термопластичности.-К.: Наукова думка, 1980.-261с. 7. Schnack E. Mixed methods in BEM for elasto-plastic problems.// Boundary Element VIII:Proc. 8th Int. Conf., Tokyo, 1986, pp.641-651. 8. Quarteroni A. Multifields modeling in numerical simulation on partial differential equations.//GAMM- Mitteilungen 1996, Heft 1,p.45-63.

I.I. Dyyak

The combined numerical scheme for the problems of plasticity

The paper presents some aspects of the formulation and numerical implementation of physical and mathematical multifields model for 2-D elasticity problem. The numerical investigation of the problem is performed by coupling Direct Boundary Element for the part of construction which is described by equations of the theory of elasticity and Finite Element Method for the remaining part of construction which is described by equations of the theory of plasticity. Numerical example is presented supporting the analysis.

Стаття надійшла до редколегії 10.12.1998

УДК 539.3

А.В.Дубовик, А.М.Олійник

Застосування методів комп'ютерної алгебри до розв'язування осесиметричної задачі теорії пружності та теплопровідності

Серед методів розв'язування задач механіки суцільного середовища метод скінченних елементів займає особливе місце завдяки своєму достатньо простому математичному формулюванню, очевидному фізичному змісту і високій ефективності. З розвитком комп'ютерної техніки цей метод дістав широкого використання. Важливим етапом методу скінченних елементів є формування системи рівнянь, з якої шукаються невідомі параметри. Велике значення при цьому має час обчислення матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, особливо при великій кількості скінченних елементів. Проблема знаходження елементів системи зводиться до обчислення певних інтегралів, вигляд яких залежить від конкретної задачі. Ця проблема може бути розв'язана двома шляхами:

- чисельним інтегруванням за квадратурними формулами (як правило це квадратурні формули Гауса)

- аналітичним обчисленням за допомогою пакетів комп'ютерної алгебри (там де це є можливим)

В даній роботі робиться спроба порівняти ефективність цих підходів для для розв'язування осесиметричних задач теорії пружності та теплопровідності. Отримані результати вказують на певні переваги аналітичного способу обчислення матриць СЛАР.

Напружено-деформований стан тіла в осесиметричній задачі теорії пружності описується рівнянням рівноваги, рівнянням Коші, законом Гука[1,4], які можна записати у матричному вигляді:

$$\begin{cases} D\vec{\sigma}+\vec{F}=0 & (1)\\ \vec{\varepsilon}=D_1\vec{u} \qquad x\in\Omega & (2)\\ \vec{\sigma}=C\vec{\varepsilon} & (3)\end{cases}$$

де D, D_1 –відомі диференціальні оператори, а C – матриця пружних констант[1].

Ця система доповнюється граничними умовами на поверхні тіла:

Статичні умови

$$\begin{cases}\sigma_{nn}=p_{nn}\\ \sigma_{n\tau}=p_{n\tau}\end{cases},x\in S_1 \qquad (4a)$$

Кінематичні умови

$$\begin{cases}u_n=\widetilde{u}_n\\ u_\tau=\widetilde{u}_\tau\end{cases},x\in S_2 \qquad (4b)$$

Тут $S_1\bigcup S_2=\partial\Omega, S_1\bigcap S_2=0$. Диференціальні співвідношення (1)-(2)-(3), замкнені граничними умовами $(4a)$ або $(4b)$, становлять крайову задачу про деформацію осесиметричного тіла. Задача полягає у знаходженні компонент тензора напружень σ, деформації ε та компонент вектора переміщень u.

Варіаційна постановка цієї задачі полягає у мінімізації функціоналу потенціальної енергії деформованого тіла:

$$\Pi(\vec{u}):=\frac{1}{2}\int_\Omega\vec{\sigma}^T\vec{\varepsilon}\,d\Omega-\int_\Omega\vec{F}^T\vec{u}\,d\Omega-\int_{S_2}(u_n p_{nn}+u_\tau p_{n\tau})dS$$

на множині вектор-функцій $V\in W_2^{(1)}(\Omega)$, що задовольняють кінематичні граничні умови $(4b)$. Використовуючи скінченноелементну апроксимацію

$$\vec{u}=N\ \widetilde{u},\vec{F}=N\ \widetilde{F},\vec{p}=N\ \widetilde{p},$$

на основі процедури Бубнова-Гальоркіна, крайова задача зводиться до знаходження переміщень у вузлах СЕ сітки на основі розв'язання СЛАР $K\widetilde{u}=G\widetilde{p}+L\widetilde{F}$, де

$$K = \int\limits_{\Omega} (D_1 N)^T C (D_1 N) d\Omega \qquad G = \int\limits_{\partial\Omega} N^T B^T N \, dS$$

$$L = \int\limits_{\Omega} N^T N \, d\Omega$$

Тут N –вектор базисних функцій. Якщо $\vec{n} = (n_1, n_2), \vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ – одинична зовнішня нормаль та дотична до $\partial\Omega$, то

$$B = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{pmatrix}$$

Матриці K_e, G_e, L_e (матриці на скінченному елементі) матимуть наступну структуру:

$$K_e = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} K_{11}^{(1)} & K_{11}^{(2)} & \cdots & \cdots & K_{1n}^{(1)} & K_{1n}^{(2)} \\ K_{11}^{(3)} & K_{11}^{(4)} & \cdots & \cdots & K_{1n}^{(3)} & K_{1n}^{(4)} \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \hline K_{n1}^{(1)} & K_{n1}^{(2)} & \cdots & \cdots & K_{nn}^{(1)} & K_{nn}^{(2)} \\ K_{n1}^{(3)} & K_{n1}^{(4)} & \cdots & \cdots & K_{nn}^{(3)} & K_{nn}^{(4)} \end{array}\right),$$

$$G_e = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} G_{11}^{(1)} & G_{11}^{(2)} & \cdots & \cdots & G_{1n}^{(1)} & G_{1n}^{(2)} \\ G_{11}^{(3)} & G_{11}^{(4)} & \cdots & \cdots & G_{1n}^{(3)} & G_{1n}^{(4)} \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \hline G_{n1}^{(1)} & G_{n1}^{(2)} & \cdots & \cdots & G_{nn}^{(1)} & G_{nn}^{(2)} \\ G_{n1}^{(3)} & G_{n1}^{(4)} & \cdots & \cdots & G_{nn}^{(3)} & G_{nn}^{(4)} \end{array}\right)$$

$$L_e = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} L_{11} & 0 & \cdots & \cdots & L_{1n} & 0 \\ 0 & L_{11} & \cdots & \cdots & 0 & L_{1n} \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \hline L_{n1} & 0 & \cdots & \cdots & L_{nn} & 0 \\ 0 & L_{n1} & \cdots & \cdots & 0 & L_{nn} \end{array}\right)$$

Елементи матриць визначаються за такими формулами:

$$K_{ij}^{(1)} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\{(1-\nu)\int\limits_{\Omega_e}\frac{\partial N_i}{\partial r}\frac{\partial N_j}{\partial r}+\frac{N_i}{r}\frac{N_j}{r}d\Omega+\frac{1-2\nu}{2}\int\limits_{\Omega_e}\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}d\Omega+$$

$$+\nu\int\limits_{\Omega_e}\frac{\partial N_i}{\partial r}\frac{N_j}{r}+\frac{N_i}{r}\frac{\partial N_j}{\partial r}d\Omega\}$$

$$K_{ij}^{(2)} = K_{ji}^{(3)} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\{\frac{1-2\nu}{2}\int\limits_{\Omega_e}\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial r}d\Omega+\nu\int\limits_{\Omega_e}\frac{\partial N_i}{\partial r}\frac{\partial N_j}{\partial z}+\frac{N_i}{r}\frac{\partial N_j}{\partial z}d\Omega\} \tag{5}$$

$$K_{ij}^{(4)} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\{\frac{1-2\nu}{2}\int\limits_{\Omega_e}\frac{\partial N_i}{\partial r}\frac{\partial N_j}{\partial r}d\Omega+(1-\nu)\int\limits_{\Omega_e}\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}d\Omega\}$$

$$G_{ij}^{(1)} = G_{ij}^{(4)} = \int\limits_{-1}^{1}N_iN_j\,z'(\alpha)r(\alpha)\,d\alpha,\ G_{ij}^{(2)} = -G_{ij}^{(3)} = \int\limits_{-1}^{1}N_iN_j\,r'(\alpha)r(\alpha)\,d\alpha,$$

$$L_{ij} = \int\limits_{\Omega_e}N_iN_j\,d\Omega$$

Варіаційна постановка осесиметричної задачі теплопровідності полягає у мінімізації функціоналу енергії

$$\Pi(T)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}((grad\,T)^T\lambda_q(grad\,T)-2wT-2cT\dot{T})d\Omega+\int\limits_{S_2}qT\,dS+\int\limits_{S_3}\frac{1}{2}h(T-T_c)T\,dS$$

при заданому $T|_{S_1}=\overline{T}$. Тут $\partial\,\Omega = S_1\cup S_2\cup S_3$, w – питома потужність джерел тепла, q – тепловий потік через поверхню S_2, h – коефіцієнт тепловіддачі, T_c – температура середовища. На частині поверхні S_1 підтримується температура $\overline{T}$, на S_2 задано тепловий потік q через поверхню, а на S_3 відбувається теплообмін з зовнішнім середовищем, температура якого T_c. В початковий момент температура тіла T_0.

Після використання скінченноелементної апроксимації крайова задача зводиться до розв'язування наступної системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases}MT+C\dot{T}=f\\ T(0)=T_0\end{cases},$$

де

$$M=\int\limits_{\Omega}(grad\,N)^T\lambda_q(grad\,N)\,d\Omega+\int\limits_{S_2}hN^TN\,dS,\ C=\int\limits_{\Omega}cN^TN\,d\Omega,$$

$$f=\int\limits_{\Omega}N^TN\,d\Omega\ \widetilde{w}-\int\limits_{S_2}N^TN\,dS\ \widetilde{q}+\int\limits_{S_3}hN^TN\,dS\ \widetilde{T}_c$$

Перше рівняння перепишемо так:

$$[K + hG(S_2)]T_e + cE\dot{T}_e = E\widetilde{w} - G(S_2)\widetilde{q} + hG(S_3)\widetilde{T}_c.$$

Елементи матриць на скінченному елементі обчислюються за наступними формулами:

$$K_{ij} = \int_{\Omega_e} (k_{rr}\frac{\partial N_i}{\partial r}\frac{\partial N_j}{\partial r} + k_{zz}\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z})d\Omega\,,\quad G_{ij}(S) = \int_{S\bigcap\partial\Omega} N_i N_j\, dS\,,$$

$$E_{ij} = \int_{\Omega_e} N_i N_j\, d\Omega \tag{6}$$

Саме інтеграли (5) і (6) нам і потрібно обчислити чисельним інтегруванням чи (де це можливо) аналітично за допомогою пакету Mathematica [2,3] для вибраних скінченних елементів та базисних функцій. Для цього використовувалися такі оператори системи Mathematica

Integrate[f(x,y),{x,x1,x2},{y,y1,y2}] – оператор інтегрування по двовимірній області

D[f(x,y),x], D[f(x,y),y] – оператори обчислення часткових похідних.

Прості оператори мають синтаксис C++.

Для розбиття області використовувались СЕ серендипового типу[1,5]. Зауважимо, що лише для прямокутних СЕ з рівномірним розташуванням вузлів на границях можливе аналітичне обчислення інтегралів.

Було реалізовано набір модулів на мові C++ для обчислення матриць на СЕ при білінійній, біквадратичній та бікубічній апроксимації аналітичним та чисельним методами.

Було проведено аналіз цих двох підходів. В наведених нижче таблицях порівнюється час обчислення матриць в мілісекундах (для Pentium-120)

а) задача про деформації

порядок	K			E		
	аналітично	чисельно	відношення	аналітично	чисельно	відношення
1	0.022	0.181	8	0.0044	0.0516	11
2	0.099	1.279	12	0.0164	0.247	15
3	0.225	4.278	19	0.0374	0.945	25

б) задача теплопровідності

поря-док	K			G			E		
	анал.	чис.	відн.	анал.	чис.	відн.	анал.	чис.	відн.
1	0.0066	0.077	11	0.0027	0.0083	3	0.005	0.061	12
2	0.022	0.395	17	0.044	0.016	3	0.016	0.292	18
3	0.044	1.181	26	0.072	0.031	4	0.039	0.867	22

Цікавим є також питання про точність обчислення окремих елементів матриць (5), (6). Ці результати представлені в таблицях:

а) задача про деформації

порядок	K		E
	елементи типу 1*	інші елементи	
1	0.003	9e-14	2e-14
2	0.0005	2e-12	1e-14
3	0.006	4e-5	3e-9

*Примітка: під елементами типу 1 матриці K розуміємо елементи $K_{ij}^{(1)}$

Бачимо, що елементи типу 1 неможливо точно обчислити чисельним шляхом, але як показали тести на реальних задачах на розв'язок це не має впливу.

б) задача теплопровідності

порядок	K	G	E
1	3e-14	3e-14	2e-14
2	6e-14	2e-14	1e-14
3	5e-8	5e-9	3e-9

Таким чином, отримані результати демонструють значний виграш в швидкості обчислення матриць аналітичним методом. Виграшу в точності чи швидкості збіжності результатів при згущуванні сітки СЕ не спостерігається. Для криволінійних СЕ можна користуватись лише чисельним способом. При розбитті домена на скінченні елементи бажано здійснювати розбиття таким чином, щоб максимальна кількість СЕ була прямокутними, а решта – криволінійними для забезпечення апроксимації границі домена. Таким способом розбиття ми доб'ємося максимальної швидкості побудови матриць СЛАР.

Література.

1. Сахаров А.С., Альтенбах и др. Метод конечных елементов в механике твердых тел, К.:Вища школа, 1982, 2. Steven

Wolfram. Mathematica: A System for doing Mathematica by Computers, 3. Nancy Blachman. Mathematica: a practical approach, Prentice-Hall, 1991, 4. Розин Л. А. Метод конечных елементов в применениях к упругим системам, М.:Стройиздат, 1977, 5. Зенкевич О., Морган К. Конечные елементы и аппроксимация, М.:Мир, 1987

Dubovyk A.V., Oliynyk A.M.

The application of computer algebra methods to the solution of axisymmetric elasticity and heat transfer problems

The possibilities of using package of "Mathematica" for generating FEM system of algebraic equations are discussed. The FE stiffness matrices for axisymmetric problems of elasticity and heat transfer are obtained in analitical form. The efficacy of this approach is compared with standard numerical integration procedure.

Стаття надійшла до редколегії 1.12.1998

УДК 517.946

І.М.Дудзяний, В.М.Цимбал

Деяка задача для сингулярно збуреного рівняння третього порядку

Задачами для сингулярно збурених рівнянь у частинних похідних основних типів: еліптичних, параболічних та гіперболічних присвячена багаточисленна література. Значно менше вивчені задачі для сингулярно збурених рівнянь у частинних похідних, що не входять у цю класифікацію.

Тут розглядається задача для сингулярно збуреного некласичного рівняння третього порядку в області $D=\{(x,t): 0\le x\le l, 0\le t\le T\}$

$$\varepsilon\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+c(x,t)u=f(x,t) \tag{1}$$

$$u(0,t,\varepsilon)=0,\ \frac{\partial u(0,t,\varepsilon)}{\partial x}=0,\ u(l,t,\varepsilon)=0, \tag{2}$$

$$u(x,0,\varepsilon)=0, \tag{3}$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр, $0<T<+\infty$.