluid-structure interaction in case of axial-symmetric system viscoelastic isotropic structure – isotropic newtonian fluid with appropriate boundary and initial conditions variational formulation will be derived. Numerical analysis will be included finite elements semidiscretization and one-step time integration schemes for the solution of the mentioned variational problem. The computational efficiency of the methodology will be demonstrated on the shock wave propagation example.

Стаття надійшла до редколегії 22.12.1998

УДК 517.958:536.12

Є.Г. Грицько, Р.В. Гудзь, Л.М. Журавчак, Г.В. Фітель

Числово-аналітичний спосіб розв'язування нестационарної задачі теплопровідності з нелінійними граничними умовами

Визначенню температурних полів при змінному коефіцієнті тепловіддачі з границі тіла у літературі приділяється значна увага, наприклад, [6,7]. Однак задачі теплопровідності для тіл неканонічної форми із залежністю коефіцієнта тепловіддачі від координат, часу і температури розглянуті ще недостатньо.

У роботі пропонується ефективна числово-аналітична методика розв'язування нестационарних задач теплопровідності для тіл складної геометричної форми при змішаних граничних умовах у випадку, коли гранична умова III роду є нелінійною.

© Грицько Є.Г., Гудзь Р.В., Журавчак Л.М., Фітель Г.В., 1998