Wolfram. Mathematica: A System for doing Mathematica by Computers, 3. Nancy Blachman. Mathematica: a practical approach, Prentice-Hall, 1991, 4. Розин Л. А. Метод конечных елементов в применениях к упругим системам, М.:Стройиздат, 1977, 5. Зенкевич О., Морган К. Конечные елементы и аппроксимация, М.:Мир, 1987

Dubovyk A.V., Oliynyk A.M.

The application of computer algebra methods to the solution of axisymmetric elasticity and heat transfer problems

The possibilities of using package of "Mathematica" for generating FEM system of algebraic equations are discussed. The FE stiffness matrices for axisymmetric problems of elasticity and heat transfer are obtained in analitical form. The efficacy of this approach is compared with standard numerical integration procedure.

Стаття надійшла до редколегії 1.12.1998

УДК 517.946

І.М.Дудзяний, В.М.Цимбал

Деяка задача для сингулярно збуреного рівняння третього порядку

Задачами для сингулярно збурених рівнянь у частинних похідних основних типів: еліптичних, параболічних та гіперболічних присвячена багаточисленна література. Значно менше вивчені задачі для сингулярно збурених рівнянь у частинних похідних, що не входять у цю класифікацію.

Тут розглядається задача для сингулярно збуреного некласичного рівняння третього порядку в області $D=\{(x,t): 0\le x\le l, 0\le t\le T\}$

$$\varepsilon\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+c(x,t)u=f(x,t) \qquad (1)$$

$$u(0,t,\varepsilon)=0,\ \frac{\partial u(0,t,\varepsilon)}{\partial x}=0,\ u(l,t,\varepsilon)=0, \qquad (2)$$

$$u(x,0,\varepsilon)=0, \qquad (3)$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр, $0<T<+\infty$.

Нехай виконуються такі умови:

1) усі функції, що входять в (1), достатньо гладкі, що забезпечує можливість подальших викладок;
2) $a(x,t)>0$ в D або $a(x,t)<0$ в D,
3) виконуються умови узгодженості в кутових точках (0, 0) і $(0,l)$ області D до порядку N, де N – порядок побудованої нижче асимптотики.

При цих припущеннях класичний розв'язок задачі (1) – (3) існує та єдиний при будь-яких $\varepsilon>0$ [2].

Методом примежового шару [1] побудуємо асимптотичне розвинення розв'язку задачі (1) – (3) за степенями малого параметру ε. Воно залежить від знаку $a(x,t)$ в D.

1. ***Нехай*** $a(x,t)>0$ ***в D***.

Асимптотику розв'язку задачі (1) – (3) будуємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^{i}u_i(x,t)+\varepsilon\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^{i}\Pi_i(\xi,t)+R_N(x,t,\varepsilon), \tag{4}$$

де $u_i(x,t)$ $(i=\overline{0,N})$ – функції регулярної частини асимптотики, $\Pi_i(\xi,t)$ $(i=\overline{0,N})$ – функції примежового шару в околі границі $x=0$ області D, $\xi={x}/{\varepsilon}$ – регуляризуюче перетворення, $R_N(x,t,\varepsilon)$ – залишковий член асимптотики.

Побудова задач для знаходження функцій, що входять у (4), стандартна [1], тому просто їх випишемо. Функції регулярної частини асимптотики знаходяться як розв'язок таких задач для гіперболічних рівнянь другого порядку

$$-\frac{\partial^2 u_i}{\partial x\partial t}+a(x,t)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}+b(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x}+c(x,t)u_i=f_i(x,t),\ (i=\overline{0,N}) \tag{5}$$

$$u_i(0,t)=-\Pi_{i-1}(0,t),\, u_i(l,t)=0,\, u_i(x,0)=0,\quad (i=\overline{0,N}) \tag{6}$$

де $f_0(x,t)\equiv f(x,t)$, $f_i(x,t)=-\dfrac{\partial^3 u_{i-1}}{\partial x^3}$ $(i=\overline{1,N})$, а функція з від'ємним індексом тут і надалі вважається тотожньо рівною нулю.

Функції примежового шару в околі границі $x=0$ області D є розв'язками задач

$$\frac{\partial^3\Pi_i}{\partial\xi^3}+a(0,t)\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial\xi^2}=p_i(\xi,t),\quad (i=\overline{0,N}) \tag{7}$$

$$\frac{\partial \Pi_i(0,t)}{\partial \xi} = -\frac{\partial u_i(0,t)}{\partial x}, \quad \Pi_i(\xi,t) \xrightarrow[\xi\to\infty]{} 0, \quad (i=\overline{0,N}) \tag{8}$$

де $p_0(\xi,t) \equiv 0$, а $p_i(\xi,t) \quad (i=\overline{1,N})$ легко виписуються у явному вигляді і, що важливо, залежать від $\Pi_j(\xi,t) \quad (j<i)$ та їх похідних.

Очевидно, що функції, які входять у (4), будуються рекурентно у такій послідовності: $u_0(x,t), \Pi_0(\xi,t), u_1(x,t)$ і т.д.

Зауважимо, що умови узгодженості 3) забезпечують виконання звичайних умов узгодженості в кутових точках (0, 0) і $(0, l)$ області D, що забезпечує існування класичних розв'язків задач (5), (6), які можуть бути знайдені методом характеристик [3], а також виконанням співвідношень $\Pi_i(\xi,t)\Big|_{t=0} = 0 \quad (i=\overline{0,N})$.

Стандартним чином [1] легко показується, що $\Pi_i(\xi,t) \quad (i=\overline{0,N})$ – розв'язки задач (7), (8) для звичайних диференціальних рівнянь (t – параметр), є функціями примежового шару.

2. ***Нехай*** $a(x,t)<0$ ***в D***.

Асимптотику розв'язку задачі (1) – (3) будуємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i u_i(x,t) + \varepsilon \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i Q_i(\eta,t) + R_N(x,t,\varepsilon), \tag{9}$$

де $u_i(x,t) \ (i=\overline{0,N})$ – функції регулярної частини асимптотики, $Q_i(\eta,t) \ (i=\overline{0,N})$ – функції примежового шару в околі границі $x=l$ області D, $\eta = {(l-x)}/{\varepsilon}$ – регуляризуюче перетворення, $R_N(x,t,\varepsilon)$ – залишковий член асимптотики.

Функції регулярної частини асимптотики знаходяться як розв'язки гіперболічних рівнянь другого порядку (5) з граничними та початковими умовами

$$u_i(0,t)=0, \frac{\partial u_i(0,t)}{\partial x}=0, u_i(x,0)=0. \quad (i=\overline{0,N}) \tag{10}$$

Функції примежового шару в околі границі $x=l$ області D є розв'язками задач

$$-\frac{\partial^3 Q_i}{\partial \eta^3} + a(l,t)\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \eta^2} = q_i(\eta,t), \quad (i=\overline{0,N}) \tag{11}$$

$$Q_i(0,t) = -u_i(l,t), \quad Q_i(\eta,t) \xrightarrow[\eta\to\infty]{} 0, \quad (i=\overline{0,N}) \tag{12}$$

де $q_0(\eta, t) \equiv 0$, а $q_i(\eta, t)$ $(i = \overline{1, N})$ легко виписуються у явному вигляді і, що важливо, залежать від $Q_j(\eta, t)$ $(j < i)$ та їх похідних.

Так само очевидно, що функції, які входять у (9), будуються рекурентно у такій послідовності: $u_0(x, t), Q_0(\eta, t), u_1(x, t)$ і т.д.

Зауважимо, що умови узгодженості 3) як і раніше забезпечують виконання звичайних умов узгодженості в кутовій точках (0, 0) області D, що забезпечує існування класичних розв'язків задач (5), (10), які так само можуть бути знайдені методом характеристик [3], а також виконанням співвідношень $Q_i(\eta, t)\Big|_{t=0} = 0$ $(i = \overline{0, N})$.

Так само, як і вопередньому випадку, показується, що функції $Q_i(\eta, t)$ $(i = \overline{0, N})$ є функціями примежового шару.

3. **Залишковий член асимтотики**, як у першому, так і в другому випадках, визначається стандартним чином і є розв'язком задачі аналогічної до вихідної задачі (1)-(3) з деякою правою частиною (виписується явним чином) і деякими, взагалі кажучи, неоднорідними граничними умовами (2) та нульовою початковою умовою (3).

Методом послідовних наближень аналогічно [2] встановлена оцінка

$$\left|R_N(x, t, \varepsilon)\right| \le c\varepsilon^{N+1}, \tag{13}$$

де константа c не залежить від ε, що і доводить асимптотичну коректність розвинень (4) та (9).

Література.

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. –Успехи мат. наук, 1957, 122, №5, с. 3-12. 2. Джураев А.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент:Фан, 1979. – 238с. 3. Кирилич В.М. Основні крайові задачі для гіперболічних рівнянь і систем на прямій. – Київ, 1993 – 72 с.

Doudzianiy I. M., Tsimbal V. N.

A certain problem for singular perturbated equation of third order

Asymptotic decomposition of solution of certain problem for singular perturbated equation in partial derivatives of third order was built, which is not falling into the usual categorization. Method of building - a method of frontier layer. Literature - 3 names

Стаття надійшла до редколегії 5.11.1998