

Element Formulation of a System of Convection-Reaction Nonlinear Equations – Fixed Bed O-xylene Oxidation //Comput.&Struct. 1997. vol. 62. No.3. p. 539-554.

Y.S. Kozarevska, G.A. Shynkarenko, O.G. Shynkarenko

Regularization of numerical solutions of variational problems of solute migration: localized least squares

Present paper introduces a regularized Galerkin scheme for the solution of variational problems of solute transport in the incompressible medium. The scheme brings in a sum of additional terms to the initial variational equation, each of them denotes balanced penalizing of corresponding residual norm of the migration equation on each finite element of triangulation. The results of numerical treatment of boundary layer problem show that Localized Least Squares Approach eliminates non-physical behavior of the various order finite element solutions and is able to compete successfully with Stabilizing Douglas-Wang Approach.

Стаття надійшла до редколегії 1.12.1998

УДК 519.6 : 517.925

О. М. Козяк, Г. А. Шинкаренко, О. Г. Шинкаренко

Чисельне розв'язування узагальнених задач оптимального розміщення джерела пасивної субстанції

1. Основні припущення та позначення.

Нехай в деякій області Ω_0 точок $x = \{x_i\}_{i=1}^n$ евклідового простору R^n з неперервною за Ліпшицем межею Γ розташовано M діючих точкових джерел пасивної домішки, інтенсивність яких визначається функцією

$$f = f(x) := \sum_{j=1}^M Q_j \delta(x^j; x),$$

де Q_j – інтенсивність джерела, розміщеного в точці $x^j \in \Omega_0$;

$\delta(x^j; x) := \begin{cases} 1, & x = x^j \\ 0, & x \neq x^j \end{cases}$ – функція Дірака. Нехай область Ω_0 містить N підобластей $\Omega_k \subset \Omega_0$, $k = 1, 2, \dots, N$, які надалі називатимемо екологічно

важливими зонами. Для підтримання життєдіяльності зон Ω_k , $k = 0, 1, \dots, N$, повинні виконуватись умови

$$J_{\Omega_k} = J_{\Omega_k}(f) = \int_{\Omega_k} g(f) dx \leq C_k, \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

де $C_k = \text{const} > 0$ – гранично допустиме екологічне навантаження на зону Ω_k , густина якого визначається деякою функцією $g(f)$.

2. Постановка узагальненої задачі оптимального розміщення джерела пасивної субстанції.

Сформулюємо тепер узагальнену задачу оптимального розміщення нового джерела домішки в області Ω_0 , яка враховує і специфічні умови для кожної екологічно важливої зони, і небезпеку забруднення області Ω_0 в цілому:

виділити область $D \subset \Omega_0$ точок $x^0 = \{x_i^0\}_{i=1}^n$ можливого розміщення нового джерела пасивної домішки із заданою інтенсивністю $f_0(x) = Q_0 \delta(x^j; x)$ таку, щоб

$$J_{\Omega_k}(f + f_0) = \int_{\Omega_k} g(f + f_0) dx \leq C_k \quad \forall x^0 \in D, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (1)$$

і розподіл концентрації домішки $u = u(x)$ визначався крайовою задачею

$$\begin{cases} \operatorname{div} q + \sigma u = f(x) + f(x^0), \\ q_i - u w_i + \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \quad \text{в } \Omega_0, \\ u = 0 \quad \text{на } \Gamma_u, \quad \text{mes}(\Gamma_u) > 0, \\ \sum_{i=1}^n (q_i - u w_i) v_i = \alpha(u - u_c) \quad \text{на } \Gamma_q, \quad \Gamma_q = \Gamma \setminus \Gamma_u. \end{cases} \quad (2)$$

Тут $\mu = \{\mu_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ – матриця заданих коефіцієнтів дифузії з властивостями симетрії та додатньої визначеності; $w = \{w_i(x)\}_{i=1}^n$ – вектор швидкості перенесення домішки, що задовольняє умову нестисливості

$\sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0$ в Ω_0 ; $\sigma = \sigma(x) \geq 0$ – коефіцієнт біохімічного розпаду суб-

станції; $v = \{v_i\}_{i=1}^n$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ ;

$\alpha = \alpha(x) \geq 0$ – коефіцієнт взаємодії з контактуючим середовищем;
 $u_c = u_c(x)$ – інтенсивність джерел субстанції, розподілених на межі Γ_q .

3. Алгоритм розв'язування задачі оптимального розміщення.

Для оптимального розміщення нового джерела домішки потужністю Q_0 в області Ω_0 знайдемо залежність рівня забрудненості екологічно важливих зон Ω_k та області Ω_0 від його координати [1, 2, 3]. В даному випадку під екологічним навантаженням на деяку область будемо розуміти інтегральну кількість субстанції, що знаходиться в ній:

$$J_{\Omega_k} = \int_{\Omega_k} p_k u dx, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (3)$$

де $p_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_k \\ 0, & x \notin \Omega_k \end{cases}$. Екологічне навантаження (3) може бути виражене також через $\psi_k(x)$ – розв'язок задачі, спряженої до (2), з правою частиною $p_k(x)$ [1, 2, 3]:

$$J_{\Omega_k} = \int_{\Omega_k} (f + f_0) \psi_k dx + \int_{\Gamma_q} \alpha u_c \psi_k d\gamma, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (4)$$

Такий спосіб обчислення функціоналу J_{Ω_k} дозволяє уникнути багаторазового розв'язування задачі (2) з різними правими частинами. Для знаходження значень J_{Ω_k} у різних точках області Ω_0 достатньо один раз обчислити розв'язок спряженої задачі $\psi_k(x)$.

Зауважимо, що для розв'язування варіаційних прямої та спряженої до неї задач можуть бути використані одні й ті самі проекційно-сіткові схеми [2].

4. Чисельний приклад.

Нехай процес двовимірної стаціонарної міграції домішок описується рівняннями (2) в області $\Omega_0 = (0,30) \times (0,30)$, що містить екологічно важливі зони $\Omega_1 = (15,30) \times (0,10)$ та $\Omega_2 = (20,30) \times (25,30)$ (рис. 1). Покладемо $w = (2,0)^T$, $\mu_{ij} = \text{const} = \mu = 10^{-6}$, $\sigma = 0$, $\Gamma_u \equiv \Gamma$, $C_1 = 0.5$, $C_2 = 0.2$, $C_0 = 2.5$, $Q_0 = 0.05$, $M = 3$, $x^1 = (10,5)$, $Q_1 = 0.04$, $x^2 = (5,25)$, $Q_2 = 0.04$, $x^3 = (25,15)$, $Q_3 = 0.4$.

Розподіл концентрації домішки в області Ω_0 до розміщення в ній нового джерела домішки зображено на рис. 3.

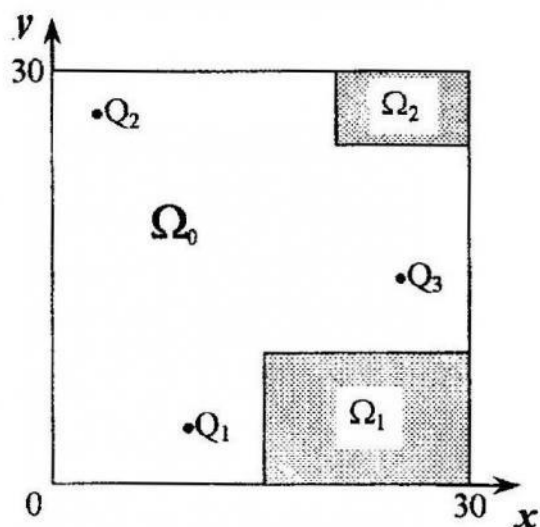


Рис. 1

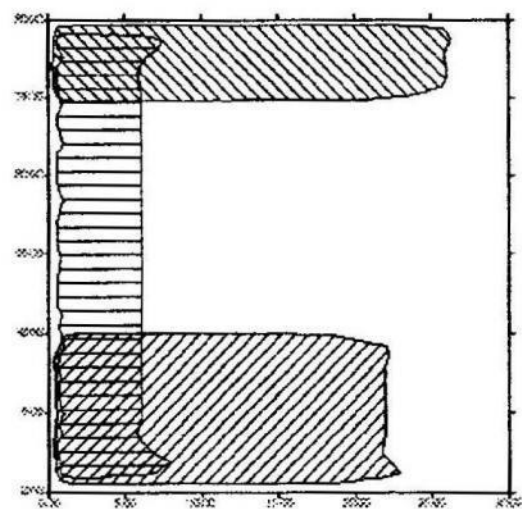


Рис. 2

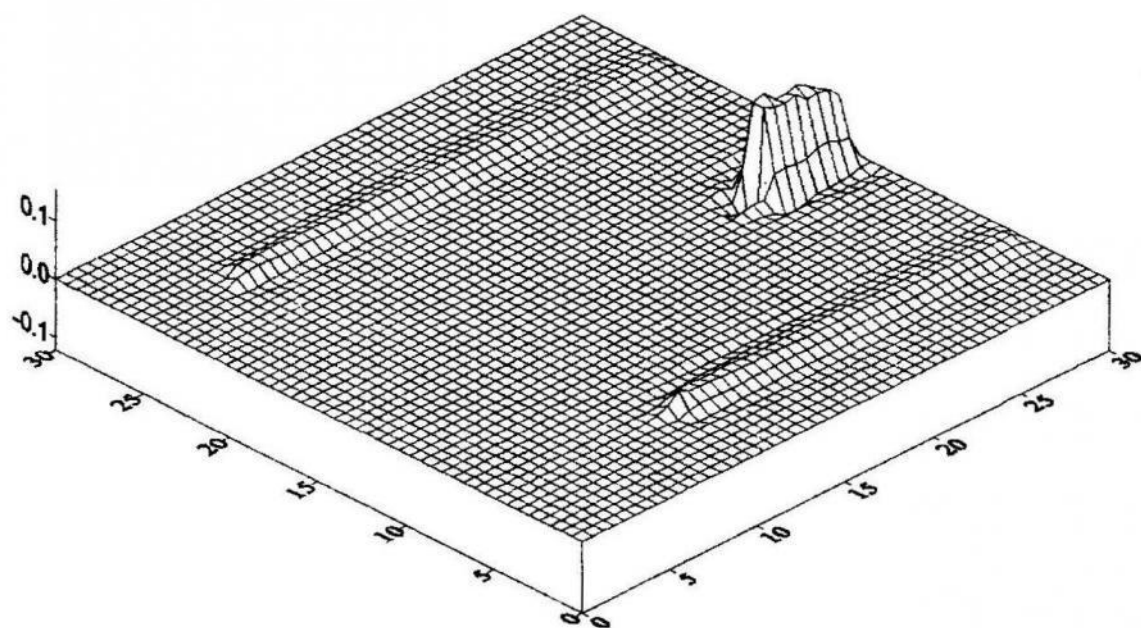


Рис. 3

Навантаження на зони Ω_1 , Ω_2 та Ω_0 являють собою функції від координати нового джерела і виражаються через розв'язки відповідних спряжених задач:

$$J_{\Omega_k}(x) = Q_0 \psi_k(x) + \sum_{i=1}^3 Q_i \psi_k(x^i), \quad k = 0, 1, 2.$$

Проекції перетинів графіків функцій навантажень J_{Ω_k} , $k = 0, 1, 2$, з відповідними площинами рівня $z = C_k$ на площину

Оху зображені на рис. 2 як заштриховані області. Розміщення нового джерела домішки інтенсивністю Q_0 в таких областях призведе до того, що екологічні навантаження на деякі зони перевищать гранично допустимі. Точки, які не належать заштрихованим областям, є точками шуканої області D .

Всі чисельні розв'язки отримані з використанням звичайних кусково-лінійних апроксимацій МСЕ, доповненого схемою Дугласа-Ванга [4], на рівномірних сітках і добре узгоджуються з розв'язками, отриманими за допомогою протипотокової схеми МСЕ з використанням функцій-бульбашок [5].

Література.

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
2. Козаревська Ю.С., Кузик О.М., Шинкаренко Г.А. Чисельне дослідження процесів мігрування та оптимальне розміщення джерел пасивних домішок у нестисливому середовищі. // Львів. ун-т. - Львів, 1998. - 28с. - Деп. в ДНТБ України 13.04.98 №187 Ук98.
3. Кузик О.М., Шинкаренко Г.А. Оптимальне розміщення джерел пасивної субстанції, мігруючої у нестисливому середовищі. // Вісн. держ. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. - № 337. - Т. 2, (1998) - С. 224 - 227.
4. Ali Khelifa, et. al. A Douglas-Wang finite element approach for transient advection-diffusion problems // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1993. vol. 110 p. 113-129.
5. Савула Я.Г., Шинкаренко О.Г. Стабілізація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: протипотокова схема // Вісн. Львів. у-ту сер. мех.-мат. вип. 46, (1997) с. 3 - 9.

O. M. Kozyak, G. A. Shynkarenko, O. G. Shynkarenko

Numerical solution of generalized problem of optimal location of source of passive substance

Present paper is dedicated to forecast of consequences of location of additional point-wise source of passive substance in a certain region with active sources and defined tolerated loads on ecologically important zones. A scheme of solution of generalized problem of optimal location of such source, which employs solution of conjugate boundary problems, is considered. A numerical example obtained with Douglas-Wang upwind scheme is presented.

Стаття надійшла до редколегії 30.11.1998