

Віднімаючи із першої рівності другу та враховуючи співвідношення (12), маємо

$$0 = L(u_n - w_n, u_n - w_n) \geq \eta_0 |u_n - w_n|_\sigma^2.$$

Звідси випливає, що $u_n = w_n$. Таким чином, система методу Канторовича має єдиний узагальнений розв'язок $u_n \in H_n \cap H_\sigma$.

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема. При умовах задачі, що забезпечують виконання умови (12), для довільної функції $f(P) \in H$ задача (1)-(2) має єдиний узагальнений розв'язок $u(P) \in H_\sigma$; при довільному n система методу Канторовича (16)-(17) має єдиний узагальнений розв'язок $u_n(P) \in H_n \cap H_\sigma$.

Література.

1. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимаций в гильбертовом пространстве М. 1974. 2. Власова З. А. О методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 53, 1959.

M.V. Zhuk

The appliance of Kantorovich's method for systems of differential equations in case of mixed boundary conditions

Kantorovich's method is applied to solution for systems of differential equations in case of mixed boundary conditions. The existanse of unique solution is proved.

Стаття надійшла до редколегії 2.12.1998

УДК 519.6:517.925

Ю. С. Козаревська, Г.А. Шинкаренко, О.Г. Шинкаренко

Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: локалізовані найменші квадрати

1. Постановка задачі. Для спрощення наступного викладу далі обмежимося розглядом наступної крайової задачі мігрування пасивної субстанції у нестисливому середовищі

© Ю. С. Козаревська, Г.А. Шинкаренко, О.Г. Шинкаренко 1998.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано вектор } \mathbf{w} = \{w_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^n, \quad \mu = \text{const} > 0, \\ \sigma = \text{const} \geq 0, \quad f = f(\mathbf{x}); \\ \text{знайти розподіл концентрації субстанції } u = u(\mathbf{x}) \\ \text{такий, що} \\ Lu := \mathbf{w} \cdot \nabla u - \mu \Delta u + \sigma u = f \quad \text{в } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{на } \Gamma. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Тут Ω – обмежена зв'язна область точок $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^n$ евклідового простору R^n з неперервною за Ліпшицем межею Γ ; $\mathbf{w} = \{w_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^n$ –вектор швидкості руху точок нестисливого середовища,

$$\nabla \cdot \mathbf{w} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} w_i = 0 \quad \text{в } \Omega; \quad (1.2)$$

$f = f(\mathbf{x})$ –інтенсивність джерел субстанції, розподілених в Ω ; σ та μ –коефіцієнти біохімічного розпаду та дифузії відповідно. Нижче ми будемо припускати справедливості таких включень

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in H^{-1}(\Omega), \\ \mathbf{w} \in W := \left\{ \mathbf{z} \in H(\text{div}; \Omega) \cap L^\infty(\Omega)^n \mid \nabla \cdot \mathbf{z} = 0 \quad \text{в } \Omega \right\}. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Ввівши простір допустимих функцій

$$V := H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \quad \text{на } \Gamma \right\} \quad (1.4)$$

сформулюємо відповідну до (1.1) варіаційну задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \mathbf{w} \in W, \quad f \in H^{-1}(\Omega), \\ \mu = \text{const} > 0, \quad \sigma = \text{const} \geq 0; \\ \text{знайти } u \in V \text{ такий, що} \\ c(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V, \end{array} \right. \quad (1.5)$$

де $(\cdot, \cdot)$ –скалярний добуток з простору $H := L^2(\Omega)$;

$$\left\{ \begin{array}{l} c(u, v) := (Lu, v) = b(\mathbf{w}; u, v) + a(u, v) \\ b(\mathbf{w}; u, v) := (\mathbf{w} \cdot \nabla u, v) = -(\mathbf{w} \cdot \nabla v, u) \\ a(u, v) := \mu(\nabla u, \nabla v) + \sigma(u, v). \end{array} \quad \forall u, v \in V \right. \quad (1.6)$$

2. Аналіз апроксимацій Гальоркіна. Нехай $T_h := \{K\}$ – деяка декомпозиція області Ω на скінченні елементи K і $h_K := \text{diam } K$, $h := \max_{K \in T_h} h_K$. Будемо припускати, що при $h \rightarrow 0$ триангуляції $\{T_h\}$ по-

роджують послідовність просторів апроксимацій $\{V_h\} \subset V$, які вживаються для відшукування наближених розв'язків $\{u_h\}$ задачі (1.5) за схемою Гальоркіна:

$$\begin{cases} \text{задано } h = \text{const} > 0; \\ \text{знайти } u_h \in V_h \text{ такий, що} \\ c(u_h, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h. \end{cases} \quad (2.1)$$

Отже схема Гальоркіна здійснює декомпозицію розв'язку $u \in V$ задачі (1.5) вигляду

$$u = u_h + \varepsilon_h \quad (2.2)$$

з наступним нехтуванням похибки апроксимації

$$\varepsilon_h = u - u_h \in E = V \setminus V_h. \quad (2.3)$$

Легко бачити, що остання задовольняє рівняння

$$c(\varepsilon_h, v) = 0 \quad \forall v \in V_h \quad \forall h > 0. \quad (2.4)$$

Із врахуванням цього факту та декомпозиції (2.2) варіаційну задачу (1.5) можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} \text{знайти пару } \{u_h, \varepsilon_h\} \in V_h \times E \text{ таку, що} \\ c(u_h, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h \\ c(u_h, e) + c(\varepsilon_h, e) = (f, e) \quad \forall e \in E. \end{cases} \quad (2.5)$$

Наведена нами декомпозиція (2.5) задачі (1.5) показує, що схема Гальоркіна систематично ігнорує наявність другого рівняння системи (2.5). Разом з цим згадане рівняння заслуговує на увагу якщо не для відшукування похибки апроксимації Гальоркіна, то щонайменше для визначення її характеристик та відповідних оцінок.

Дійсно, якщо апроксимація Гальоркіна $u_h \in V_h$ знайдена з першого із рівнянь (2.5), то задача

$$\begin{cases} \text{знайти похибку } \varepsilon_h \in E \text{ таку, що} \\ c(\varepsilon_h, e) = (f, e) - c(u_h, e) \quad \forall e \in E \end{cases} \quad (2.6)$$

володіє такими самими якісними характеристиками, що й вихідна варіаційна задача (1.5). Наступна теорема цілком повно характеризує вплив коефіцієнтів конвективного перенесення і дифузії та вибраних просторів апроксимацій на значення похибки. Більш точно, має місце

Теорема 2.1 про оцінки похибки схеми Гальоркіна.

Нехай $u \in V$ – розв'язок варіаційної задачі мігрування (1.5) і $u_h \in V_h$ – його апроксимація Гальоркіна, яка визначається задачею (2.1). Наділимо простір V нормою

$$|v|_V \equiv |\nabla v|_{0,\Omega} := \left\{ \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right\}^{1/2} \quad \forall v \in V.$$

Тоді мають місце наступні оцінки похибки схеми Гальоркіна.

$$(i) \quad |u - u_h|_V \leq \inf_{v \in V_h} |u - v|_V + \frac{\|w\|_{\infty} + \sigma \operatorname{diam} \Omega}{\mu} \inf_{v \in V_h} |u - v|_{0,\Omega} \quad \forall h > 0; \quad (2.7)$$

$$(ii) \quad |u - u_h|_V \leq \frac{\operatorname{diam} \Omega}{\mu} |Lu_h - f|_{0,\Omega} \quad \forall h > 0, \quad (2.8)$$

$$|u - u_h|_{0,\Omega} \leq \frac{\operatorname{diam}^2 \Omega}{\mu + \sigma \operatorname{diam}^2 \Omega} |Lu_h - f|_{0,\Omega} \quad \forall h > 0. \quad (2.9)$$

Доведення.

(i) З огляду на рівняння (2.4) дістаємо, що

$$c(\varepsilon_h, \varepsilon_h) = c(\varepsilon_h, u - v) \quad \forall v \in V_h. \quad (2.10)$$

Звідси безпосередні оцінки на основі нерівності Буняковського-Шварца та означень (1.6) приводять до нерівності

$$\begin{aligned} \sigma |\varepsilon_h|_{0,\Omega}^2 + \mu |\varepsilon_h|_V^2 &\leq c(\varepsilon_h, \varepsilon_h) = c(\varepsilon_h, u - v) \leq \\ &\leq \|w\|_{\infty} |\varepsilon_h|_V |u - v|_{0,\Omega} + \mu |\varepsilon_h|_V |u - v|_V + \\ &+ \sigma |\varepsilon_h|_{0,\Omega} |u - v|_{0,\Omega} \quad \forall v \in V_h. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Врахування нерівності Пуанкаре-Фрідрікса

$$|v|_{0,\Omega} \leq \operatorname{diam} \Omega |v|_V \quad \forall v \in V \quad (2.12)$$

дозволяє привести оцінку (2.11) до вигляду (2.7).

(ii) Зауважимо, що визначення (1.6) дозволяють переписати рівняння (2.6) для відшукування похибки схеми Гальоркіна у вигляді

$$c(\varepsilon_h, e) = -(Lu_h - f, e) \quad \forall e \in E. \quad (2.13)$$

Прирівнявши в ньому $e := \varepsilon_h$, знаходимо, що

$$\sigma |\varepsilon_h|_{0,\Omega}^2 + \mu |\varepsilon_h|_V^2 \leq |Lu_h - f|_{0,\Omega} |\varepsilon_h|_{0,\Omega}.$$

Застосовуючи тепер до другого доданку в лівій частині нерівність Пуанкаре-Фрідрікса (2.12), приходимо до оцінок (2.9) та (2.8). $\square$

Наслідок 2.1 про оцінки швидкості збіжності апроксимацій Гальоркіна.

Нехай послідовність просторів апроксимацій $V_h \subset V$ володіє наступною властивістю повноти

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{для довільного } v \in V \cap H^p(\Omega), \quad p \geq 1, \\ \text{знайдеться } v_h \in V_h \text{ такий, що} \\ \|v - v_h\|_{m,\Omega} \leq Ch^{p+1-m} |v|_{p+1,\Omega}, \quad 0 \leq m \leq p, \\ \text{де } C = \text{const} > 0 \text{ не залежить від величин,} \\ \text{що нас цікавлять.} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Тоді послідовність апроксимацій Гальоркіна $u_h \in V_h$ збігається відносно норми $|\cdot|_V$ до розв'язку задачі (1.5) і при цьому має місце така оцінка швидкості збіжності

$$|u - u_h|_V \leq Ch^p \left\{ 1 + \left[\frac{\|w\|_\infty h}{\mu} + \frac{\sigma h \operatorname{diam} \Omega}{\mu} \right] \right\} |u|_{p+1,\Omega}. \quad (2.15)$$

Доведення цього факту ґрунтується на безпосередньому використанні (2.14) до оцінки (2.7) $\square$

Безрозмірне число (відоме під назвою сіткового числа Пекле), яке виникає в правій частині нерівності (2.15),

$$Pe_h := \frac{\|w\|_\infty h}{\mu} \quad (2.16)$$

виступає зручним критерієм оцінки співвідношення механізмів конвективного перенесення і дифузії субстанції в процесі мігрування.

Як показує (2.15), при $Pe_h \rightarrow \infty$ (значному переважанні конвекції над дифузією) можна очікувати нестачу точності апроксимацій Гальоркіна навіть при достатньо малих значеннях h ; в дійсності нефізична поведінка апроксимацій Гальоркіна стає незначною лише при

$$Pe_h \leq 1, \quad (2.17)$$

що може виконуватись на дуже густих сітках скінченних елементів, див. напр. [2].

Поряд з цим оцінки похибок (2.8) та (2.9) явно не залежать від числа Пекле і засвідчують, що їх норми пропорційні нормі нев'язки

$$\rho_h := Lu_h - f \in H^{-1}(\Omega). \quad (2.18)$$

Таким чином, здійснений тут аналіз схеми Гальоркіна показує, що рівень її похибки можна зменшити вибором просторів апроксимацій V_h , здатних мінімізувати нев'язку ρ_h рівняння задачі міграції (1.1) її апроксимацією u_h .

3. Регуляризація схеми Гальоркіна: локалізовані найменші квадрати. З огляду на одержані оцінки (2.8) та (2.9) похибки схеми

Гальоркіна, нижче пропонується чисельна схема, яка підміняє варіаційну задачу (2.1) збуреною задачею:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } T_h = \{K\} \text{ та послідовність параметрів} \\ \tau = \{\tau_K\} \subset R; \\ \text{знайти } u_{ht} \in V_h \text{ такий, що} \\ c(u_{ht}, v) + s(\tau; u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h, \\ \text{де} \\ s(\tau; u, v) := \sum_{K \in T_h} \tau_K (Lu - f, Lv)_K \quad \forall u, v \in V_h, \forall \tau_K \geq 0. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Тут і далі використовується позначення $(u, v)_K := \int_K uv dx$.

Збурюючий доданок $s(\tau; u, v)$ утворює лінійну комбінацію варіаційних рівнянь методу найменших квадратів для мінімізації нев'язок

$$\rho_{ht} := Lu_{ht} - f \quad (3.2)$$

на кожному скінченному елементі K триангуляції T_h . Відповідно коефіцієнти цієї лінійної комбінації можна розглядати як штрафні множники за невиконання апроксимацією u_{ht} рівняння задачі (1.1) на скінченному елементі K . З іншого боку, вибір коефіцієнтів τ_K повинен здійснюватися в такий спосіб, щоб залишати схемі (3.1) достатньо можливостей для належного відтворення апроксимацією u_{ht} структури розв'язку варіаційної задачі (1.5). Тому, в цілому, схему (3.1) можна розглядати як певну регуляризацию задачі (2.1) для відшукування апроксимації Гальоркіна за допомогою збалансованого штрафування нев'язки (3.2) на елементах триангуляції T_h .

Зауваження 3.1. Метод найменших квадратів випробовувався авторами [2] для певної постпроцесорної обробки апроксимацій Гальоркіна з метою подолання їх нефізичної поведінки за умов домінуючої конвекції. Додаткове для такого підходу розв'язування задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \varepsilon = \text{const} > 0 \text{ та } u_h \in V_h, \text{ знайти } u_\varepsilon \in V_h \text{ такий, що} \\ (u_\varepsilon, v)_\Omega + \varepsilon (u_\varepsilon, \nabla v)_\Omega = (u_h, v)_\Omega \end{array} \right. \quad (3.3)$$

дає можливість за рахунок належного вибору ε дістати наближення $u_\varepsilon \in V_h$ до розв'язку $u \in V$ задачі (1.5), яке звільняється від паразитичних осциляцій апроксимації Гальоркіна $u_h \in V_h$. $\square$

Важливо відзначити, що регуляризована схема Гальоркіна (3.1) містить як часткові випадки добре відомі стабілізуючі схеми для варіа-

ційної задачі (1.5). Так, наприклад, добре відома SUPG-схема Брукса, Х'юза [8] відрізняється від (3.1) лише визначенням збурюючого члена

$$s_h(\tau; u, v) := \sum_K \tau_K (Lu - f, L^*v)_K \quad \forall u, v \in V, \quad (3.4)$$

де L^* – спряжений до L оператор

$$L^* := -w \cdot \nabla u - \mu \Delta u + \sigma u. \quad (3.5)$$

Параметри τ_K вибираються в залежності від h_K . Якщо простір V_h складається з кусково лінійних на T_h функцій, то збурюючі доданки (3.1) і (3.4) співпадають. Це саме зауваження стосується протипотокової схеми Дугласа-Вонга [3,4], беззалишкових бульбашкових функцій [5,7].

Накінець, зауважимо, що регуляризована схема (3.1) допускає природну реалізацію p -версії методу скінченних елементів, що надзвичайно важливо при якісному моделюванні примежевих шарів та інших сингулярностей.

4. Результати чисельних експериментів: крайова задача з примежевим шаром.

Для вивчення можливостей різних схем локалізованих найменших квадратів (ЛНК) були проаналізовані наближені розв'язки наступної одновимірної стаціонарної задачі мігрування домішки [2]

$$\begin{cases} -\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + w \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3wx^2, & w = 10^4, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

точний розв'язок якої має вигляд:

$$\varphi(x) = x^3 + \frac{3x^2}{w} + \frac{6x}{w^2} - \left[1 + \frac{3}{w} + \frac{6}{w^2} \right] \frac{(e^{wx} - 1)}{(e^w - 1)}. \quad (4.2)$$

Наближені розв'язки задачі (4.1) будувались на рівномірних сітках скінченних елементів з використанням:

- кусково лінійних (ЛА) та квадратичних апроксимацій (КА), які вимагали знаходження значень наближеного розв'язку у вузлах сітки;
- кусково кубічних апроксимацій Ерміта (ЕНДА), які вимагали знаходження вузлових значень розв'язку та його перших похідних на кінцях кожного скінченного елемента, гарантуючи при цьому відшукання в цілому неперервно-диференційованого наближення.
- кусково кубічних апроксимацій Ерміта (ЕНА), які вимагали знаходження вузлових значень розв'язку та його перших похідних на кінцях кожного скінченного елемента, гарантуючи при цьому лише неперервність наближеного розв'язку.

Розв'язок задачі (4.1) володіє яскраво вираженим примежевим шаром в околі точки $x=1$, де його похідні першого та другого порядків набувають відповідно значень

$$\frac{d}{dx}\varphi(1) \approx -w, \quad \frac{d^2}{dx^2}\varphi(1) \approx -w^2 - 3w. \quad (4.3)$$

Тому всі апроксимації стандартної схеми МСЕ на рідких сітках (з 10-20 елементів) характеризувались нефізичною поведінкою, фрагменти якої показано на рис. 1-4. Для усунення цих недоліків стандартні схеми МСЕ доповнювались доданками стабілізуючої схеми Дугласа-Вонга або доданками схеми локалізованих найменших квадратів (3.1). При використанні останньої параметр регуляризації τ_K визначався наступним чином:

$$\tau_K := \frac{h_K}{a\|w\|_{\infty,K}} \gamma(Pe_K), \quad (4.4)$$

$$\gamma(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z < 1, \\ 1, & 1 \leq z < +\infty, \end{cases} \quad (4.5)$$

стала a вибиралась за таким критерієм $a:=1.440$ для лінійних апроксимацій; $a:=3.625$ для квадратичних і $a:=4.700$ для кубічних апроксимацій. Нижче на рис. 1-8 наведено порівняння точного розв'язку (4.2) з наближеними розв'язками схем локалізованих найменших квадратів (ЛНК), стабілізації Дугласа-Вонга (Д.-В.) та стандартного методу скінченних елементів (МСЕ) для задачі (4.1), одержаних на рівномірній сітці із 10 скінченних елементів.

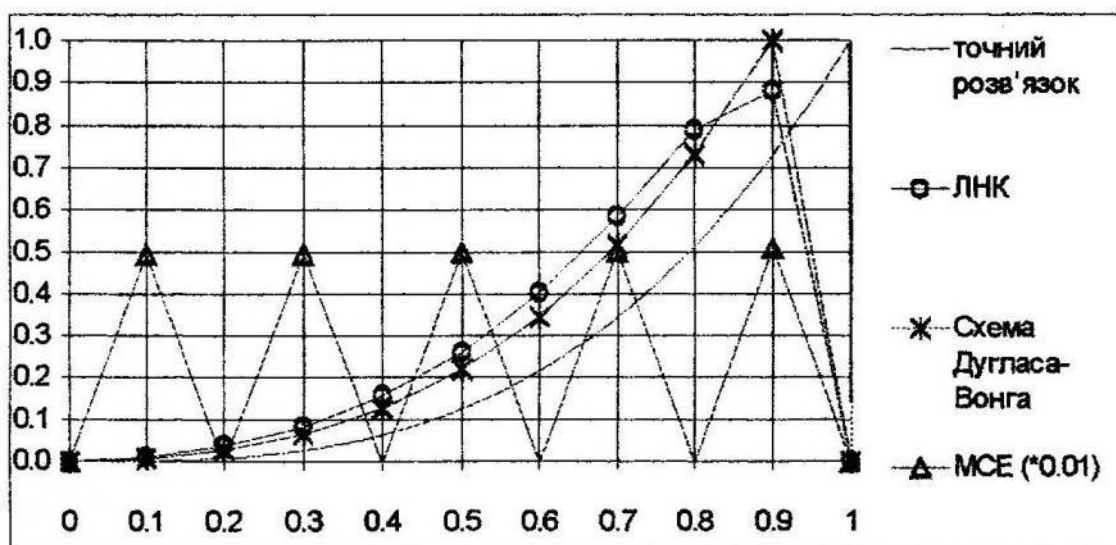


Рис.1. Порівняння схем з лінійними апроксимаціями.

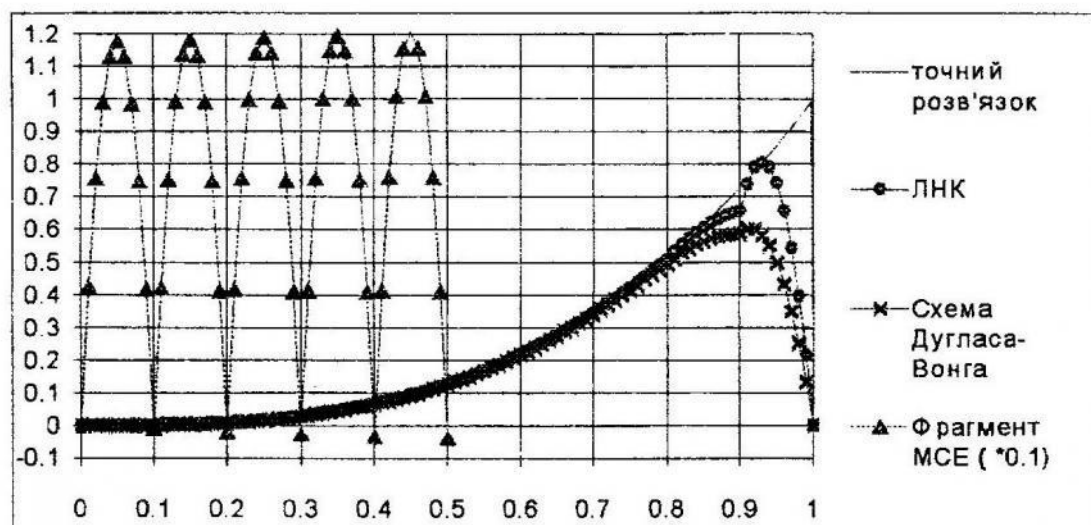


Рис.2. Порівняння схем з квадратичними апроксимаціями.

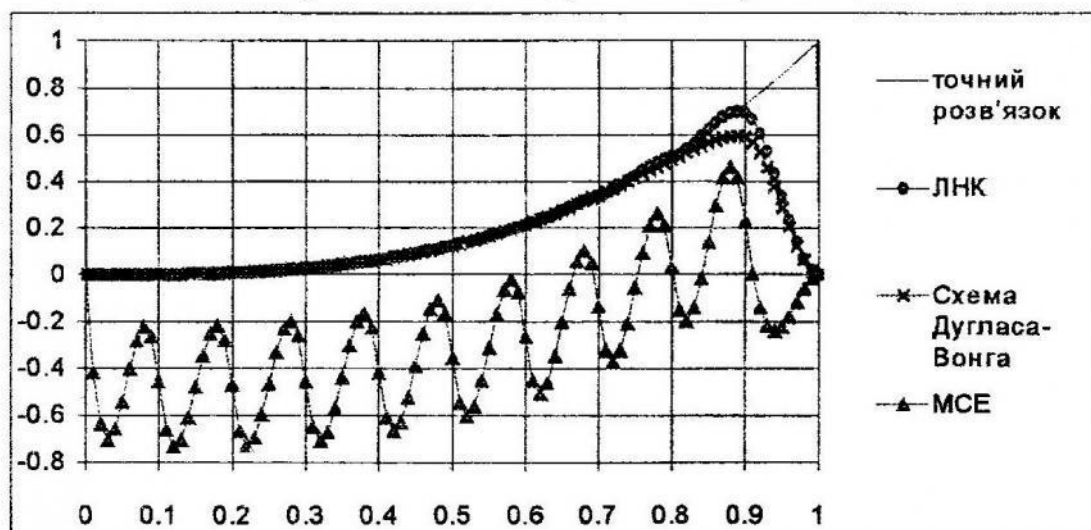


Рис.3. Порівняння схем з ермітовими неперервно-диференційованими апроксимаціями.

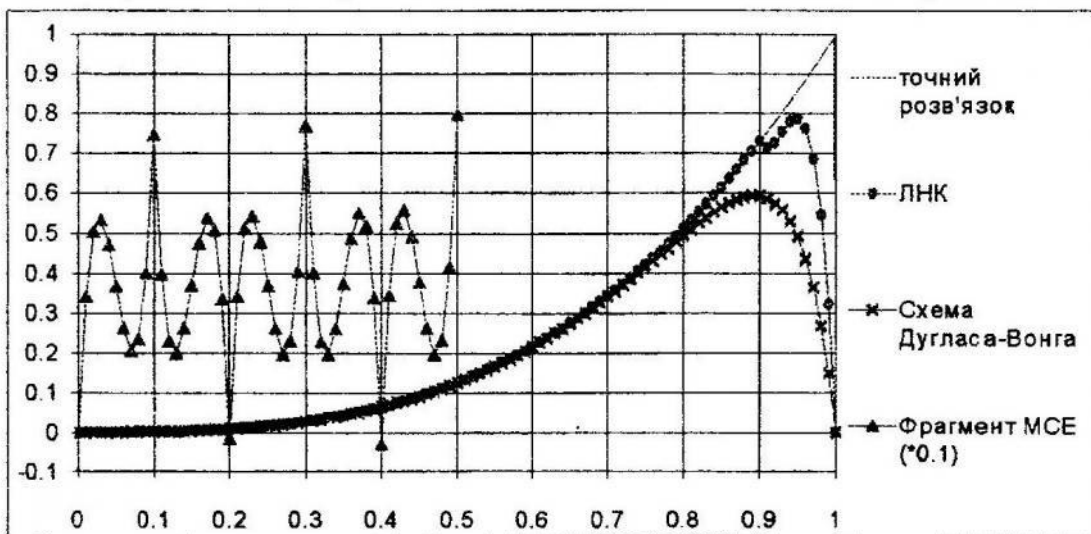


Рис.4. Порівняння схем з ермітовими неперервними апроксимаціями.

Як видно з рис. 1-4, схема локалізованих найменших квадратів дає дещо кращі наближення до точного розв'язку, ніж схема Дугласа-Вонга. Найкраще цей метод працює при застосуванні кусково-кубічних неперервних ермітових апроксимацій.

Наступна таблиця демонструє характер зменшення максимальних похибок розв'язків згаданих схем у вузлах сітки в залежності від кусково-визначених поліноміальних апроксимацій.

Схема	ЛА	КА	ЕНДА	ЕНА
ЛНК	0,152235	0,072486	0,033927	0.000457
Дугласа-Вонга	0,270757	0,143243	0,139189	0,135443

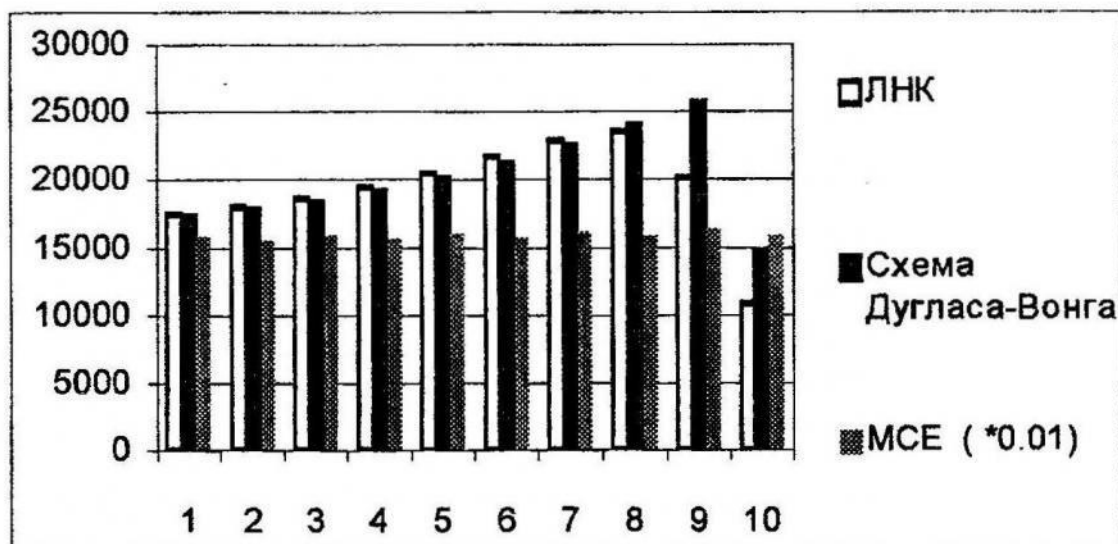


Рис. 5. Розподіл нев'язок схем для лінійних апроксимацій.

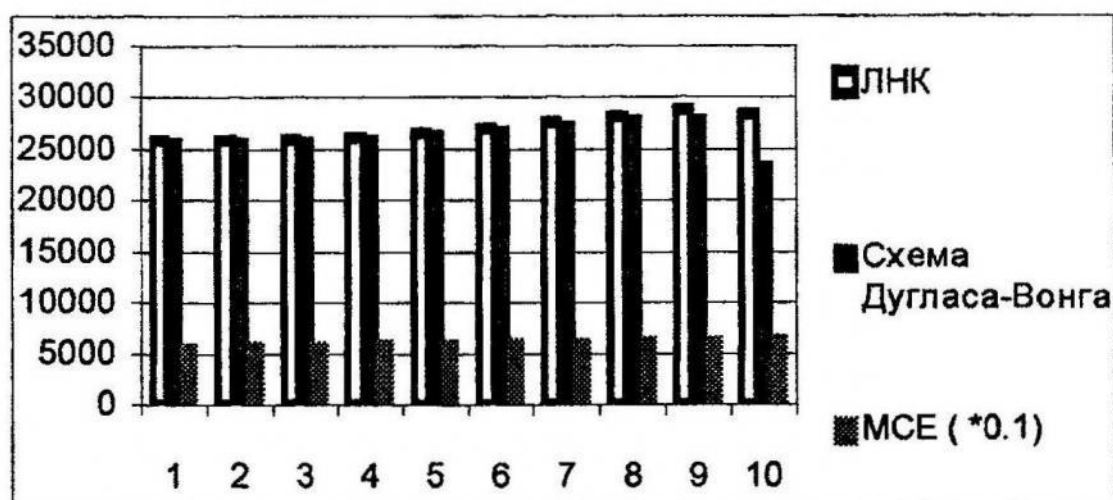


Рис. 6. Розподіл нев'язок схем для квадратичних апроксимацій.

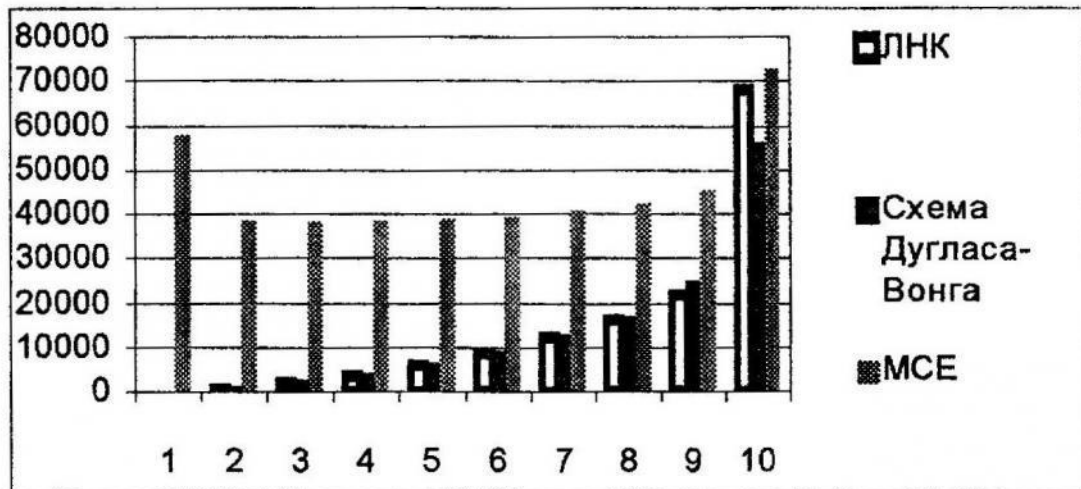


Рис.7. Розподіл нев'язок схем для ермітових неперервно-диференційованих апроксимацій.

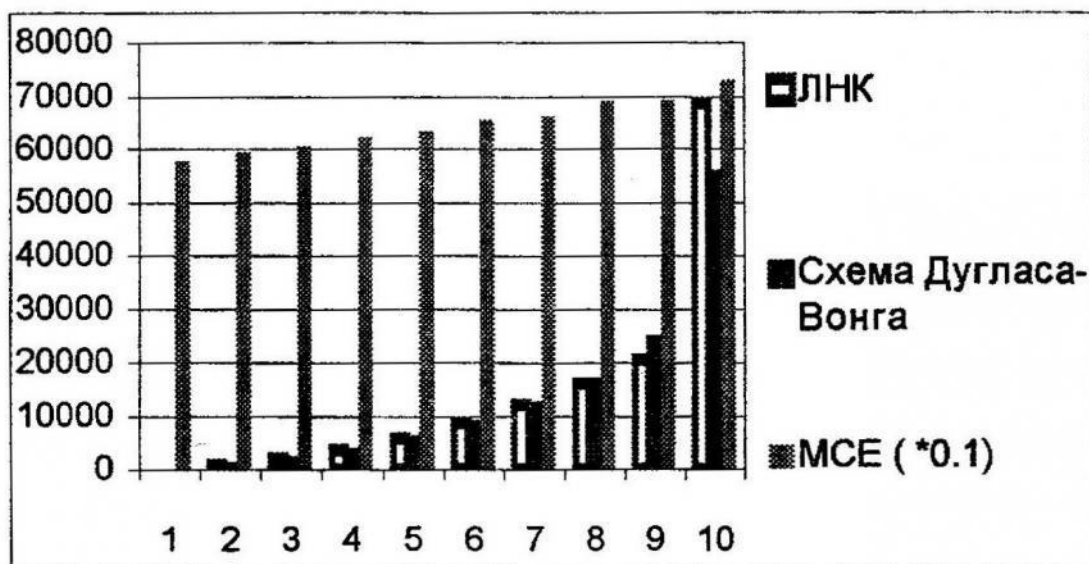


Рис.8. Розподіл нев'язок схем для ермітових неперервних апроксимацій.

На рис.5-8 зображено розподіли значень середньоквадратичної норми нев'язок вихідного рівняння на скінченних елементах сітки, обчислені для наведених вище наближених розв'язків. Добре видно, що підвищення порядку поліноміальної апроксимації на одиницю в стандартній схемі MCE зменшує на порядок значення нев'язок і робить їх величинами одного порядку з нев'язками схем ЛНК та Дугласа-Вонга лише для кубічних апроксимацій. На відміну від стандартної схеми MCE, яка рівномірно розподіляє нев'язки для всіх вжитих апроксимацій, схеми ЛНК та Дугласа-Вонга з кубічними ермітовими апроксимаціями характеризуються майже однаковим розподілом нев'язок, здатним ідентифікувати скінченні елементи примежевого шару.

Висновки та заключні зауваження. В цій праці показано, що практично вживані норми похибок апроксимації Гальоркіна варіаційної задачі (1.5) пропорційні середньоквадратичній нормі нев'язки вихідного рівняння міграції. При цьому побудовані оцінки (2.7)-(2.9) цілком повно відображають вплив коефіцієнтів рівняння на рівень можливих похибок.

З огляду на цей факт тут запропоновано регуляризовану схему Гальоркіна (3.1) з використанням апроксимацій МСЕ та збалансованого штрафування нев'язки на скінченних елементах розрахункової сітки. Відзначимо, що рівняння схеми (3.1), названої нами схемою локалізованих найменших квадратів (ЛНК), можна подати у вигляді

$$\sum_{K \in T_h} (Lu_{h\tau} - f, v + \tau_K Lv) = 0 \quad \forall v \in V_h. \quad (5.1)$$

Запис рівняння схеми (3.1) у вигляді (5.1) показує, що вона належить до класу проєкційних схем Петрова-Гальоркіна.

Наведені нами числові результати свідчать, що схема ЛНК здатна конкурувати з відомими протипотоковими і стабілізованими схемами МСЕ і допускає природну реалізацію його p -версій.

Література

1. Зубов В.М., Терлецька С.Ю., Шинкаренко Г.А. Розв'язуваність та апроксимація узагальнених розв'язків початково-крайових задач міграції атмосферних домішок // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип. 41. с.62-70.
2. Козаревська Ю.С., Шинкаренко Г.А., Шинкаренко О.Г. Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: метод найменших квадратів // Волинський математичний вісник. 1997. Вип. 4 с. 67-70.
3. Козаревська Ю.С., Шинкаренко Г.А. Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: стабілізуюча схема Дугласа-Ванга // Волинський математичний вісник. 1998. Вип. 5 с. 66-70.
4. Козаревська Ю.С., Шинкаренко Г.А. Чисельне розв'язування задач міграції домішок з великими числами Пекле. // Сучасні проблеми математики: Матеріали міжнародної наук. конф. - Київ: Ін-т матем. НАН України. 1998. Ч. 1. с. 269-271.
5. Савула Я.Г., Шинкаренко О.Г. Стабілізація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: протипотокова схема // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1997. Вип. 46. с.3-9.
6. Baiocchi F., Marini D., Russo A. Virtual Bubbles and Galerkin-Least-Squares Type Methods (Ga.L.S.) // Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 1993 v. 105. p. 125-141.
7. Brezzi F., Marini D., Russo A. Pseudo-Residual-Free Bubbles and Stabilized Methods // Comput. Methods in Applied Sciences '96. Wiley. 1996. P. 3-8.
8. Brooks A.N., Hughes T.J.R. Streamline Upwind Petrov/Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations // Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 1982, vol. 32. No. 1-3. p. 199-259.
9. Vijayaraghavan K., Surana K.S. P-Version Least-Squares Finite

Element Formulation of a System of Convection-Reaction Nonlinear Equations – Fixed Bed O-xylene Oxidation //Comput.&Struct. 1997. vol. 62. No.3. p. 539-554.

Y.S. Kozarevska, G.A. Shynkarenko, O.G. Shynkarenko

Regularization of numerical solutions of variational problems of solute migration: localized least squares

Present paper introduces a regularized Galerkin scheme for the solution of variational problems of solute transport in the incompressible medium. The scheme brings in a sum of additional terms to the initial variational equation, each of them denotes balanced penalizing of corresponding residual norm of the migration equation on each finite element of triangulation. The results of numerical treatment of boundary layer problem show that Localized Least Squares Approach eliminates non-physical behavior of the various order finite element solutions and is able to compete successfully with Stabilizing Douglas-Wang Approach.

Стаття надійшла до редколегії 1.12.1998

УДК 519.6 : 517.925

О. М. Козяк, Г. А. Шинкаренко, О. Г. Шинкаренко

Чисельне розв'язування узагальнених задач оптимального розміщення джерела пасивної субстанції

1. Основні припущення та позначення.

Нехай в деякій області Ω_0 точок $x = \{x_i\}_{i=1}^n$ евклідового простору R^n з неперервною за Ліпшицем межею Γ розташовано M діючих точкових джерел пасивної домішки, інтенсивність яких визначається функцією

$$f = f(x) := \sum_{j=1}^M Q_j \delta(x^j; x),$$

де Q_j – інтенсивність джерела, розміщеного в точці $x^j \in \Omega_0$;

$\delta(x^j; x) := \begin{cases} 1, & x = x^j \\ 0, & x \neq x^j \end{cases}$ – функція Дірака. Нехай область Ω_0 містить N

підобластей $\Omega_k \subset \Omega_0$, $k = 1, 2, \dots, N$, які надалі називатимемо екологічно