

Grits'ko E., Gudz R., Zhuravchak L., Fitel G.

Numerically-analytic method of solution of nonstationary heat problem with nonlinear boundary conditions

In this paper we consider some application of the boundary element method for solution of nonstationary heat problem for the bodies with complicated geometry and boundary conditions of mixed type in the case when boundary conditions of the third kind is nonlinear.

Стаття надійшла до редколегії 3.11.1998

УДК 517.958

І.І. Дияк

**Комбінована чисельна схема
для дослідження задач пластичності**

Проблемі дослідження задач пластичності на основі використання різних теорій присвячене широке коло сучасних досліджень [1,5-7]. Використання чисельних методів та можливості сучасних комп'ютерів зробили можливим розв'язання багатьох практично важливих інженерних задач. Але проблема побудови ефективних чисельних схем залишається однією з найактуальніших.

Для дослідження нелінійних задач широко застосовуються як метод скінченних елементів (МСЕ) так і метод граничних елементів (МГЕ). У багатьох практично важливих інженерних застосуваннях область пластичної поведінки матеріалу є локальною, тому використання фізичних гетерогенних моделей (тобто одночасне використання як моделі пружного так і моделі пластичного деформування) є оправданим [8]. У задачах пластичності з використанням рівнянь теорії малих пружнопластичних деформацій широко використовується або метод змінних параметрів пружності або метод пружних розв'язків [1,5,6]. МСЕ ефективніший, ніж МГЕ для розв'язання нелінійних задач [7]. У даній статті пропонується комбінована схема МСЕ та МГЕ (числова гетерогенна апроксимація) фізично гетерогенної моделі для двовимірних фізично нелінійних задач [8].

1. Визначимо пружнопластичний напружено-деформований стан тіла, яке обмежене поверхнею $\partial\Omega$, та знаходиться у початковий момент часу t_0 у ненапруженому та недеформованому стані, а потім

навантажене поверхневими та об'ємними силами. Тіло виготовлене з одного або декількох ізотропних матеріалів. Вважається, що під дією навантаження елементи тіла деформуються за межею пружної роботи матеріалу по прямолінійних траєкторіях або близьких до таких з можливим пружним розвантаженням, деформації повзучості при цьому малі у порівнянні з миттєвими пружними та пластичними складовими. Задачу будемо розв'язувати в квазістатичній постановці у межах малих деформацій. Процес навантаження розіб'ємо на етапи таким чином, щоб моменти часу, що розділяють етапи навантаження, співпадали зі зміною напрямку процесу деформування [1,6].

Напружено-деформований стан тіла визначається з рівнянь рівноваги [5,6]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0, \quad (i, j = 1, 2), \quad x \in \Omega \subset R^2, \quad (1)$$

з врахуванням кінематичних крайових умов:

$$u_i = g_i, \quad (i = 1, 2), \quad x \in \partial\Omega_u, \quad (2)$$

статичних крайових умов:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = h_i, \quad (i, j = 1, 2), \quad x \in \partial\Omega_t, \quad (3)$$

причому $\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_t = \partial\Omega$, а $\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_t = \emptyset$.

Мають місце співвідношення Коші:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (i, j = 1, 2). \quad (4)$$

Фізичні співвідношення у відповідності з теорією малих пружно-пластичних деформацій подамо у вигляді [1,5,6]:

$$\sigma_{ij} = 2G' \varepsilon_{ij} + \lambda' \theta \delta_{ij} - \sigma_{ij}^D, \quad (i, j = 1, 2). \quad (5)$$

Тут введені позначення u_i – компоненти вектора переміщень, ε_{ij} – компоненти тензора деформацій, σ_{ij} – компоненти тензора напружень, $F = (F_1, F_2)^T$ – вектор масових сил, g_i – задані значення переміщень, n_i – компоненти одиничного вектора зовнішньої нормалі до границі $\partial\Omega_t$; h_i – задані значення компонент вектора поверхневих сил, $\theta = \varepsilon_{ii}$, $(i, j = 1, 2)$, δ_{ij} – символ Кронекера. Величини G' , λ' , σ_{ij}^D – у загальному випадкові залежать від напружено-деформованого стану тіла та визначаються з відповідних співвідношень [6] через функцію Ψ

$$\Psi = \Gamma^* / 2S = 1 / 2G',$$

тут S – інтенсивність дотичних напружень

$$S = (\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij})^{1/2},$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}, \quad \sigma_0 = \sigma_{ii} / 3, \quad (i, j = 1, 2),$$

Γ^* – інтенсивність деформацій зсуву, яка визначається:

$$\Gamma^* = \left[\frac{1}{2} (e_{ij} - e_{ij}^{ln}) (e_{ij} - e_{ij}^{ln}) \right]^{1/2},$$

тут $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{ii} / 3, \quad (i, j = 1, 2),$

де $e_{ij}^{ln} = \varepsilon_{ij}^{ln}$ – непружні складові компонент тензора деформацій у момент розвантаження, $e_{ij}^{ln} = 0$ у початковий момент часу t_0 і

$$\Gamma^* = \Gamma = (\frac{1}{2} e_{ij} e_{ij})^{1/2}.$$

Залежність $S = \Phi(\Gamma)$, задається у вигляді діаграми деформування, яка визначається експериментально[6].

Далі вважається, що зона пластичної поведінки матеріалу локалізована у частині області Ω_1 , а решта матеріалу тіла у області $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ характеризується лінійною поведінкою, причому $\partial\Omega_c = \Omega_1 \cap \Omega_2$.

2. Для побудови наближеного розв'язку задачі процес деформування тіла представляється послідовністю рівноважних станів. На кожному етапі навантаження компоненти напружень, деформацій та переміщень визначаються шляхом розв'язування крайової задачі для систем нелінійних диференціальних рівнянь (1) у частині області Ω_1 та лінійних у Ω_2 .

Лінеаризація задачі проводиться методом змінних параметрів пружності [1,6], в основі якого лежить представлення залежностей напружень від деформацій за теорією малих пружно-пластичних деформацій у формі узагальненого закону Гука, в якому параметри пружності залежать від напруженого стану в точці, а тому різні у різних точках області Ω_1 . У результаті вихідна нелінійна задача приводиться до послідовності лінійних задач – задач теорії пружності для неоднорідних тіл. Алгоритм МСЕ на основі методу Гальоркіна, напевне, найпоширеніший для розв'язання задач такого класу. У випадкові, коли розміри області Ω_1 набагато більші за розміри області Ω_2 і поведінка розв'язку задачі, в основному, цікавить всередині Ω_1 ,

ефективнішою буде запропонована далі у даній роботі гетерогенна чисельна схема МСЕ та МГЕ [2,4].

Визначимо енергетичний простір, який відповідає області Ω_1 [2]:

$$H_{\Gamma_u}^1(\Omega_1) := \{v \in H^1(\Omega_1) : v = 0 \text{ на } \partial\Omega_1 \cap \Gamma_u\},$$

тут і далі $\Gamma_u = \partial\Omega_u$, $\Gamma_t = \partial\Omega_t$, а $\Gamma_c = \partial\Omega_c$.

Простір слідів гранично-елементної області Ω_2 визначимо як $H^{\frac{1}{2}}(\Omega_2)$, а спряжений до нього – як $H^{-\frac{1}{2}}(\Omega_2)$. Введемо позначення $\langle \sigma, v \rangle = \int_{\partial\Omega_2} (\sigma, v) dS$, де $(\bullet, \bullet)$ — скалярний добуток у R^1 . Введемо

підпростір:

$$H_0^{-\frac{1}{2}}(\Omega_2) := \left\{ x \in \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Omega_2) \right)^2 : \int_{\Omega_1} x dS = 0, \int_{\partial\Omega_1} r x dS = 0 \right\},$$

де r – радіус-вектор точки. Визначимо також добуток просторів:

$$U = \left\{ (u_F, \tilde{u}) \in (H^1(\Omega_1))^2 \times \left(H^{\frac{1}{2}}(\Omega_2) \right)^2, u_F = \tilde{u} \text{ на } \Gamma_c \right\}$$

Тепер простір тестових функцій для області Ω_2 визначається так:

$$V_{\Gamma_u} = \left\{ (v_F, \tilde{v}) \in U : v_F \in (H_{\Gamma_u}^1(\Omega_1))^2, \tilde{v} = w \text{ на } \partial\Omega_2, w \in (H^1(\Omega))^2, w|_{\Gamma_c} = 0 \right\}$$

Тоді варіаційну постановку задачі можна сформулювати:

Знайти

$$((u_F, \tilde{u}), u_B, t_B) \in U \times \left(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_2) \times H_0^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_2) \right) \quad (6)$$

з $u_F = g$ на $\Gamma_u \cap \partial\Omega_1$ і $\tilde{u} = g$ на $\Gamma_u \cap \partial\Omega_2$, що задовільняють рівняння

$$a_F(u_F, v_F) + \langle t_B, \tilde{v} \rangle = f(v_F), \quad \forall (v_F, \tilde{v}) \in V_1 \quad (7)$$

та варіаційні умови спряження:

$$\langle \tilde{u} - u_B, \tau_B \rangle = 0 \quad \forall \tau_B \in \left(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_2) \right)^2. \quad (8)$$

Тут у рівнянні (7):

$$a_F(u_F, v_F) = \int_{\Omega_1} \tilde{D} \varepsilon_{ij}(u_F) \varepsilon_{ij}(v_F) d\Omega$$

$$f(v_F) = \int_{\Gamma_t} h v_F d\Gamma,$$

де $\tilde{\mathbf{D}}$ – матриця змінних параметрів пружності [5,6], а

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}_B, \tilde{\mathbf{v}} \rangle &= \langle \mathbf{S} \mathbf{u}_B, \tilde{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathbf{D} \mathbf{u}_B, \tilde{\mathbf{v}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{t}_B, \tilde{\mathbf{v}} \rangle + \langle \mathbf{t}_B, \mathbf{K} \tilde{\mathbf{v}} \rangle + \langle \mathbf{V} \mathbf{t}_B, \tau \rangle - \\ &- \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}_B, \tau \rangle - \langle \mathbf{K} \mathbf{u}_B, \tau \rangle. \end{aligned}$$

Тут $\mathbf{t}_B$ – вектор поверхневих зусиль, а вигляд псевдодиференціальних операторів $\mathbf{S}, \mathbf{D}, \mathbf{K}, \mathbf{V}$ наведений у [2].

Дискретизацію варіаційної задачі (7),(8) проводимо методом Бубнова-Гальоркіна, з використанням білінійних і біквадратичних апроксимацій переміщень на сирендипових чотирикутниках у області Ω_1 і лінійних та квадратичних апроксимації поверхневих зусиль і переміщень на криволінійних відрізках у області Ω_2 [4]. На кожному ітераційному кроці методу змінних параметрів пружності отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з симетричною матрицею частково стрічкової структури [4]. Елементи матриці знаходимо за допомогою квадратурних формул Гаусса-Лежандра, застосовуючи для обчислення сигулярних і гіперсингулярних інтегралів спеціальні методики. Розв'язання цієї системи проводимо з використанням як прямого модифікованого методу Холецкого [4] так і ітераційного методу – модифікованого методу спряжених градієнтів [3]. Розв'язавши на першому кроці пружну задачу, та визначивши на кожному СЕ дискретизації у гауссових вузлах змінні параметри пружності переформовуємо, СЕ частину матриці системи рівнянь. Критерій зупинки ітераційного процесу вибираємо аналогічно як і у [1].

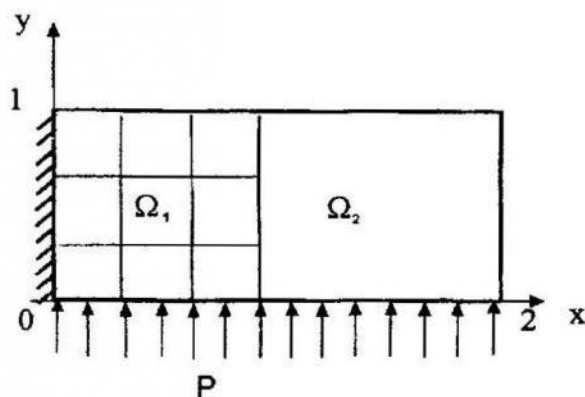


Рис. 1

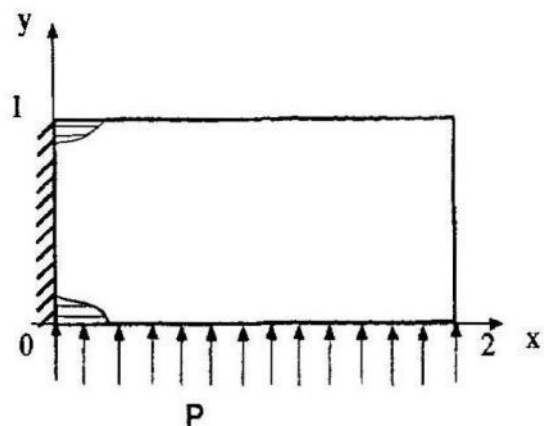


Рис. 2

3. Розглядалася тестова задача визначення пружно-пластичного деформування жорстко зашцеменованого на одній із границь об'єкта під дією рівномірно розподіленого навантаження. Геометрія перетину

площиною об'єкта $z = \text{const}$ та граничні умови схематично зображені на Рис.1. Задача розглядалась для таких значень параметрів: $P=1\text{МПа}$;

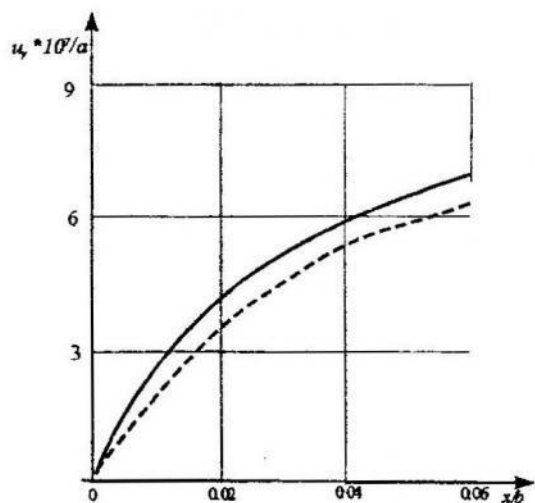


Рис.3

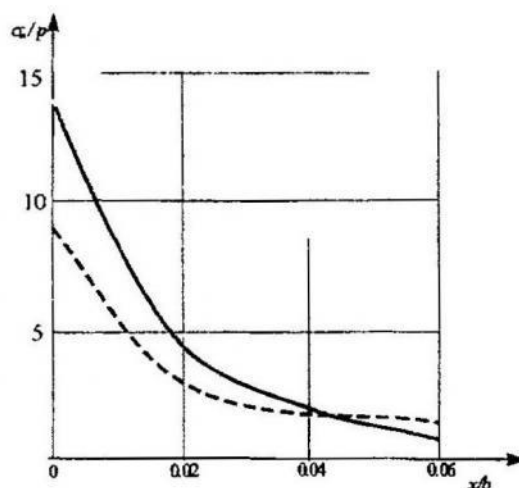


Рис.4

$\nu=0.3$, $E=2 \times 10^7 \text{МПа}$; матеріал вважався ідеально пластичним з межею пружності $\sigma_b=10 \text{МПа}$. Враховуючи крайові умови задачі, апіорі можемо передбачити виникнення пластичних зон в околі заданих умов защемлення. Для вибраних параметрах задачі пластичні деформації виникають у зонах об'єкта, які зображені на Рис.2. На Рис.3,4 наведено розподіл переміщень u_y , і напружень σ_x по лініях $y=0.0$ та $y=1.0$ відповідно у зонах пластичності. Пунктирною лінією наведений розв'язок задачі пружності. Зона спряження областей Ω_1 та Ω_2 у цьому випадкові вибиралася по прямій $x=1.0.1$

Література.

1. Бабешко М.Е., Савченко В.Г. Об одном методе реализации последовательных приближений в краевых задачах термопластичности.//Прикл. механика, т.34, №3, 1998,-с.37-44.
2. Дияк І.І. Симетрична скінченно-гранично-елементна апроксимація D-адаптивної моделі теорії пружності.//Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.-1996, вип. 44. с.102-107.
3. Дияк І.І., Марчук Ю.Б. Застосування ітераційних методів для дослідження комбінованих схем методів скінченних та граничних елементів.//Вісник ЛДУ сер. мех.-мат.-1995, вип.41. с.43-48.
4. Дияк І.І., Чернуха А.Ю. Чисельне дослідження задачі теорії пружності на основі комбінації методів граничних та скінченних елементів.// Вісник ЛДУ сер.мех.-мат.-1993,вип. 39.с. 41-46.
5. Карзов Г.П. Марголин Б.З. Физико-механическое моделирование процессов разрушения.- СПб.: Политехника,1993.-391с
6. Шевченко Ю. Н., Бабешко М.Е., Пискун В.В., Савченко В.Г. Пространственные задачи

термопластичности.-К.: Научная думка, 1980.-261с. 7. Schnack E. Mixed methods in BEM for elasto-plastic problems.// Boundary Element VIII:Proc. 8th Int. Conf., Tokyo, 1986, pp.641-651. 8. Quarteroni A. Multifields modeling in numerical simulation on partial differential equations.//GAMM- Mitteilungen 1996, Heft 1,p.45-63.

I.I. Dyak

The combined numerical scheme for the problems of plasticity

The paper presents some aspects of the formulation and numerical implementation of physical and mathematical multifields model for 2-D elasticity problem. The numerical investigation of the problem is performed by coupling Direct Boundary Element for the part of construction which is described by equations of the theory of elasticity and Finite Element Method for the remaining part of construction which is described by equations of the theory of plasticity. Numerical example is presented supporting the analysis.

Стаття надійшла до редколегії 10.12.1998

УДК 539.3

А.В.Дубовик, А.М.Олійник

Застосування методів комп'ютерної алгебри до розв'язування осесиметричної задачі теорії пружності та теплопровідності

Серед методів розв'язування задач механіки суцільного середовища метод скінченних елементів займає особливе місце завдяки своєму достатньо простому математичному формулюванню, очевидному фізичному змісту і високій ефективності. З розвитком комп'ютерної техніки цей метод дістав широкого використання. Важливим етапом методу скінченних елементів є формування системи рівнянь, з якої шукаються невідомі параметри. Велике значення при цьому має час обчислення матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, особливо при великій кількості скінченних елементів. Проблема знаходження елементів системи зводиться до обчислення певних інтегралів, вигляд яких залежить від конкретної задачі. Ця проблема може бути розв'язана двома шляхами:

- чисельним інтегруванням за квадратурними формулами (як правило це квадратурні формули Гауса)