УДК 518:517.9

М.В.Жук

Застосування методу Канторовича для систем диференціальних рівнянь у випадку крайових умов мішаної задачі

Розглянемо застосування методу Канторовича для систем диференціальних рівнянь

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(P)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + R(P)u = f(P), \qquad (1)$$

при умовах

$$N(u) = \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\right]\Big|_{\Gamma} = 0 \qquad (2)$$

де $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i)$, ν – зовнішня нормаль до Γ.

Систему (1) розглядаємо в області $Д$ простору $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, обмеженої достатньо гладкою поверхнею Γ, яка включає дві гіперплощини $x_1 = a$ і $x_1 = b$, $a < b$. $P(x_1, \ldots, x_m)$, $Q(x_2, \ldots, x_m)$ – точки відповідно m і m-1 - вимірних просторів.

У системі (1)-(2) $u(P), f(P)$ –s - компонентні вектор-функції; $A_{ij}(P)$, $R(P)$ – матриці s-го порядку, які для простоти вважатимемо неперервними, а $A_{ij}(P)$ – неперервно диференційованими.

Відносно заданої функції $f(P)$ припускаємо, що вона належить дійсному гільбертовому простору $U = L_2(Д)$ із нормою

$$\|f\|^2 = \int_Д f^2(P)dP = \int_Д \sum_{k=1}^{n} f_k^2(P)dP.$$

Крім того, припускаємо, що матриці A_{ij} задовольняють умови

$$A_{ij}(P) = A_{ji}(P)$$

і, які б не були s-компонентні вектори $t_1, t_2, \ldots, t_m$ виконується нерівність

$$\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij} t_i t_j \geq \mu_0 \sum_{k=1}^{m} \|t_k\|^2, \tag{3}$$

$\mu_0 = const > 0$. Відносно матриць R і σ припускаємо, що вони задовольняють умовам

$$(Ru, u) \geq \alpha_0 \|u\|^2, \tag{4}$$

$$\int_{\Gamma} \sigma u \cdot u dS \geq \beta_0 \int_{\Gamma} u^2 dS \tag{5}$$

при довільній функції $u \in H$, $\alpha_0, \beta_0 = const$.

За область визначення $D(L)$ оператора L приймаємо множину s-компонентних вектор-функцій $u(P)$, які двічі неперевно диференційовані в області $\overline{Д} = Д \cap Г$ і які задовільняють крайові умови (2).

Введемо допоміжний оператор T, який визначається формулами

$$Tu = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{6}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i) + u\right]_{\Gamma} = 0 \tag{7}$$

Оператор T розглядаємо як оператор, що діє в $H = L_2(Д)$.

За область визначення $D(T)$ оператора T приймаємо множину s-компонентних вектор-функцій, які двічі неперевно диференційовані в $\overline{Д}$ і які задовольняють крайові умови (7).

Оператор T додатно визначений. Дійсно, він симетричний і, враховуючи нерівність Фрідріхса для довільного $u \in D(T)$

$$\int_{Д} u^2 dp \leq c\left\{\int \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dP + \int_{\Gamma} u^2 dS\right\},$$

$c = const > 0$, отримуємо

$$\begin{aligned}(Tu, u) &= \int_{Д} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dP - \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i) u dS = \\ &= \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dP + \int_{\Gamma} u^2 dS \geq \frac{1}{c} \int_{Д} u^2 dP = \gamma^2 \|u\|^2\end{aligned}, \tag{8}$$

де $\gamma = \frac{1}{\sqrt{c}} > 0$.

Позначимо через $H_\sigma \subset H$ – енергетичний простір оператора T, тобто замикання $D(T)$ в метриці

$$[u,v]_\sigma = (Tu,v) = \int_Д \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dP + \int_Г uvdS$$

$$|u|_\sigma^2 = [u,u]_\sigma .$$

Нерівність (8) в результаті граничного переходу для довільного $u \in H_\sigma$ дає

$$\|u\| \le \frac{1}{\gamma}|u|_\sigma \tag{9}$$

Крім того, припускаємо, що для задачі (1)-(2) константи χ_0, α_0, γ такі, що для константи

$$\eta_0 = \begin{cases} \chi_0 + \dfrac{\alpha_0}{\gamma^2},\ якщо\ \alpha_0 \le 0 \\ \chi_0,\ якщо\ \alpha_0 \ge 0 \end{cases} \tag{10}$$

де $\chi_0 = \min(\mu_0, \beta_0)$, виконується умова $\eta_0 > 0$.

Для довільних $u,\ v \in H_\sigma$ формально введемо білінійну форму

$$L(u,v) = \int_Д \left[\sum_{i,j=1}^m A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + R(P)u\cdot v\right]dP + \int_Г \sigma(s)u\cdot vdS \tag{11}$$

Тоді для довільного $u \in H_\sigma$ виконується

$$L(u,u) \ge \eta_0 |u|_\sigma^2, \tag{12}$$

де η_0 визначається співвідношенням (10).

Дійсно, для довільного $u \in H_\sigma$, використовуючи нерівності (3), (4) і (5), маємо

$$\begin{aligned} L(u,u) &= \int_Д \left[\sum_{i,j=1}^m A_{i,j}(p)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j} + R(p)u\cdot u\right]dP + \\ &+ \int_Г \sigma u\cdot udS \ge \mu_0 \int_Д \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dP + \alpha_0\|u\|^2 + \\ &+ \beta_0 \int_Г u^2 dS \ge \min\{\mu_0, \alpha_0\}|u|_\sigma^2 + \alpha_0\|u\|^2 \end{aligned} \tag{13}$$

Якщо $\alpha_0 \le 0$, то, використовуючи нерівність (9), із (13) отримуємо

$$L(u,u) \ge x_0 |u|_\sigma^2 + \frac{\alpha_0}{\gamma_0} |u|_\sigma^2 = \eta_0 |u|_\sigma^2$$

Якщо $\alpha_0 \ge 0$, то із (13) маємо

$$L(u,u) \ge x_0 |u|_\sigma^2 + \alpha_0 \|u\|^2 \ge x_0 |u|_\sigma^2 = \eta_0 |u|_\sigma^2 .$$

Отже, нерівність (12) виконується.

Узагальненим розв'язком задачі (1)-(2) називається функція $u \in H_\sigma$, для якої виконується тотожність

$$L(u,v) = \int_{Д} fv dP \tag{14}$$

при довільній $v \in H_\sigma$. Відомо, що виконання умови (12) забезпечує існування та єдиність узагальненого розв'язку [1].

Задачу (1)-(2) розв'язуємо методом Канторовича, згідно з яким наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{s} C_{kl}(x_1) \varphi_{kl}(P) , \tag{15}$$

де $\varphi_{kl}(P)$ – попередньо вибрані функції

$$\begin{array}{l} \varphi_{kl}(P) = \left(0,\ldots,0,\varphi_k(P),0,\ldots,0\right) \\ k = 1,2,3,\ldots, \quad l = 1,2,\ldots,s \end{array},$$

причому $\varphi_k(P)$ займає l-те місце. Вважаємо, що функції $\varphi_k(P)$ неперервні разом з другими похідними. Ці функції вибираємо таким чином, щоб система функцій

$$\left\{\chi_\rho(x_1)\varphi_{kl}(P)\right\} \subset H_\sigma \quad \rho,k=1,2,3,\ldots; \quad l = 1,2,\ldots,s ,$$

була повною системою лінійно незалежних функцій в просторі H_σ.

Невідомі коефіцієнти $C_{kl}(x_1)$ визначаємо із відповідної для задачі (1)-(2) системи методу Канторовича [2].

Для прикладу запишемо цю систему у вигляді, коли m=3, а область Д визначається наступним чином

$$\begin{array}{l} Д: \{a \le x_1 \le b, c \le x_2 \le d, g(x_1,x_2) \le x_3 \le h(x_1,x_2)\}, \\ a < b, \;\; c < d, \;\; g(x_1,x_2) < h(x_1,x_2) \end{array}$$

Тоді система методу Канторовича приймає вигляд

$$
\begin{aligned}
&\int_c^d \int_{g(x_1,x_2)}^{h(x_1,x_2)} \left(Lu_n - f\right)\varphi_{kl} dx_2 dx_3 + \int_{g(x_1,c)}^{h(x_1,c)} N(u_n)\varphi_{kl}\Big|_{x_2=c} dx_3 + \\
&+ \int_{g(x_1,d)}^{h(x_1,d)} N(u_n)\varphi_{kl}\Big|_{x_2=d} dx_3 + \\
&+ \int_c^d N(u_n)\varphi_{kl}\Big|_{x_3=g(x_1,x_2)} \sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2}\, dx_2 + \\
&+ \int_c^d N(u_n)\varphi_{kl}\Big|_{x_3=h(x_1,x_2)} \sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2}\, dx_2 = 0
\end{aligned}, \qquad (16)
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_c^d \int_{g(a,x_2)}^{h(a,x_2)} N(u_n)\varphi_{kl}\Big|_{x_1=a} dx_2 dx_3 = 0, \\
&\int_c^d \int_{g(b,x_2)}^{h(b,x_2)} N(u_n)\varphi_{kl}\Big|_{x_1=b} dx_2 dx_3 = 0,
\end{aligned} \qquad (17)
$$

Система (16) зводиться до лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно $C_{kl}(x_1)$, $k = 1,2,\ldots,n;$ $l = 1,2,\ldots,s$.

Не обмежуючи загальності, для конкретності надалі будемо вважати, що система методу Канторовича має вигляд (16)-(17).

Введемо поняття узагальненого розв'язку системи методу Канторовича (16)-(17).

Позначимо через $H_n \subset H$ простір функцій виду $v_n(p) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{s} C_{kl}(x_1)\varphi_{kl}(P)$. Нехай для деякої функції $u_n \in H_n \cap H_\sigma$ справедлива тотожність

$$
L(u_n, v_n) = \int_{Д} f v_n dP \qquad (18)
$$

при довільній функції $v_n \in H_n \cap H_\sigma$. Тоді функція u_n називається узагальненим розв'язком системи методу Канторовича.

Покажемо тепер, що узагальнений розв'язок системи методу Канторовича існує. Для цього застосуємо до вихідної задачі (1)-(2) метод Бубнова-Гальоркіна, згідно якого наближений розв'язок $u_n^t(p)$ шукається у вигляді

$$u_n^t(P) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{s}\sum_{\rho=1}^{t} C_{kl}^{\rho}\chi_{\rho}(x_1)\varphi_{kl}(P) \tag{19}$$

а невідомі коефіцієнти C_{kl}^{ρ} визначаються із системи

$$\begin{gathered} L\left(u_n^t, \chi_{\rho}\varphi_{kl}\right) = \int\limits_{Д} f\chi_{\rho}\varphi_{kl}dP \\ k = 1,2,\dots,n; \quad l = 1,2,\dots,s; \quad \rho = 1,2,\dots,t, \end{gathered} \tag{20}$$

яке зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно C_{kl}^{ρ}.

Позначимо через $H_n^t \subset H_{\sigma}$ простір функцій виду $v_n^t(p) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{s}\sum_{\rho=1}^{t} b_{kl}^{\rho}\chi_{\rho}(x_1)\varphi_{kl}(P)$, де b_{kl}^{ρ} – довільні числа. Тоді на основі системи (20) для довільного елемента $v_n^t(p) \in H_n^t$ маємо

$$L\left(u_n^t, v_n^t\right) = \int\limits_{Д} fv_n^t dP \tag{21}$$

Система (21) має єдиний розв'язок, так як в силу нерівності (12) отримуємо

$$L\left(u_n^t, v_n^t\right) \ge \eta_0 \left|u_n^t\right|_{\sigma}^2, \tag{22}$$

а звідси випливає, що детермінант системи (20) відмінний від нуля.

Покажемо тепер, що послідовність розв'язків $\left\{u_n^t\right\}$ при $t \to \infty$ слабко збігається в просторі H_{σ} до узагальненого розв'язку системи методу Канторовича.

Вставимо спочатку обмеженість послідовності u_n^t в H_{σ}. Використовуючи нерівність (22) і співвідношення (21) при $v_n^t = u_n^t$, отримуємо

$$\left|u_n^t\right|_{\delta}^2 \le \frac{1}{\eta_0} L\left(u_n^t, v_n^t\right) = \frac{1}{\eta_0}\int\limits_{Д} fu_n^t dP \le \frac{1}{\eta_0}\|f\|\left\|u_n^t\right\|.$$

Звідси, враховуючи нерівність (9), маємо

$$\left|u_n^t\right|_{\sigma} \le \frac{1}{\eta_0\gamma}\|f\|.$$

Із останньої нерівності випливає, що послідовність $\left\{u_n^t\right\}$ слабко компактна в $H_n \cap H_{\sigma}$, а враховуючи співвідношення (9) і в $H_n \cap H$.

Із послідовності $\left\{u_n^t\right\}$ можна виділити послідовність $\left\{u_n^{t_\tau}\right\}$, яка при $t_{\tau} \to \infty$ слабко збігається в просторі $H_n \cap H_{\sigma}$. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що вся послідовність $\{u_n^t\}$ слабко збігається в H_σ до u_n. Звідси випливає, що послідовності $\{u_n\}$, $\left\{\frac{\partial u_n^t}{\partial x_i}\right\}$, $i=1,2,\ldots,m$ слабко збігаються в просторі H відповідно до u_n, $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$, $i=1,2,\ldots,m$, крім того, послідовність $\{u_n^t\}$ слабко збігається в просторі сумованих з квадратом функцій по межі Г області Д, тобто

$$\int_\Gamma u_n^t v dS \to \int_\Gamma u_n v dS$$

при $t \to \infty$ для довільної v сумованої з квадратом по межі Г області Д.

Оскільки для довільного елемента $v_n(P)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{s}a_{kl}(x_1)\varphi_{kl}(P)\in H_n\cap H_\sigma$ можна побудувати послідовність $v_n^t(P)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{s}\sum_{\rho=1}^{t}a_{kl}^\rho\chi_\rho(x_1)\varphi_{kl}(p)\in H_n^t\cap H_\sigma$, де a_{kl}^ρ визначається із системи

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{s}\sum_{\rho=1}^{t}a_{kl}^\rho\Big[\chi_\rho(x_1)\varphi_{kl}(P),\chi_\tau(x_1)\varphi_{rl}(P)\Big]_\sigma =$$
$$=\Big[V_n(p),\chi_\tau(x_1)\varphi_{kl}(P)\Big]_\sigma \quad , \tag{23}$$
$$r=1,2,\ldots,n,\quad \tau=1,2,\ldots,t$$

таку, що $\left|v_n-v_n^t\right|_\sigma \to 0,\quad t\to\infty$, то зафіксувавши $v_n\in H_n\cap H_\sigma$ беремо у (21) $v_n^t\in H_n^t$, коефіцієнти a_{kl}^ρ якого визначається із (23).

Тепер у співвідношенні (21) перейдемо до границі при $t\to\infty$. При цьому отримуємо тотожність (18).

Єдиність розв'язку забезпечує виконання умови (12).

Дійсно, нехай $u_n(P)$ і $w_n(P)$ два узагальнені розв'язки системи методу Канторовича. Для них, враховуючи тотожність (18) при $v_n=u_n-w_n$, отримуємо

$$L(u_n,u_n-w_n)=\int_Д f(u_n-w_n)dP$$

$$L(w_n,u_n-w_n)=\int_Д f(u_n-w_n)dP$$

Віднімаючи із першої рівності другу та враховуючи співвідношення (12), маємо

$$0 = L(u_n - w_n, u_n - w_n) \geq \eta_0 |u_n - w_n|_\sigma^2 .$$

Звідси випливає, що $u_n = w_n$. Таким чином, система методу Канторовича має єдиний узагальнений розв'язок $u_n \in H_n \cap H_\sigma$.

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема. При умовах задачі, що забезпечують виконання умови (12), для довільної функції $f(P) \in H$ задача (1)-(2) має єдиний узагальнений розв'язок $u(P) \in H_\sigma$; при довільному n ситема методу Канторовича (16)-(17) має єдиний узагальнений розв'язок $u_n(P) \in H_n \cap H_\sigma$.

Література.

1. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимаций в гильбертовом пространстве М. 1974. 2. Власова З. А. О методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 53, 1959.

M.V. Zhuk

The appliance of Kontorovich's method for systems of differential equations in case of mixed boundary conditions

Kantorovich's method is applied to solution for systems of differential equations in case of mixed boundary conditions. The existanse of unique solution is proved.

Стаття надійшла до редколегії 2.12.1998

УДК 519.6:517.925

Ю. С. Козаревська, Г.А. Шинкаренко, О.Г. Шинкаренко

Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: локалізовані найменші квадрати

1. Постановка задачі. Для спрощення наступного викладу далі обмежимося розглядом наступної крайової задачі мігрування пасивної субстанції у нестисливому середовищі