УДК 536.12

А.В.Костенко, Х.О.Засадна

Достатні умови оптимального за швидкодією керування нагріванням термочутливих тіл

В даній роботі узагальнено результати досліджень, отримані В.М.Вігаком, А.В.Костенком і М.Б.Вітером [1,2,4,5]. Ними були сформульовані і доведені достатні умови оптимальності за швидкодією керування нестаціонарними температурними режимами в неоднорідних тілах. Нижче цей результат узагальнено на випадок неоднорідних термочутливих тіл і сформульовані умови, достатні для мінімізації часу їх нагрівання.

Розглянемо термочутливе пружне тіло, яке займає зв'язну область D з границею Γ тривимірного евклідового простору R^3. Температурне поле тіла задовольняє крайову задачу теплопровідності [6,7]

$$\mathbf{L}T(\mathbf{x},\tau)+u_1(\mathbf{x},\tau)=0, \qquad (\mathbf{x},\tau)\in G_\theta = D\times(\tau_0,\theta]; \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = g(\mathbf{x},\tau,T,u_2), \qquad (\mathbf{x},\tau)\in S_\theta = \Gamma\times(\tau_0,\theta]; \tag{2}$$

$$T(\mathbf{x},\tau_0)=f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\overline{D}=D\cup\Gamma. \tag{3}$$

Тут $L=\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(\mathbf{x},\tau,T)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}+b(\mathbf{x},\tau,T,T_x)-\frac{\partial}{\partial\tau}$ – параболічний оператор; $\mathbf{n}=(n^1,n^2,n^3)$ – внутрішня нормаль до граничної поверхні Γ тіла; $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ – точка області $\overline{D}$; τ – час; $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}$ – внутрішня конормальна похідна.

У випадку відсутності об'ємних сил напружено–деформований стан в розглядуваному тілі описується системою рівнянь квазістатичної незв'язаної задачі термопружності [2,3].

Процес керування температурним режимом тіла відбувається за допомогою внутрішніх $u_1(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{x}\in D$ і зовнішніх $u_2(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{x}\in\Gamma$ джерел тепла.

Необхідно визначити такі функції керування u_i $(i=1,2)$, які при обмеженнях на параметри температурного поля чи термонапруженого стану дозволять за найкоротший час

$$\tau_* = min\,\tau \tag{4}$$

нагріти тіло від початкової температури (3) до кінцевої, яка визначається рівністю

$$\mathbf{R}T = T_*, \tag{5}$$

де $\mathbf{R}$ – деякий функціонал, що діє із $C(\overline{G}) \to C[\tau_0, \theta]$; $T_* = \text{const}$ – задана температура; $\overline{G} = \overline{D} \times (\tau_0, \tau)$; C – простір неперервних функцій по координатах x_i $(i = \overline{1,3})$ і часу τ. При цьому функції керування u_i $(i = 1,2)$ не можуть перевищувати деяких гранично допустимих неперервних функцій $\omega_1 \in C(G)$ та $\omega_2 \in C(S)$:

$$u_1 \le \omega_1, \quad (\mathbf{x}, \tau) \in G_\theta; \tag{6}$$

$$u_2 \le \omega_2, \quad (\mathbf{x}, \tau) \in S_\theta. \tag{7}$$

Умови (6), (7) є природними і пов'язані зі скінченною потужністю внутрішніх і зовнішніх джерел тепла.

Основні обмеження при інтенсивному нагріванні тіл накладаються на параметри температурного поля або термонапруження. Це викликано оплавленням, повзучістю, температурним розширенням тіла в небажаному напрямі, зниженням міцності та ін. Для математичного формулювання цих обмежень припустимо, що їх можна представити нерівностями вигляду

$$\mathbf{F}_i T(\mathbf{x}, \tau) \le \mathbf{N}_i(\tau, T), \quad x \in \overline{D}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{8}$$

де $\mathbf{F}_i$ – інтегральний або інтегродиференціальний оператор. Для деяких теплових параметрів, а саме максимальної або мінімальної температури тіла, градієнта температурного поля, перепаду температур, швидкості зміни температури лінійність операторних залежностей (8) є очевидною.

Отже, потрібно знайти функції керування u_i $(i = 1,2)$, які при обмеженнях (6)–(8) за мінімальний час τ_* змінять температурне поле тіла, що описується граничною задачею (1), (2) від початкового стану (3) до кінцевого (4).

Природним є припущення, що розглядуваний процес керований. Останнє, зокрема, має місце в тому випадку, коли задача (1)–(3) є коректною. Існування і єдиність розв'язку задачі теплопровідності при $u_i = \omega_i$ $(i = 1,2)$ забезпечуються наступними достатніми умовами, що накладаються на коефіцієнти оператора $\mathbf{L}$, функції $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x}, \tau, T, u_2)$ та вигляд області D [6,7].

УМОВА 1. Коефіцієнти a_{ij}, b – обмежені та неперервні, мають неперервні похідні першого порядку.

УМОВА 2. Область D строго сферична зсередини [7].

УМОВА 3. Функції $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x},\tau,y,z)$ – неперервні від своїх аргументів. Крім того, функція $g(\mathbf{x},\tau,y,z)$:

а) монотонно не спадає від y, тобто для всіх y_1, y_2 таких, що $y_1 < y_2$ виконується умова

$$g(\mathbf{x},\tau,y_1,z) \le g(\mathbf{x},\tau,y_2,z), \tag{9}$$

причому для кожного моменту часу τ' існує хоча б одна точка $\mathbf{x}'$, $(\mathbf{x}',\tau') \in S_\tau$, $S_\tau = \Gamma \times (\tau_0,\tau]$ в якій нерівність (9) є строгою;

б) монотонно спадає по z, тобто для всіх значень z_1, z_2 з умови $z_1 < z_2$ випливає нерівність

$$g(\mathbf{x},\tau,y,z_1) > g(\mathbf{x},\tau,y,z_2). \tag{10}$$

Позначимо через T_q розв'язок задачі (1)–(3) при $u_i = q_i$ $(i = 1,2)$, а через U_θ – множину допустимих керувань.

ОЗНАЧЕННЯ. Вектор–функція $\mathbf{q} = (q_1,q_2)$ належить множині допустимих керувань U_θ, якщо на множині G_θ при $u_1 = q_1$ задовольняється обмеження (6) і на множині S_θ при $u_2 = q_2$ задовольняється обмеження (7), а відповідний температурний режим T_q задовольняє обмеження

$$\mathbf{F}_i \mathrm{T}_q \le \mathbf{N}_i(\mathbf{x},\tau,T_q), \quad (\mathbf{x},\tau) \in \overline{G}_\theta, \quad i = \overline{1,m}. \tag{11}$$

Для доведення достатніх умов оптимальності за швидкодією для задачі керування (1)–(8) необхідно накласти додаткові умови на оператори і функції, що моделюють цю задачу.

УМОВА 4. Якщо вектор–функції $\mathbf{p},\mathbf{r} \in U_\theta$, то з умови $T_p \ge T_r$ слідує $\mathbf{R}T_p \ge \mathbf{R}T_r$ для $\tau \in [\tau_0,\theta]$.

УМОВА 5. Для довільної вектор–функції $\mathbf{p} \in U_\theta$ $\lim\limits_{\tau\to\tau_0} \mathbf{R}T_p = d_f < T_*$, де d_f – деяка константа, що залежить від функції $f(\mathbf{x})$.

УМОВА 6. Якщо додатний максимум функції $T(\mathbf{x},\tau)$ на G_θ досягається в точці $(\mathbf{x}_{max},\tau_{max}) \in \overline{G}_\theta$, то $\mathbf{F}_i T\Big|_{(\mathbf{x}_{max},\tau_{max})} \ge 0$.

УМОВА 7. Задані функції $\mathbf{N}_i$ $(i = \overline{1,m})$ неперервні в області визначення своїх аргументів і монотонно спадають по T, тобто для всіх $T_1 < T_2$ повинна виконуватись нерівність

$$\mathbf{N}_i(\mathbf{x},\tau,T_1) > \mathbf{N}_i(\mathbf{x},\tau,T_2), \quad i=\overline{1,m}\ .$$

Сформулюємо та доведемо тепер теорему про достатні умови оптимальності за швидкодією для задачі керування (1)–(8).

ТЕОРЕМА. Нехай виконуються умови 4–7. Тоді, якщо існує вектор-функція $\mathbf{p}\in U_\theta$, для якої при $u_i = p_i \ \ (i=1,2)$ виконуються рівності

$$(p_1-\omega_1)\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{F}_iT_p-\mathbf{N}_i)=0, \quad (\mathbf{x},\tau)\in G_\theta; \tag{12}$$

$$(p_2-\omega_2)\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{F}_iT_p-\mathbf{N}_i)=0, \quad (\mathbf{x},\tau)\in S_\theta, \tag{13}$$

то $\mathbf{p}$ – оптимальне за швидкодією керування для задачі (1)–(8).

Доведення опирається на лему.

ЛЕМА. Нехай існує вектор–функція $\mathbf{p}\in U_\theta$, що забезпечує виконання рівностей (12), (13) при $\tau\in[\tau_0,\theta]$. Тоді для довільної іншої функції з цього ж простору $\mathbf{r}\in U_\theta$ справедлива нерівність

$$T_r \le T_p \ \text{на}\ \overline{G}_\theta. \tag{14}$$

Доведення. Припустимо протилежне. Нехай існує вектор-функція $\mathbf{q}\in U_\theta$, для якої $T_q > T_p$ в точці $(\mathbf{x}_*,\tau_*)\in\overline{G}_\theta$. Розглянемо функцію $v = T_q - T_p$, яка є розв'язком наступної крайової задачі

$$\mathbf{L}T_q-\mathbf{L}T_p = p_1-q_1, \quad (\mathbf{x},\tau)\in G_\theta\ ; \tag{15}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = g(\mathbf{x},\tau,T_q,q_2)-g(\mathbf{x},\tau,T_p,p_2), \quad (\mathbf{x},\tau)\in S_\theta; \tag{16}$$

$$v(\mathbf{x},\tau_0)=0, \quad \mathbf{x}\in\overline{D}. \tag{17}$$

Оскільки виконується умова 1, то різницю двох квазілінійних операторів у рівнянні (14) можна представити у вигляді лінійного оператора для функції $v>0$. Справді, використовуючи метод, запропонований в [6] можна показати, що

$$\mathbf{L}T_q-\mathbf{L}T_p = a_{ij}(T_q)\frac{\partial^2 T_q}{\partial x_i\partial x_j}-a_{ij}(T_p)\frac{\partial^2 T_p}{\partial x_i\partial x_j}+b_i(T_q)\frac{\partial T_q}{\partial x_i}-$$

$$-b_i(T_p)\frac{\partial T_p}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(T_q-T_p\right)=a_{ij}(T_q)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}+b_i(T_q)\frac{\partial v}{\partial x_i}-$$

$$-\frac{\partial v}{\partial\tau}+\frac{\partial^2 T_p}{\partial x_i\partial x_j}\int_0^1\frac{d}{dt}a_{ij}\left(tT_q+(1-t)T_p\right)dt+$$

$$+\frac{\partial T_p}{\partial x_i}\int_0^1 \frac{d}{dt} b_i\left(tT_q+(1-t)T_p\right)dt = a_{ij}(T_q)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}+$$

$$+b_i(T_q)\frac{\partial v}{\partial x_i}+v\left[\frac{\partial^2 T_p}{\partial x_i \partial x_j}\int_0^1 a'_{ij}(z)\Big|_{z=tT_q+(1-t)T_p}dt+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial T_p}{\partial x_i}\int_0^1 b'_i(z)\Big|_{z=tT_q+(1-t)T_p}dt\right]-\frac{\partial v}{\partial \tau}=\mathbf{L}^* v\,.$$

Таким чином, крайова задача (15)–(17) зводиться до наступної

$$\mathbf{L}^* v = p_1 - q_1, \quad (\mathbf{x},\tau)\in G_\theta; \tag{18}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = g(\mathbf{x},\tau,T_q,q_2) - g(\mathbf{x},\tau,T_p,p_2), \quad (\mathbf{x},\tau)\in S_\theta; \tag{19}$$

$$v(\mathbf{x},\tau_0)=0, \quad \mathbf{x}\in\overline{D}, \tag{20}$$

де $\mathbf{L}^*$ – лінійний оператор.

Оскільки $v\in C(\overline{G})$ і $v(\mathbf{x}_*,\tau_*)>0$, то існує точка $(\mathbf{x}_{max},\tau_{max})\in\overline{G}\theta$, $\tau_{max}>0$, в якій функція V досягає додатного максимуму. Згідно умов, які накладаються на вектор–функцію $\mathbf{p}$, в кожній точці простору G_θ повинна виконуватись одна з рівностей

$$\mathbf{F}_i T_p = \mathbf{N}_i, \quad i=\overline{1,m} \tag{21}$$

або

$$p_1=\omega_1, \tag{22}$$

а в кожній точці S_θ – одна з рівностей

$$\mathbf{F}_i T_p = \mathbf{N}_i, \quad i=\overline{1,m} \tag{23}$$

або

$$p_2=\omega_2. \tag{24}$$

Нехай область $B_{F_j}\subset\overline{G}\theta$ включає множину всіх точок, в яких виконуються j–ті рівності (21), (23), а $B_\omega=\overline{G}\theta\setminus\bigcup_{j=1}^{m}B_{F_j}$. Тоді для довільної точки $(\mathbf{x},\tau)\in B_\omega$

$$\mathbf{F}_i T_p\Big|_{(\mathbf{x},\tau)} < \mathbf{N}_i(\mathbf{x},\tau,T_p), \quad i=\overline{1,m} \tag{25}$$

і виконуються рівності (22), (24). Покажемо, що точка $(\mathbf{x}_{max},\tau_{max})$

максимуму функції $v(\mathbf{x},\tau)$ не може належати ні одній із підмножин B_{F_j}, B_ω, що і доведе лему.

Припустисмо, що $(\mathbf{x}_{max},\tau_{max}) \in B_{F_j}$ $(1 \le j \le m)$. Тоді $\mathbf{F}_j v = \mathbf{F}_j T_p - \mathbf{N}_j(\mathbf{x}_{max},\tau_{max},T_p) < \mathbf{F}_j T_q - \mathbf{N}_j(\mathbf{x}_{max},\tau_{max},T_q) \le 0$, оскільки згідно припущення $T_p(\mathbf{x}_{max},\tau_{max}) < T_q(\mathbf{x}_{max},\tau_{max})$ і функція $\mathbf{N}_j$ задовольняє умову 7. Але отримана нерівність суперечить умові 6. Звідси випливає, що точка $(\mathbf{x}_{max},\tau_{max})$ належить області B_ω.

Нехай $B_\omega^1 = B_\omega \bigcap D \times (\tau_0,\theta)$, а $B_\omega^2 = B_\omega \bigcap S_\theta$. Можна показати, що B_ω^1 – відкрита множина [7] і $B_\omega^2 \subset B_\omega^1$. Припустимо, що $(\mathbf{x}_{max},\tau_{max}) \in B_\omega^1$. Оскільки B_ω^1 – відкрита множина, то знайдеться така зв'язна область $E \subset B_\omega^1$, яка містить точку $(\mathbf{x}_{max},\tau_{max})$ і $\overline{E} \not\subset B_\omega^1$. Поверхня області B_ω^1 складається з чотирьох частин: $C_1 \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{F_i}$; $C_2 \subset B_\omega^2$; C_3, яка належить гіперплощині $\tau = \tau_0$ і C_4, що належить гіперплощині $\tau = \theta$. Причому, $C_1 \bigcup C_2 \ne \varnothing$.

Оскільки $\mathbf{L}^* v = p_1 - q_1 \ge 0$ для $(\mathbf{x}_{max},\tau_{max}) \in E$, то з принципу додатного сильного максимуму [6,7] $v(\mathbf{x}_{max},\tau_{max}) = M > 0$ при $(\mathbf{x}_{max},\tau_{max}) \in \overline{E}$. Якщо C_1 – непорожня множина, то функція v досягає додатного максимуму в області $\bigcup_{i=1}^{m} B_{F_i}$, що суперечить вже доведеному. Якщо C_3 – непорожня множина, то $v(\mathbf{x},\tau_0) = M > 0$, що суперечить рівності (20). Отже, $(\mathbf{x}_{max},\tau_{max}) \in C_2 \subset B_\omega^2$. Оскільки $T_p(\mathbf{x}_{max},\tau_{max}) < T_q(\mathbf{x}_{max},\tau_{max})$ і $q_2(\mathbf{x}_{max},\tau_{max}) \le p_2(\mathbf{x}_{max},\tau_{max}) = \omega_2$, то

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = g(\mathbf{x}_{max},\tau_{max},T_q,q_2) - g(\mathbf{x}_{max},\tau_{max},T_p,p_2) =$$
$$= g(\mathbf{x}_{max},\tau_{max},T_q,q_2) - g(\mathbf{x}_{max},\tau_{max},T_p,q_2) +$$
$$= g(\mathbf{x}_{max},\tau_{max},T_p,q_2) - g(\mathbf{x}_{max},\tau_{max},T_p,p_2) > 0;$$

Але це суперечить лемі 1, яка сформульована і доведена в [5]. Остання стверджує наступне. Нехай виконується умова 2 і додатний максимум $M > 0$ функції $T(\mathbf{x},\tau)$ на $\overline{G}$ досягається в точці $\left(\mathbf{x}_{max},\tau_{max}\right) \in S$. Тоді, якщо існує такий окіл $E \subset G$ точки $\left(\mathbf{x}_{max},\tau_{max}\right)$, в якому $\mathbf{L}^{*}T \ge 0$ і $T(\mathbf{x},\tau) \ne \mathrm{const}$, то $\left.\dfrac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\right|_{(\mathbf{x}_{max},\tau_{max})} < 0$.

Отже, наша лема доведена. На її основі доведемо твердження теореми. Нехай існує вектіор–функція $\mathbf{p} \in U_{\theta}$, яка задовольняє рівності (12), (13). Згідно з лемою для довільної функції $\mathbf{r} \in U_{\theta}$ виконується нерівність $T_p \ge T_p$ на $\overline{G}$. З умови 4 маємо

$$\mathbf{R}T_p \ge \mathbf{R}T_r, \quad \tau \in \left[\tau_0,\theta\right]. \tag{26}$$

Нехай $\tau_* = sup\,\xi$ таких, що $\mathbf{R}T_p < T_*$ при $\tau \in \left[\tau_0,\xi\right]$. Тоді при $\tau = \theta$ з рівності (26), умови 5 і співвідношення (4) отримуємо

$$\left.\mathbf{R}T_p\right|_{\tau=\tau_0} < T_* \le \left.\mathbf{R}T_p\right|_{\tau=\theta}.$$

Отже, $\tau_* \in \left[\tau_0,\theta\right]$, а оскільки $\mathbf{R}T_p \in C\left[\tau_0,\theta\right]$, то $\left.\mathbf{R}T_p\right|_{\tau=\tau_*} = T_*$. Із визначення τ_* випливає, що $\mathbf{R}T_p < T_*$ при $\tau \in \left[\tau_0,\tau_*\right)$. Тому для довільної вектор–функції $\mathbf{r} \in U_{\theta}$ рівність (5) не може виконуватись при $\tau \in \left[\tau_0,\tau_*\right)$. Отже, $\mathbf{p}$ – оптимальне за швидкодією керування задачі (1)–(8).

Якщо існує $\tau \in \left(\tau_0,\theta\right]$, при якому $\mathbf{R}T_p \ge T_*$, то процес, який описується крайовою задачею (1)–(3), керований. Якщо ж функція $\mathbf{p} \in U_{\theta}$ задовольняє умови теореми, то із нерівності $\mathbf{R}T_p < T_*$ при $\tau \in \left[\tau_0,\theta\right]$, де θ – як завгодно велике, випливає, що розглядуваний процес не керований.

В [2] доведено, що існує не більше, як одна вектор–функція $\mathbf{p} \in U_{\theta}$, яка задовольняє рівності (12), (13) при $\tau \in \left[\tau_0,\theta\right]$.

Таким чином, для термочутливих пружних тіл доведені теореми, які дозволяють поетапно, опираючись на метод обернених задач теплопровідності й термопружності [1,2] будувати оптимальне за швидкодією керування їх нагріванням.

Література.

1. Вигак В.М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. – Киев: Наук. думка: 1979. – 360 с. 2. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка: 1988. – 312 с. 3. Вігак В.М. Розв'язки задач теорії пружності та термопружності в напруженнях//Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – 1995. – Вип. 9. – С. 34–122. 4. Вигак В.М., Костенко А.В. Достаточные условия оптимальности по быстродействию управления процессами диффузионного типа//Мат. физика. – 1982. – Вып. 31. – С. 67–71. 5. Костенко А.В., Витер М.Б. Достаточные условия оптимальности по быстродействию нагрева твердых тел внутренними источниками тепла//Мат. методы и физ.–мех. поля. – 1987. – Вып. 25. – С. 56–60. 6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М: Наука, 1967. – 736 с. 7. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М: Мир, 1968. – 427 с.

Kostenko A.V., Zasadna Ch.O.

Sufficient conditions of optimal control respect to speed of heating a thermosensitive solids

The problem of optimization respect to speed heating of thermosensitive elastic solids under the restriction imposed on the control function and temperature field or thermostressed state parameters is considered. The conditions which is sufficient for minimization of heating time are formulated. The theorems which allows to construct the optimal control in the sense of rapidity by heating of thermosensitive elastic bodies at every stage using methods of inverse heat conductivity and thermoelasticity problem is proved.

Стаття надійшла до редколегії 29.09.1998

УДК 539.3:519.6

Кревс В.В., Савула Я.Г.

Про ієрархічну модель теплопровідності тонкого шару

Проблеми математичного моделювання процесу розподілу тепла у тонких включеннях або покриттях розглядались багатьма дослідниками [1,5-8]. У даній праці пропонується загальний підхід до побудови математичної моделі теплопровідності у "тонких" середови-