

Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач.- Київ: УМК ВО, 1991.- 87с.

Horlatch V., Kondratyuk Y.

Numerical analysis of the fluid-structure acoustic interaction.

4. Axial-symmetric problem in case of viscous mediums

This paper presents investigation displacement-based fluid finite elements methodology for the determination of the transient dynamic fluid-structure acoustic interaction. The viscosity of the fluid will be taken into consideration with a view to get rid of the oscillation of the numeric solution. Dynamic problem involving the interaction between an elastic structure and an acoustic fluid will be formulated for FEM solution by using fluid displacement as the fundamental unknown in the fluid region.

Using equation of acoustic fluid-structure interaction in case of axial-symmetric system viscoelastic isotropic structure – isotropic newtonian fluid with appropriate boundary and initial conditions variational formulation will be derived. Numerical analysis will be included finite elements semidiscretization and one-step time integration schemes for the solution of the mentioned variational problem. The computational efficiency of the methodology will be demonstrated on the shock wave propagation example.

Стаття надійшла до редколегії 22.12.1998

УДК 517.958:536.12

Є.Г. Грицько, Р.В. Гудзь, Л.М. Журавчак, Г.В. Фітель

Числово-аналітичний спосіб розв'язування нестационарної задачі теплопровідності з нелінійними граничними умовами

Визначенню температурних полів при змінному коефіцієнті тепловіддачі з границі тіла у літературі приділяється значна увага, наприклад, [6,7]. Однак задачі теплопровідності для тіл неканонічної форми із залежністю коефіцієнта тепловіддачі від координат, часу і температури розглянуті ще недостатньо.

У роботі пропонується ефективна числово-аналітична методика розв'язування нестационарних задач теплопровідності для тіл складної геометричної форми при змішаних граничних умовах у випадку, коли гранична умова III роду є нелінійною.

© Грицько Є.Г., Гудзь Р.В., Журавчак Л.М., Фітель Г.В., 1998

Розглянемо плоский криволінійний трикутник, сторони якого l_m задаються наступним чином [1,2] :

$$l_m = \left\{ (x_1, x_2) : x_s = \sum_{j=1}^3 \varphi_j(\eta) x_{ms}^j, \quad s=1,2 \right\}, \quad m=\overline{1,3}, \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi_1(\eta) &= 0.5\eta(\eta-1), & \varphi_2(\eta) &= 0.5\eta(\eta+1), \\ \varphi_3(\eta) &= (1-\eta)(1+\eta), & \eta &\in [-1, 1], \end{aligned}$$

x_{ms}^j – декартові координати вузлів, що задають форму криволінійного трикутника, причому $x_{1s}^2 = x_{2s}^1$, $x_{2s}^2 = x_{3s}^1$, $x_{3s}^2 = x_{1s}^1$ – вузли, що містяться у вершинах трикутника, x_{1s}^3 , x_{2s}^3 , x_{3s}^3 – вузли, що містяться приблизно посередині відповідно кривих l_1 , l_2 , l_3 .

Необхідно знайти функцію температури $\theta(x, \hat{\tau})$ в області $\Omega \in R^2$, обмеженій сторонами криволінійного трикутника, при змішаних граничних умовах на її границі $\partial\Omega = \bigcup_{m=1}^3 l_m$. Вважаємо, що на стороні l_1 задано значення температурного поля, на l_2 – розподіл інтенсивності теплового потоку. Через l_3 відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем. Коефіцієнт тепловіддачі з l_3 залежить від координат, часу і температури, що приводить до нелінійної граничної умови III роду

$$\partial\theta/\partial n + h(x, \hat{\tau}, \theta(x, \hat{\tau})) [\theta - \theta_c(x, \hat{\tau})] = 0, \quad (x, \hat{\tau}) \in l_3 \times T. \quad (2)$$

Тут n – зовнішня нормаль до $\partial\Omega$, $h(x, \hat{\tau}, \theta(x, \hat{\tau}))$ – критерій Біо, $\theta_c(x, \hat{\tau})$ – температура зовнішнього середовища, $T = \{\hat{\tau} : 0 < \hat{\tau} \leq \infty\}$, $\hat{\tau}$ – час.

Таким чином, для знаходження температурного поля $\theta(x, \hat{\tau})$ одержуємо нелінійну крайову задачу, в яку входять умови (2) та

$$\partial^2 \theta / \partial x_1^2 + \partial^2 \theta / \partial x_2^2 = \partial \theta / \partial \hat{\tau}, \quad (x, \hat{\tau}) \in \Omega \times T, \quad (3)$$

$$\theta = \theta_0(x), \quad \hat{\tau} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$\theta = \theta_\Gamma(x, \hat{\tau}), \quad (x, \hat{\tau}) \in l_1 \times T, \quad (5)$$

$$-\partial \theta / \partial n = q_\Gamma(x, \hat{\tau}), \quad (x, \hat{\tau}) \in l_2 \times T, \quad (6)$$

де $\theta_0(x)$, $\theta_\Gamma(x, \hat{\tau})$, $q_\Gamma(x, \hat{\tau})$ – задані функції, що описують відповідно початковий температурний стан в Ω , температуру на l_1 та величину теплового потоку з l_2 , і задовільняють наступним умовам:

$$\lim_{x \rightarrow l_1} \theta_0(x) = \lim_{\hat{\tau} \rightarrow 0} \theta_\Gamma(x, \hat{\tau}), \quad \lim_{x \rightarrow l_2} \partial \theta_0 / \partial n = \lim_{\hat{\tau} \rightarrow 0} q_\Gamma(x, \hat{\tau}).$$

Для розв'язування (2)-(6) будемо використовувати схему “послідовності початкових умов” [4]. При використанні даної схеми на кожному k -му кроці по часу $(k-1)\Delta\tau < \hat{\tau} \leq k\Delta\tau$, $\Delta\tau$ – величина кроку по часу, вводиться локальний час τ , такий, що

$$\tau = \hat{\tau} - (k-1)\Delta\tau,$$

$$]0, \hat{\tau}] = \bigcup_{v=1}^{k-1}](v-1)\Delta\tau, v\Delta\tau] \cup](k-1)\Delta\tau, \tau], \quad \bigcup_{v=1}^0](v-1)\Delta\tau, v\Delta\tau] = 0,$$

і розв'язується крайова задача для $\theta_k(x, \tau)$, яка формується шляхом введення функцій $\theta_{0k}(x)$, $\theta_{\Gamma k}(x, \tau)$, $q_{\Gamma k}(x, \tau)$, $\theta_{ck}(x, \tau)$ замість $\theta_0(x)$, $\theta_\Gamma(x, \hat{\tau})$, $q_\Gamma(x, \hat{\tau})$, $\theta_c(x, \hat{\tau})$ відповідно, причому

$$\theta_{0k}(x) = \begin{cases} \theta_0(x), & k=1, \\ \theta_{k-1}(x, (k-1)\Delta\tau), & k>1, \end{cases} \quad (7)$$

$$A_k(x, \tau) = A(x, (k-1)\Delta\tau + \tau), \quad A \in \{\theta_\Gamma, q_\Gamma, \theta_c\}.$$

Зауважимо, що для $\theta(x, \hat{\tau})$ виконується наступне співвідношення:

$$\theta(x, \hat{\tau}) = \sum_{v=1}^k \theta_v(x, \tau) \chi_{v\tau}(\hat{\tau}), \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq \hat{\tau} \leq k\Delta\tau, \quad (8)$$

$$\chi_{v\tau}(\hat{\tau}) = \begin{cases} 1, & (v-1)\Delta\tau < \hat{\tau} \leq v\Delta\tau, \\ 0, & \hat{\tau} \leq (v-1)\Delta\tau, \quad \hat{\tau} > v\Delta\tau. \end{cases} \quad (9)$$

Для достатньо малого значення $\Delta\tau$ на k -му кроці залежність критерію Біо від шуканої функції $\theta(x, \hat{\tau})$ апроксимуємо так:

$$h(x, \hat{\tau}, \theta(x, \hat{\tau})) = h_k(x, \tau, \theta_{0k}(x, \tau)). \quad (10)$$

Тоді для визначення $\theta_k = \theta_k(x, \tau)$ одержимо крайову задачу:

$$\partial^2 \theta_k / \partial x_1^2 + \partial^2 \theta_k / \partial x_2^2 = \partial \theta_k / \partial \tau, \quad (x, \tau) \in \Omega \times \Delta T, \quad (11)$$

$$\theta_k = \theta_{0k}(x), \quad \tau = 0, \quad x \in \Omega, \quad (12)$$

$$\theta_k = \theta_{\Gamma k}(x, \tau), \quad (x, \tau) \in I_1 \times \Delta T, \quad (13)$$

$$-\partial \theta_k / \partial n = q_{\Gamma k}(x, \tau), \quad (x, \tau) \in I_2 \times \Delta T, \quad (14)$$

$$\partial \theta_k / \partial n + h_k(x, \tau, \theta_{0k}(x)) [\theta_k - \theta_{ck}(x, \tau)] = 0, \quad (x, \tau) \in I_3 \times \Delta T, \quad (15)$$

де $\Delta T =]0, \Delta \tau]$.

Згідно непрямого методу граничних елементів [1,2,4] запишемо інтегральне зображення розв'язку диференціального рівняння крайової задачі (11) - (15):

$$\theta_k = \int_0^\tau d\xi_4 \int_{\partial\Omega} g_k(\xi, \xi_4) E d\partial\Omega(\xi) + \int_{\Omega} \theta_{0k}(\xi) E(x, \tau, \xi, 0) d\Omega(\xi), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} -\partial \theta_k / \partial n = & \int_0^\tau d\xi_4 \int_{\partial\Omega} g_k(\xi, \xi_4) F d\partial\Omega(\xi) + \\ & + \int_{\Omega} \theta_{0k}(\xi) F(x, \tau, \xi, 0) d\Omega(\xi), \end{aligned} \quad (17)$$

де $g_k(\xi, \xi_4)$ – невідома функція інтенсивності "фіктивних" джерел тепла, що вводиться на $\partial\Omega \times \Delta T$,

$$E = E(x, \tau, \xi, \xi_4) = \exp\left\{-r^2/4(\tau - \xi_4)\right\} [4\pi(\tau - \xi_4)]^{-1},$$

$$F = F(x, \tau, \xi, \xi_4) = y_s n_s \exp\left\{-r^2/4(\tau - \xi_4)\right\} [8\pi(\tau - \xi_4)]^{-2},$$

$$r^2 = y_s y_s, \quad y_s = x_s - \xi_s, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in R^2, \quad \xi_4 \in \Delta T,$$

(x_1, x_2, τ) – координати точок спостереження, (ξ_1, ξ_2, ξ_4) – координати, які співпадають з (x_1, x_2, τ) і уведені для зручності опису точок області, у якій міститься джерело тепла.

Розіб'ємо границю області $\partial\Omega$ на граничні елементи Γ_i , тобто $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, N}$, та проведемо дискретизацію внутрішньої області Ω криволінійними чотирикутними елементами Ω_l , такими, що $\Omega = \bigcup_{l=1}^L \Omega_l$, $\Omega_l \cap \Omega_q = \emptyset$, $l \neq q$, $l, q = \overline{1, L}$.

Згідно проекційно-сіткової методики [5,3] апроксимуємо функцію $g_k(\xi, \xi_4)$ на кожному граничному елементі Γ_i невідомими константами d_{ik} :

$$g_k(\xi, \xi_4) = \sum_{i=1}^N d_{ik} \chi_{i\Gamma}(\xi), \quad (18)$$

де $\chi_{i\Gamma}(\xi) = 1$ при $\xi \in \Gamma_i$, $\chi_{i\Gamma}(\xi) = 0$ при $\xi \notin \Gamma_i$.

Це дозволяє записати дискретні аналоги співвідношень (16), (17):

$$\theta_k^* = \sum_{i=1}^N d_{ik} \Phi_{1i}^{(k)}(E, x, \tau) + \sum_{l=1}^L \Phi_{2l}^{(k)}(E, x, \tau), \quad (19)$$

$$-\partial \theta_k^* / \partial n = \sum_{i=1}^N d_{ik} \Phi_{1i}^{(k)}(F, x, \tau) + \sum_{l=1}^L \Phi_{2l}^{(k)}(F, x, \tau). \quad (20)$$

Тут θ_k^* використовується замість θ_k внаслідок апроксимаційних операцій (18),

$$\Phi_{1i}^{(k)}(f, x, \tau) = \int_0^\tau d\xi_4 \int_{\Gamma_i} f(x, \tau, \xi, \xi_4) d\Gamma_i(\xi), \quad (21)$$

$$\Phi_{2l}^{(k)}(f, x, \tau) = \int_{\Omega_l} \theta_{0k}(\xi) f(x, \tau, \xi, 0) d\Omega_l(\xi). \quad (22)$$

Для знаходження невідомих констант d_{ik} застосуємо колокаційну методику [1], згідно з якою на $\partial\Omega$ уведемо точки спостереження x_p^0 , які виберемо приблизно посередині кожного Γ_p , $p = \overline{1, N}$, і будемо вимагати точного виконання граничних умов (13) - (15) у точках $(x_p^0, \Delta\tau)$. У результаті одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення d_{ik} на k -му кроці по часу:

$$\sum_{i=1}^N A_{pi}^{(k)} d_{ik} = b_{pk}, \quad p = \overline{1, N}, \quad (23)$$

де

$$A_{pi}^{(k)} = \begin{cases} \Phi_{1i}^{(k)}(E, x_p^0, \Delta\tau), & x_p^0 \in l_1, \\ \Phi_{1i}^{(k)}(F, x_p^0, \Delta\tau), & x_p^0 \in l_2, \\ -\Phi_{1i}^{(k)}(F, x_p^0, \Delta\tau) + h_k(x_p^0, \tau, \theta_{0k}(x_p^0)) \times \\ \times \Phi_{1i}^{(k)}(E, x_p^0, \Delta\tau), & x_p^0 \in l_3, \end{cases} \quad (24)$$

$$b_{pk} = \begin{cases} \theta_{\Gamma k}(x_p^0, \Delta\tau) - \sum_{l=1}^L \Phi_{2l}^{(k)}(E, x_p^0, \Delta\tau), & x_p^0 \in l_1, \\ q_{\Gamma k}(x_p^0, \Delta\tau) - \sum_{l=1}^L \Phi_{2l}^{(k)}(F, x_p^0, \Delta\tau), & x_p^0 \in l_2, \\ \sum_{l=1}^L \Phi_{2l}^{(k)}(F, x_p^0, \Delta\tau) + h_k(x_p^0, \Delta\tau, \theta_{0k}(x_p^0)) \times \\ \times \left[\theta_{ck}(x_p^0, \Delta\tau) - \sum_{l=1}^L \Phi_{2l}^{(k)}(E, x_p^0, \Delta\tau) \right], & x_p^0 \in l_3, \end{cases} \quad (25)$$

Інтегрування по граничних та внутрішніх елементах у формулах, що містять вирази (21), (22), проводимо числово-аналітично з аналітичним виділенням особливості, коли точки спостереження x_p^0 належать відповідно областям інтегрування Γ_i , Ω_i , та числово з використанням квадратурних формул Гауса у протилежному випадку [4].

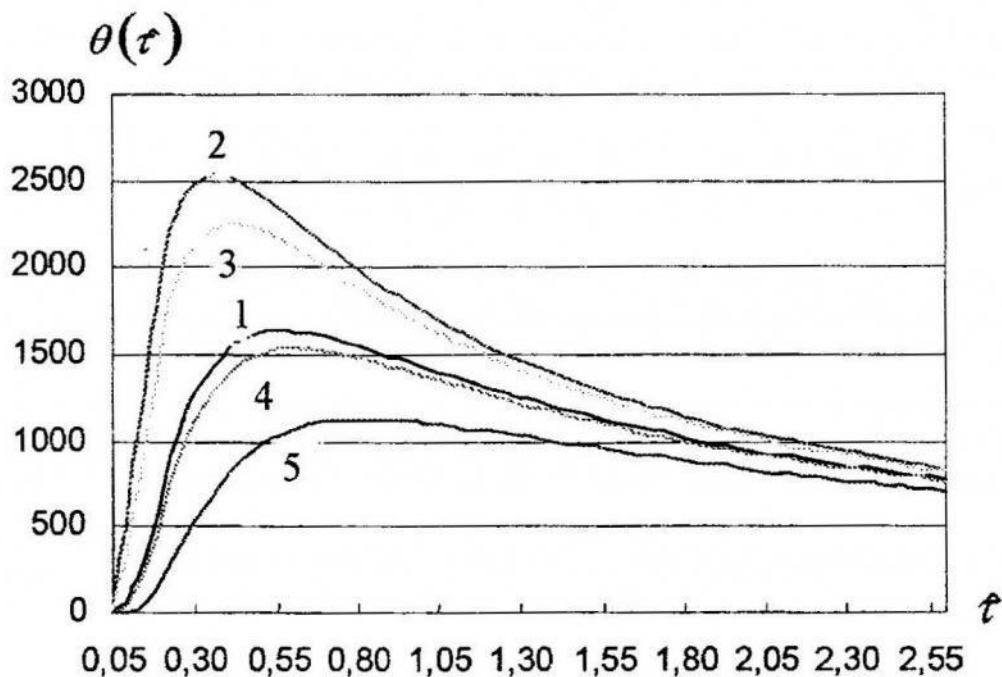
Розв'язавши систему лінійних алгебраїчних рівнянь (23) і підставивши одержані значення d_{ik} у формули (19), (20), знайдемо розв'язок крайової задачі (11) - (15) при $(k-1)\Delta\tau < \hat{\tau} \leq k\Delta\tau$ у вибраних точках спостереження. Повторюючи цей процес, одержимо мінімальний набір значень $\theta_k^*(x, \tau)$ до моменту часу, скажімо, $\hat{\tau} = N\Delta\tau$, що дає можливість визначити температуру у довільний момент часу $\hat{\tau}: N\Delta\tau \leq \hat{\tau} \leq (N+1)\Delta\tau$ у будь-якій точці $x^e \in \bar{\Omega}$.

Числові дослідження нестационарного температурного поля $\theta(x, \hat{\tau})$ проводились для криволінійного трикутника з наступними значеннями координат вузлів: $x_{11}^1 = 0$, $x_{12}^1 = 2$, $x_{11}^2 = 1$, $x_{12}^2 = 0$, $x_{11}^3 = 0,5$, $x_{12}^3 = 1$, $x_{21}^2 = 2$, $x_{22}^2 = 0$, $x_{21}^3 = 1,5$, $x_{22}^3 = 0$, $x_{31}^3 = 1$, $x_{32}^3 = 1$. Нагадаємо, що $x_{21}^1 = x_{11}^2$, $x_{22}^1 = x_{12}^2$, $x_{31}^1 = x_{21}^2$, $x_{32}^1 = x_{22}^2$, $x_{31}^2 = x_{11}^3$, $x_{32}^2 = x_{12}^3$.

Криві 1 - 5 зображують залежність температури від часу відповідно у точках з координатами (1,5; 0,1), (1,1; 0,5), (0,8; 1,0), (0,4; 1,5), (0,2; 1,8). При цьому вирази для функцій $h(x, \hat{\tau}, \theta)$, $\theta_c(x, \hat{\tau})$, $\theta_{\Gamma}(x, \hat{\tau})$, $q_{\Gamma}(x, \hat{\tau})$ та $\theta_0(x)$ вибирались рівними відповідно

$$h(x, \hat{\tau}, \theta) = h_0(\theta)(x_1 + x_2)\hat{\tau}^{-1}, \quad \theta_c(x, \hat{\tau}) = 0, \\ \theta_{\Gamma}(x, \hat{\tau}) = C \exp((e_2 x_1^2 + e_1 x_1 + e_0)\hat{\tau}^{-1})\hat{\tau}^{-1}, \quad q_{\Gamma}(x, \hat{\tau}) = 0, \quad \theta_0(x) = 0,$$

де $h_0(\theta) = C_1(1 + C_2(\theta - \theta_i))S_+(\theta - \theta_i)$; $C_1 = 0,354$; $C_2 = 0,2$;
 $\theta_i = 1840^\circ \text{C}$; $S_+(\zeta) = 1$ при $\zeta > 0$, $S_+(\zeta) = 0$ при $\zeta \leq 0$; $C = 12,6$;
 $e_2 = -1,25$; $e_1 = 2$; $e_0 = -1$.



Як показали числові дослідження, запропонована методика лінеаризації з використанням схеми "послідовності початкових умов" може бути успішно застосована до розв'язування нестационарних крайових задач при нелінійних граничних умовах для тіл довільної форми.

Література.

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. - М.: Мир, 1984. - 494 с.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. - М.: Мир, 1987. - 524 с.
3. Грицько Е.Г. Смешанная задача теплопроводности для прямоугольного параллелепипеда // Физика и химия обраб. материалов - 1980, № 6. - С. 21 - 25.
4. Журавчук Л.М., Грицько Е.Г. Метод приграничных элементов у прикладних задачах математичної фізики. - Львів: Карпатське відд. Ін-ту геофізики НАН України, 1996. - 219 с.
5. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М.: Наука, 1981. - 416 с.
6. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. - М.: Наука, 1984. - 368 с.
7. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Громовык В.И., Лозбень В.Л. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. - Киев: Наукова думка, 1977. - 158 с.

Grits'ko E., Gudz R., Zhuravchak L., Fitel G.

Numerically-analytic method of solution of nonstationary heat problem with nonlinear boundary conditions

In this paper we consider some application of the boundary element method for solution of nonstationary heat problem for the bodies with complicated geometry and boundary conditions of mixed type in the case when boundary conditions of the third kind is nonlinear.

Стаття надійшла до редколегії 3.11.1998

УДК 517.958

І.І. Дияк

**Комбінована чисельна схема
для дослідження задач пластичності**

Проблемі дослідження задач пластичності на основі використання різних теорій присвячене широке коло сучасних досліджень [1,5-7]. Використання чисельних методів та можливості сучасних комп'ютерів зробили можливим розв'язання багатьох практично важливих інженерних задач. Але проблема побудови ефективних чисельних схем залишається однією з найактуальніших.

Для дослідження нелінійних задач широко застосовуються як метод скінченних елементів (МСЕ) так і метод граничних елементів (МГЕ). У багатьох практично важливих інженерних застосуваннях область пластичної поведінки матеріалу є локальною, тому використання фізичних гетерогенних моделей (тобто одночасне використання як моделі пружного так і моделі пластичного деформування) є оправданим [8]. У задачах пластичності з використанням рівнянь теорії малих пружнопластичних деформацій широко використовується або метод змінних параметрів пружності або метод пружних розв'язків [1,5,6]. МСЕ ефективніший, ніж МГЕ для розв'язання нелінійних задач [7]. У даній статті пропонується комбінована схема МСЕ та МГЕ (числова гетерогенна апроксимація) фізично гетерогенної моделі для двовимірних фізично нелінійних задач [8].

1. Визначимо пружнопластичний напружено-деформований стан тіла, яке обмежене поверхнею $\partial\Omega$, та знаходиться у початковий момент часу t_0 у ненапруженому та недеформованому стані, а потім