Література.

1. Вигак В.М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. – Киев: Наук. думка: 1979. – 360 с. 2. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка: 1988. – 312 с. 3. Вігак В.М. Розв'язки задач теорії пружності та термопружності в напруженнях//Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – 1995. – Вип. 9. – С. 34–122. 4. Вигак В.М., Костенко А.В. Достаточные условия оптимальности по быстродействию управления процессами диффузионного типа//Мат. физика. – 1982. – Вып. 31. – С. 67–71. 5. Костенко А.В., Витер М.Б. Достаточные условия оптимальности по быстродействию нагрева твердых тел внутренними источниками тепла//Мат. методы и физ.–мех. поля. – 1987. – Вып. 25. – С. 56–60. 6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М: Наука, 1967. – 736 с. 7. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М: Мир, 1968. – 427 с.

Kostenko A.V., Zasadna Ch.O.

Sufficient conditions of optimal control respect to speed of heating a thermosensitive solids

The problem of optimization respect to speed heating of thermosensitive elastic solids under the restriction imposed on the control function and temperature field or thermostressed state parameters is considered. The conditions which is sufficient for minimization of heating time are formulated. The theorems which allows to construct the optimal control in the sense of rapidity by heating of thermosensitive elastic bodies at every stage using methods of inverse heat conductivity and thermoelasticity problem is proved.

Стаття надійшла до редколегії 29.09.1998

УДК 539.3:519.6

Кревс В.В., Савула Я.Г.

Про ієрархічну модель теплопровідності тонкого шару

Проблеми математичного моделювання процесу розподілу тепла у тонких включеннях або покриттях розглядались багатьма дослідниками [1,5-8]. У даній праці пропонується загальний підхід до побудови математичної моделі теплопровідності у "тонких" середовищах шляхом побудови ієрархії математичних моделей пониженої вимірності. Знаходиться загальна форма математичної моделі, яка не залежить від конкретного розподілу температури за товщиною покриття. Досліджується симетричність та додатна визначеність отриманих білінійних форм. Виводяться апріорні оцінки похибки.

1. Позначення та геометрія. У наступному вектори позначаються малими жирними літерами вектори, а матриці – великими жирними літерами. Нехай

$$\partial_i^j = \frac{\partial^j}{\partial \alpha_i^j}, i = 1,2,3,\ j \in Z\ , \tag{1}$$

де $\partial_i^0 = I$, $\partial_i = \partial_i^1$.

Розглянемо однозв'язну область $\Omega^* \in R^3$ з ліпшицевою границею $\partial\Omega^* = \Gamma^+ \cup \Gamma^- \cup \Gamma^s$ (поверхні Γ^+ та Γ^- обмежують відповідно зверху та знизу область Ω^*, а Γ^s є бічною поверхнею Ω^*). Припустимо, що область Ω^* віднесено до криволінійної ортогональної системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, пов'язаної з серединною поверхнею Ω ($\alpha_i = const, i = 1,2$ – напрямки головних кривин Ω, $\alpha_3 = const$ – напрямок нормалі до Ω). Тоді Ω^* описується радіус-вектором:

$$\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{r}_0(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \mathbf{e}_3(\alpha_1, \alpha_2),\ (\alpha_1, \alpha_2) \in D, \alpha_3 \in \left[-\tfrac{d}{2}, \tfrac{d}{2}\right], \tag{2}$$

де $\mathbf{r}_0(\alpha_1, \alpha_2)$ – радіус-вектор Ω, $\mathbf{e}_3(\alpha_1, \alpha_2) = \dfrac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|}$ – вектор зовнішньої одиничної нормалі до Ω, $\mathbf{e}_i(\alpha_1, \alpha_2) = \partial_i \mathbf{r}_0(\alpha_1, \alpha_2)$, $i = 1,2$, $d > 0$ – товщина шару, $D \in R^2$ – однозв'язна область з ліпшицевою границею ∂D,

$$\partial D = \left\{(\alpha_1, \alpha_2) \in \overline{D} : \alpha_1 = \alpha_1(\eta), \alpha_2 = \alpha_2(\eta), \eta \in I \subset R\right\}. \tag{3}$$

Відомо [4], що коефіцієнти Ламе системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ мають наступний вигляд:

$$H_i = A_i(1 + k_i \alpha_3),\ i = 1,2\ ,\ H_3 = 1\ , \tag{4}$$

де $A_i = \sqrt{\mathbf{e}_i^2}$, $i = 1,2$, а k_i , $i = 1,2$ є головними кривинами серединної поверхні Ω . Очевидно, що

$$\Gamma^{\pm} = \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in D, \alpha_3 = \pm\tfrac{d}{2}\right\}, \tag{5}$$

$$\Gamma^s = \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in \partial D, \alpha_3 \in \left[-\tfrac{d}{2}, \tfrac{d}{2}\right]\right\}, \tag{6}$$

а елемент об'єму $d\Omega^* = H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$.

2. Постановка задачі. Запишемо рівняння теплопровідності шару у системі координат $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$:

$$-\frac{1}{H_1H_2}\left(\partial_1\left(\lambda\frac{H_2}{H_1}\partial_1T\right)+\partial_2\left(\lambda\frac{H_1}{H_2}\partial_2T\right)+\partial_3(\lambda H_1H_2\partial_3T)\right)=q \text{ в } \Omega^* \quad (7)$$

Припустимо, що на лицьовій поверхні Γ^+ відбувається теплообмін за Ньютоном , а на лицьовій поверхні Γ^- та бічній поверхні Γ^s задано потоки q_n^- та q_n^s відповідно.

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial n}=a\left(T-T_c^+\right) \text{ на } \Gamma^+, -\lambda\frac{\partial T}{\partial n}=q_n^- \text{ на } \Gamma^-, \quad (8)$$

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial n}=q_n^s \text{ на } \Gamma^s. \quad (9)$$

Припускаємо, що $\lambda\in L^\infty(\Omega)$, $q\in H^{-1}(\Omega^*)$, $a\in L^\infty(\Gamma^+)$, $T_c^+\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^+)$, $q_n^-\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^-)$, $q_n^s\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^s)$. Тоді варіаційна постановка задачі (7) з граничними умовами (8)-(9) має наступний вигляд:

Знайти $T\in V=H^1(\Omega^*)$, що задовольняє рівняння:

$$A(T,S)=L(S), \forall S\in V, \quad (10)$$

де

$$A(T,S)=\int_{\Omega^*}\lambda\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{H_i^2}\partial_iT\partial_iSd\Omega^* + \int_{\Gamma^+}aTSd\sigma, \quad (11)$$

$$L(S)=\int_{\Omega^*}qSd\Omega^* + \int_{\Gamma^+}aT_c^+Sd\sigma - \int_{\Gamma^s}q_n^sSd\sigma - \int_{\Gamma^-}q_n^-Sd\sigma. \quad (12)$$

Очевидно, що лінійна форма $L(\cdot):V\to R$ є обмеженою у просторі V, тобто $L\in V'$, а білінійна форма $A(\cdot,\cdot):V\times V\to R$ є симетричною у просторі V та V-еліптичною. Тому за теоремою Лакса-Мільграма існує єдиний розв'язок задачі (10).

3. Ієрархічна модель пониженої вимірності. Нехай $M\in Z^+$. Визначимо простір V^M:

$$V^M=\left\{T^M\in V \,\middle|\, T^M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\mathbf{t}^T(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{P}\left(\tfrac{2\alpha_3}{d}\right)\right\} \quad (13)$$

Тут $\mathbf{t}=[t_0(\alpha_1,\alpha_2),\ldots,t_M(\alpha_1,\alpha_2)]^T$ – варіації температури на серединній поверхні Ω, а $\mathbf{P}=[P_0(\xi),\ldots,P_M(\xi)]^T$ – вектор лінійно незалежних на відрізку $[-1,1]$ неперервних функцій, наприклад, вектор лінійно незалежних поліномів степеня M. Очевидно, що V^M є замкненим підпростором V.

Визначення. *Розв'язком пониженої вимірності T^M ієрархічної моделі порядку m* називається ортогональна проекція розв'язку T варіаційної задачі (11) на простір V^M відносно енергетичного скалярного добутку $A(\cdot,\cdot)$, тобто $A(T-T^M,S)=0$, $\forall S\in V^M$.

В результаті підстановки $T^M \in V^M$ у рівняння (10) та явного інтегрування за α_3 у кожному інтегралі ми отримуємо наступну варіаційну задачу пониженої вимірності для знаходження $T^M=\mathbf{t}^T\mathbf{P}$.

Знайти $\mathbf{t}\in\widetilde{V}=\left[H^1(D)\right]^{M+1}$, що задовольняє рівняння

$$A^M(\mathbf{t},\mathbf{s})=L^M(\mathbf{s}), \forall \mathbf{s}\in\widetilde{V}, \tag{14}$$

де

$$A^M(\mathbf{t},\mathbf{s})=\int_D\left(\partial_1\mathbf{s}^T\mathbf{B}_1\partial_1\mathbf{t}+\partial_2\mathbf{s}^T\mathbf{B}_2\partial_2\mathbf{t}+\mathbf{s}^T\mathbf{B}_3\mathbf{t}\right)A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2, \tag{15}$$

$$L^M(\mathbf{s})=\int_D\mathbf{s}^T(\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2)A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2+\int_{\partial D}\mathbf{s}^T\mathbf{f}_3d\Gamma, \tag{16}$$

$$\mathbf{B}_i=\frac{1}{A_i^2}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\lambda\frac{1+k_{3-i}\alpha_3}{1+k_i\alpha_3}\mathbf{P}\left(\tfrac{2\alpha_3}{d}\right)\mathbf{P}^T\left(\tfrac{2\alpha_3}{d}\right)d\alpha_3,\ i=1,2, \tag{17}$$

$$\mathbf{B}_3=\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\lambda(1+k_1\alpha_3)(1+k_2\alpha_3)\partial_3\mathbf{P}\left(\tfrac{2\alpha_3}{d}\right)\partial_3\mathbf{P}^T\left(\tfrac{2\alpha_3}{d}\right)d\alpha_3$$
$$+a\mathbf{P}(1)\mathbf{P}^T(1)\left(1+k_1\tfrac{d}{2}\right)\left(1+k_2\tfrac{d}{2}\right), \tag{18}$$

$$\mathbf{f}_1=\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}q(1+k_1\alpha_3)(1+k_2\alpha_3)\mathbf{P}\left(\tfrac{2\alpha_3}{d}\right)d\alpha_3, \tag{20}$$

$$\mathbf{f}_2=aT_c^+\left(1+k_1\tfrac{d}{2}\right)\left(1+k_2\tfrac{d}{2}\right)\mathbf{P}(+1)-q_n^-\left(1-k_1\tfrac{d}{2}\right)\left(1-k_2\tfrac{d}{2}\right)\mathbf{P}(-1), \tag{21}$$

$$\mathbf{f}_3=-\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}q_n^s\mathbf{P}\left(\tfrac{2\alpha_3}{d}\right)\sqrt{\frac{H_1^2n_2^2+H_2^2n_1^2}{A_1^2n_2^2+A_2^2n_1^2}}d\alpha_3,\ n_1=\frac{d\alpha_2}{d\eta},\ n_2=-\frac{d\alpha_1}{d\eta}. \tag{22}$$

а $d\Gamma=\sqrt{A_1^2n_2^2+A_2^2n_1^2}\,d\eta$ – елемент дуги ∂D.

Очевидно, що матриці $\mathbf{B}_i, i=\overline{1,3}$ є симетричними та додатно-визначеними. Тоді мають місце наступні оцінки:

$$\mu_1 \|\mathbf{s}\|_{1,D}^2 \le A^M(\mathbf{s},\mathbf{s}),\ A^M(\mathbf{t},\mathbf{s}) \le \mu_2 \|\mathbf{t}\|_{1,D} \|\mathbf{s}\|_{1,D}\ ,, \tag{23}$$

$$\left|L^M(\mathbf{s})\right| \le \mu_3 \|\mathbf{s}\|_{1,D},\ \forall \mathbf{t},\mathbf{s} \in \widetilde{V}, \tag{24}$$

$$\mu_1 = \min_{i=\overline{1,3}}\left(\left\|\lambda_{\min}(\mathbf{B}_i A_1 A_2)\right\|_{\infty,D}\right) > 0,\ \mu_2 = \max_{i=\overline{1,3}}\left(\left\|\lambda_{\max}(\mathbf{B}_i A_1 A_2)\right\|_{\infty,D}\right) > 0,$$

$$\mu_3 = \left\|(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) A_1 A_2\right\|_{0,D} + \|\mathbf{f}_3\|_{-\frac{1}{2},\partial D}.$$

Теорема 1. *Розв'язок* $\mathbf{t} \in \widetilde{V}$ *варіаційної задачі (14) існує та є єдиним.*

Доведення. Випливає з наступних тотожностей:

$$A^M(\mathbf{t},\mathbf{s}) \equiv A(T,S),\ L^M(\mathbf{s}) \equiv L(S), \forall T = \mathbf{t}^T\mathbf{P} \in V^M, S = \mathbf{s}^T\mathbf{P} \in V^M,$$

та існування і єдиності ортогональної проекції на підпростір гільбертового простору. Теорема доведена.

4. Апріорна оцінка похибки ієрархічної моделі.

Розглянемо n-вимірний паралелепіпед

$$\Omega = \left\{\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) : -\tfrac{d_i}{2} \le \alpha_i \le \tfrac{d_i}{2}, i = \overline{1,n}\right\}. \tag{25}$$

Відомо [2], що функцію $u \in H^{2s}(\Omega)$ включно з похідними порядку $2s$ можна розвинути в ряд Фур'є

$$u(\alpha) = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}}(\alpha), \tag{26}$$

де $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_n)$, $Q_{\mathbf{k}}(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} P_{k_i}\left(\frac{2\alpha_i}{d_i}\right)$, $a_{\mathbf{k}} = (u, Q_{\mathbf{k}})_{0,\Omega} \|Q_{\mathbf{k}}\|_{0,\Omega}^{-2}$, $P_l(\xi)$ – поліном Лежандра l-го порядку. Визначимо оператор $L_i : H^2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, такий що

$$u \in H^2(\Omega) \to L_i u \stackrel{def}{=} \partial_i\left(\left(1 - \left(\tfrac{2\alpha_i}{d_i}\right)^2\right)\partial_i u\right) \in L_2(\Omega),$$

та його степінь $L_i^0 \equiv I$, $L_i^{n+1} \equiv L_i(L_i^n)$, $n \ge 0$. Можна показати справедливість наступної теореми.

Теорема 2. *Нехай функція* $u \in H^{2s}(\Omega)$, $s > 0$, *а мультиіндекс* $\mathbf{N}$ *задовольняє умові*

$$\exists j \in \overline{1,n}, \forall i \in \overline{1,n} : \frac{\left(\frac{d_i}{2}\right)^2}{N_i(N_i+1)} \le \frac{\left(\frac{d_j}{2}\right)^2}{N_j(N_j+1)} \tag{27}$$

Тоді відхилення функції u *від її* $\mathbf{N}$*-ї часткової суми Фур'є* $u_{\mathbf{N}}(\alpha) = \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{N}} a_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}}(\alpha)$ *оцінюється наступним чином:*

$$\left\|u-u_{\mathbf{N}}\right\|_{r,\Omega} \leq C\frac{\left(\frac{d_j}{2}\right)^{2s-r}}{\left(N_j\left(N_j+1\right)\right)^{s-\frac{r}{2}}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left\|L_i^s u\right\|_{0,\Omega}^2}\,, \tag{28}$$

де $C=C(n,s)>0$, $r=\overline{0,1}$.

Справедлива наступна теорема, яка встановлює апріорну оцінку похибки ієрархічної моделі.

Теорема 3. *Припустимо, що 1) область* D *є прямокутною; 2)* $\Lambda=\max\left(\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3\right)<\infty$, $\Lambda_i=\sup\limits_{\Omega^*}\left(\lambda\frac{H_1H_2}{H_i^2}\right)$, $i=\overline{1,3}$ *; 3) розв'язок* T *задачі (10)-(12) належить простору* $H^{2s}\left(D\times\left[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right]\right)$. *Тоді справедлива наступна оцінка:*

$$\left\|T-T^M\right\|_A \leq \widetilde{C}_1\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^{2s-1}}{\left(M\left(M+1\right)\right)^{s-\frac{1}{2}}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left\|L_i^s T\right\|_{0,D\times\left[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right]}^2}\,, \tag{29}$$

де T^M *є розв'язком задачі (14)-(16).*

Доведення. Розглянемо наступний інтерполянт довільної функції $T\in H^{2s}\left(D\times\left[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right]\right)$:

$$\widetilde{T}^M\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\sum_{m=0}^{M}t_m\left(\alpha_1,\alpha_2\right)P_m\left(\frac{2\alpha_3}{d}\right), \tag{30}$$

$$t_m\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\left\|P_m\left(\frac{2\alpha_3}{d}\right)\right\|_{0,\left[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right]}^{-2}\int\limits_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}T\left(\alpha_1,\alpha_2,\zeta\right)P_m\left(\frac{2\alpha_3}{d}\right)d\zeta\,, \tag{31}$$

За теоремою Фубіні [2] функції $t_m\in L_2(D)$. Для визначеності припустимо, що $D=\left[-\frac{d_1}{2},\frac{d_1}{2}\right]\times\left[-\frac{d_2}{2},\frac{d_2}{2}\right]$. Розвинемо t_m в ряд Фур'є:

$$t_m\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\sum_{k,n=0}^{\infty}a_{knm}P_k\left(\frac{2\alpha_1}{d_1}\right)P_n\left(\frac{2\alpha_2}{d_2}\right), \tag{32}$$

де

$$a_{knm}=\left\|P_k\left(\frac{2\alpha_1}{d_1}\right)P_n\left(\frac{2\alpha_2}{d_2}\right)\right\|_{0,D}^{-2}\int\limits_D t_m(\xi,\eta)P_k\left(\frac{2\alpha_1}{d_1}\right)P_n\left(\frac{2\alpha_2}{d_2}\right)d\xi d\eta\,, \tag{33}$$

і підставимо (31) в (33). В результаті отримаємо

$$a_{knm}=\left\|Q_{knm}\right\|_{0,D\times\left[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right]}^{-2}\left(T,Q_{knm}\right)_{0,D\times\left[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right]}. \tag{34}$$

Тоді з (30), (32) отримуємо

$$T-\widetilde{T}^M=T-\sum_{m=0}^{M}\sum_{k,n=0}^{\infty}a_{knm}Q_{knm}\,. \tag{35}$$

З теореми 2 випливає, що має місце наступна оцінка

$$\left\| T-\sum_{m=0}^{M}\sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{N} a_{knm}Q_{knm}\right\|_{r,D\times\left[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right]} \le C\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^{2s-r}}{\left(M(M+1)\right)^{s-\frac{r}{2}}}\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left\|L_i^s T\right\|^2_{0,D\times\left[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right]}}, \quad (36)$$

якщо виконуються нерівності

$$\frac{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2}{K(K+1)} \le \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2}{M(M+1)}, \quad \frac{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2}{N(N+1)} \le \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2}{M(M+1)}.$$

В результаті з (35), (36) отримуємо:

$$\left\|T-\widetilde{T}^M\right\|_{r,\Omega} = \lim_{K,N\to\infty}\left\| T-\sum_{m=0}^{M}\sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{N} a_{knm}Q_{knm}\right\|_{r,D\times\left[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right]}$$

$$\le C\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^{2s-r}}{\left(M(M+1)\right)^{s-\frac{r}{2}}}\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left\|L_i^s T\right\|^2_{0,\Omega}}. \quad (37)$$

Розглянемо білінійну форму $A(T,T)$, визначену в (11). З умов теореми та обмеженості оператора сліду функції випливають наступні оцінки

$$A(T,T) \le \Lambda|T|^2_{1,D\times\left[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right]} + C_1\|T\|^2_{1,D\times\left[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right]} \le (\Lambda + C_1)\|T\|^2_{1,D\times\left[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right]}, \ \forall T\in V \quad (38)$$

Враховуючи (39), (40) і той факт, що розв'язок T^M є найкращім наближенням T в нормі $\|\cdot\|_A$, отримуємо

$$\left\|T-T^M\right\|_A \le \left\|T-\widetilde{T}^M\right\|_A \le \widetilde{C}_1\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^{2s-1}}{\left(M(M+1)\right)^{s-\frac{1}{2}}}\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left\|L_i^s T\right\|^2_{0,\Omega}} \quad (39)$$

Теорема доведена.

5. Апроксимація за товщиною прошарку. Зауважимо, що рівняння (14)-(16) дають загальний вигляд побудованої ієрархічної математичної моделі теплопровідності тонкого прошарку, який не залежить від вигляду (13) конкретного розподілу температури за товщиною тонкого покриття – математична модель повністю задається матрицями $\mathbf{B}_i, i=\overline{1,3}$ та векторами $\mathbf{f}_i, i=\overline{1,3}$. Для широкого класу (необов'язково поліноміальних) функцій $P_i(\xi), i=\overline{0,M}$ ці матриці та вектори можливо обчислити в аналітичній формі, використовуючи пакет *Mathematica* 3.0 [12]. Однак такий підхід має той недолік, що при зміні функцій $P_i(\xi), i=\overline{0,M}$ необхідно повторно обчислювати ці матриці та вектори, що приводить до певних незручностей при програмній реалізації.

Спробуємо перетворити вирази (17)-(22) таким чином, щоб спростити програмну реалізацію. Оскільки $-1<k_i\frac{d}{2}<1$, то

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{A_i^2}\frac{d}{2}\int_{-1}^{1}\lambda\frac{1+k_{3-i}\frac{d}{2}\xi}{1+k_i\frac{d}{2}\xi}\mathbf{P}(\xi)\mathbf{P}^T(\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{A_i^2}\frac{d}{2}\int_{-1}^{1}\lambda\left(1+k_{3-i}\frac{d}{2}\xi\right)\sum_{l=0}^{\infty}\left(-k_i\frac{d}{2}\xi\right)^l\mathbf{P}(\xi)\mathbf{P}^T(\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{A_i^2}\frac{d}{2}\lambda\left(\mathbf{G}_0^0+\left(k_{3-i}-k_i\right)\sum_{l=1}^{\infty}\left(-k_i\right)^{l-1}\left(\frac{d}{2}\right)^l\mathbf{G}_l^0\right),\ i=1,2, \qquad (40)$$

де $\mathbf{G}_l^k = \int_{-1}^{1}\xi^l\frac{d^k\mathbf{P}(\xi)}{d\xi^k}\frac{d^k\mathbf{P}^T(\xi)}{d\xi^k}d\xi$, $k,l\geq 0$. Застосовуючи аналогічні перетворення та тотожності

$$H_1^2n_2^2+H_2^2n_1^2=\left(A_1^2n_2^2+A_2^2n_1^2\right)\left(1+2b_1\alpha_3+b_2\alpha_3^2\right),$$

$$b_1=\frac{k_1A_1^2n_2^2+k_2A_2^2n_1^2}{A_1^2n_2^2+A_2^2n_1^2},\ b_2=\frac{k_1^2A_1^2n_2^2+k_2^2A_2^2n_1^2}{A_1^2n_2^2+A_2^2n_1^2},\ \sqrt{1+2b_1\xi+b_2\xi^2}=\sum_{l=0}^{\infty}r_l\xi^l,$$

отримаємо:

$$\mathbf{B}_3=\lambda\left(\frac{2}{d}G_0^1+\left(k_1+k_2\right)G_1^1+k_1k_2\frac{d}{2}G_2^1\right)$$

$$+a\mathbf{P}(1)\mathbf{P}^T(1)\left(1+\left(k_1+k_2\right)\frac{d}{2}+k_1k_2\left(\frac{d}{2}\right)^2\right), \qquad (41)$$

$$\mathbf{f}_1=\frac{d}{2}\left(\int_{-1}^{1}q\left(\alpha_1,\alpha_2,\frac{d}{2}\xi\right)\mathbf{P}(\xi)d\xi+\left(k_1+k_2\right)\frac{d}{2}\int_{-1}^{1}q\left(\alpha_1,\alpha_2,\frac{d}{2}\xi\right)\xi\mathbf{P}(\xi)d\xi\right.$$

$$\left.+k_1k_2\left(\frac{d}{2}\right)^2\int_{-1}^{1}q\left(\alpha_1,\alpha_2,\frac{d}{2}\xi\right)\xi^2\mathbf{P}(\xi)d\xi\right), \qquad (42)$$

$$\mathbf{f}_3=\frac{d}{2}a\sum_{l=0}^{\infty}r_l\left(\frac{d}{2}\right)^l\int_{-1}^{1}q_n^s\left(\alpha_1,\alpha_2,\frac{d}{2}\xi\right)\xi^l\mathbf{P}(\xi)d\xi\,. \qquad (43)$$

Для довільних $k,l\geq 0$ матриці $\mathbf{G}_l^k$ та вектори виду $\int_{-1}^{1}f(\xi)\xi^l\mathbf{P}(\xi)d\xi$ легко обчислити з використанням чисельного інтегрування або аналітичного інтегрування [12]. Програма потім може зчитати ці матриці з файлу, що унезалежнює програму від конкретного виду функцій $P_i(\xi), i=\overline{0,M}$. Більш того, формули (21), (40)-(43) дають явний розклад лінійної форми $L^M(\mathbf{s})$ та білінійної форми $A^M(\mathbf{t},\mathbf{s})$ за степенями товщини прошарку d.

Нехай $\gamma=\max\limits_{i=1,2}\left(|k_i|\frac{d}{2}\right)<1$. Для $N\geq 1$ введемо білінійну форму

$A^{M,N}(\cdot,\cdot):\widetilde{V}\times\widetilde{V}\to R$ та лінійну форму $L^{M,N}(\cdot):\widetilde{V}\to R$ так, щоб виконувались рівності

$$A^{M}(\mathbf{t},\mathbf{s})=A^{M,N}(\mathbf{t},\mathbf{s})+O\left(\gamma^{N+1}\right),\ \forall\mathbf{t},\mathbf{s}\in\widetilde{V},$$

$$L^{M}(\mathbf{s})=L^{M,N}(\mathbf{s})+O\left(\gamma^{N+1}\right),\ \forall\mathbf{s}\in\widetilde{V},$$

і сформулюємо наступну варіаційну задачу:

Знайти $\mathbf{t}^{N}\in\widetilde{V}$, що задовольняє рівняння

$$A^{M,N}\left(\mathbf{t}^{N},\mathbf{s}\right)=L^{M,N}(\mathbf{s}),\ \forall\mathbf{s}\in\widetilde{V}, \tag{44}$$

де

$$L^{M,N}(\mathbf{s})=\int_{D}\mathbf{s}^{T}\left(\mathbf{f}_{1}^{N}+\mathbf{f}_{2}^{N}\right)A_{1}A_{2}d\alpha_{1}d\alpha_{2}+\int_{\partial D}\mathbf{s}^{T}\mathbf{f}_{3}^{N}d\Gamma, \tag{45}$$

$$A^{M,N}(\mathbf{t},\mathbf{s})=\int_{D}\left(\partial_{1}\mathbf{s}^{T}\mathbf{B}_{1}^{N}\partial_{1}\mathbf{t}+\partial_{2}\mathbf{s}^{T}\mathbf{B}_{2}^{N}\partial_{2}\mathbf{t}+\mathbf{s}^{T}\mathbf{B}_{3}^{N}\mathbf{t}\right)A_{1}A_{2}d\alpha_{1}d\alpha_{2}, \tag{46}$$

$$\mathbf{f}_{1}^{N}=\begin{cases}\frac{d}{2}\int_{-1}^{1}q\left(\alpha_{1},\alpha_{1},\frac{d}{2}\xi\right)P(\xi)d\xi,\ N=1\\ \mathbf{f}_{1}^{1}+(k_{1}+k_{2})\left(\frac{d}{2}\right)^{2}\int_{-1}^{1}q\left(\alpha_{1},\alpha_{1},\frac{d}{2}\xi\right)\xi P(\xi)d\xi,\ N=2\\ \mathbf{f}_{1},\ N\geq 3\end{cases} \tag{47}$$

$$\mathbf{f}_{2}^{N}=\begin{cases}\left(aT_{c}^{+}\mathbf{P}(1)-q_{n}^{-}\mathbf{P}(-1)\right)+(k_{1}+k_{2})\frac{d}{2}\left(T_{c}^{+}\mathbf{P}(1)+q_{n}^{-}\mathbf{P}(-1)\right),\ N=1\\ \mathbf{f}_{2},\ N\geq 2\end{cases}, \tag{48}$$

$$\mathbf{f}_{3}^{N}=-\frac{d}{2}a\sum_{l=0}^{N-1}r_{l}\left(\frac{d}{2}\right)^{l}\int_{-1}^{1}q_{n}^{s}\left(\alpha_{1},\alpha_{2},\frac{d}{2}\xi\right)\xi^{l}\mathbf{P}(\xi)d\xi, \tag{49}$$

$$\mathbf{B}_{i}^{N}=\begin{cases}\frac{1}{A_{i}^{2}}\frac{d}{2}\lambda\mathbf{G}_{0}^{0},\ N=1\\ \frac{1}{A_{i}^{2}}\frac{d}{2}\lambda\left(\mathbf{G}_{0}^{0}+(k_{3-i}-k_{i})\sum_{l=1}^{N-1}(-k_{i})^{l-1}\left(\frac{d}{2}\right)^{l}\mathbf{G}_{l}^{0}\right),\ N>1\end{cases},\ i=1,2, \tag{50}$$

$$\mathbf{B}_{3}^{N}=\begin{cases}\lambda\frac{2}{d}G_{0}^{1}+\left(\lambda(k_{1}+k_{2})G_{1}^{1}+a\mathbf{P}(1)\mathbf{P}^{T}(1)\right)\\ +\left(\lambda k_{1}k_{2}G_{2}^{1}+a\mathbf{P}(1)\mathbf{P}^{T}(1)(k_{1}+k_{2})\right)\frac{d}{2},\ N=1,\\ \mathbf{B}_{3},\ N>1\end{cases} \tag{51}$$

Теорема 4. *Розв'язок* $\mathbf{t}^{N}\in\widetilde{V}$ *варіаційної задачі (44) існує та є єдиним, якщо виконується одна з наступних умов:*

□ $N=1$, *матриця* $\mathbf{B}_3^1$ *є додатно визначеною;*

□ $N \geq 2$.

__Доведення.__ Очевидно, що лінійна форма $L^{M,N}(\cdot):\widetilde{V} \to R$ є обмеженою. Якщо ми покажемо, що білінійна форма $A^{M,N}(\cdot,\cdot):\widetilde{V}\times\widetilde{V} \to R$ є $\widetilde{V}$-еліптичною, то за теоремою Лакса-Мільграма існуватиме єдиний розв'язок задачі (44). Матриці $\mathbf{B}_i^N, i=\overline{1,3}$ є симетричними. Нескладно показати, що

$$\mathbf{B}_i^N = \int_{-1}^{1} f_i(\xi)\mathbf{P}(\xi)\mathbf{P}^T(\xi)d\xi\ ,\ N \geq 1,\ i=\overline{1,2}, \tag{52}$$

причому з огляду на те, що $-1 < k_i \frac{d}{2} < 1$, функції $f_i(\xi),\ i=\overline{1,2}$ є додатними на відрізку $[-1,1]$. Тобто матриці $\mathbf{B}_1^N, \mathbf{B}_2^N$ є матрицями Грама для функцій $P_i(\xi), i=\overline{0,M}$, а тому є додатно визначеними для всіх $N \geq 1$.

Легко бачити, що

$$\mathbf{s}^T\mathbf{B}_3^N\mathbf{s} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} f_3(\xi)\left(\partial_3\left(\mathbf{s}^T\mathbf{P}\left(\tfrac{2\alpha_3}{d}\right)\right)\right)^2 d\xi + f_4^N\left(\mathbf{s}^T\mathbf{P}(1)\right)^2,$$

де $f_3(\xi)>0$, $-1 \leq \xi \leq 1$, $f_4^N > 0$, $\forall N \geq 2$, а про знак f_4^1 ми нічого сказати не можемо. Тому при $N \geq 2$ матриця $\mathbf{B}_3^N$ є завжди додатно визначеною, а при $N=1$ матриця $\mathbf{B}_3^N$ є додатно визначеною за умовою теореми. Тоді

$$A^{M,N}(\mathbf{s},\mathbf{s}) \geq \mu_4\|\mathbf{s}\|_{1,D}^2,\ \forall s \in \widetilde{V}, \tag{53}$$

$$A^{M,N}(\mathbf{t},\mathbf{s}) \leq \mu_5\|\mathbf{t}\|_{1,D}\|\mathbf{s}\|_{1,D},\ \forall \mathbf{t},\mathbf{s} \in \widetilde{V}, \tag{54}$$

$$\mu_4 = \min_{i=1,3}\left(\left\|\lambda_{\min}\left(\mathbf{B}_i^N A_1 A_2\right)\right\|_{\infty,D}\right) > 0,\ \mu_5 = \max_{i=1,3}\left(\left\|\lambda_{\max}\left(\mathbf{B}_i^N A_1 A_2\right)\right\|_{\infty,D}\right) > 0$$

Теорема доведена.

__**6. Апріорна оцінка похибки апроксимації за товщиною прошарку.**__ Введемо позначення

$$\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_i^N = \gamma^{N+1}\mathbf{p}_i\ ,\ i=\overline{1,3}\ ,\ \mathbf{B}_i - \mathbf{B}_i^N = \left(\tfrac{d}{2}\right)^{N+1}\mathbf{H}_i\ ,$$

де $\mathbf{p}_i \in [L_2(D)]^{M+1}, i=1,2$, $\mathbf{p}_3 \in \left[H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)\right]^{M+1}$, $\mathbf{H}_i \in [L_2(D)]^{(M+1)\times(M+1)}$, $i=\overline{1,3}$,

$$\mu_6 = \left\|(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)A_1A_2\right\|_{0,D} + \left\|\mathbf{p}_3\right\|_{-\frac{1}{2},\partial D},\ \mu_7 = \left\|\left(\mathbf{f}_1^N + \mathbf{f}_2^N\right)A_1A_2\right\|_{0,D} + \left\|\mathbf{f}_3^N\right\|_{-\frac{1}{2},\partial D}$$

$$\mu_8 = \max_{i=1,3}\left(\left\|\lambda_{\max}(\mathbf{H}_i A_1 A_2)\right\|_{\infty,D}\right).$$

Теорема 5. *Нехай* $\mathbf{t},\mathbf{t}^N \in \widetilde{V}$ *є розв'язками задач (14) та (44) відповідно. Тоді справедлива наступна оцінка*

$$\left\|\mathbf{t} - \mathbf{t}^N\right\|_{1,D} \le \widetilde{C}_2\gamma^{N+1}, \widetilde{C}_2 > 0\,, \tag{55}$$

якщо $\gamma^{N+1}\dfrac{\mu_8}{\mu_4} < 1$.

Доведення. Нехай $\mathbf{t},\mathbf{t}^N \in \widetilde{V}$ є розв'язками задач (14) та (44) відповідно. За нерівністю трикутника

$$\left\|\mathbf{t} - \mathbf{t}^N\right\|_{1,D} \le \left\|\mathbf{t} - \widetilde{\mathbf{t}}\right\|_{1,D} + \left\|\widetilde{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^N\right\|_{1,D}, \tag{56}$$

де $\widetilde{\mathbf{t}} \in \widetilde{V}$ є розв'язком наступної варіаційної задачі:

Знайти $\widetilde{\mathbf{t}} \in \widetilde{V}$, що задовольняє рівняння

$$A^M\left(\widetilde{\mathbf{t}},\mathbf{s}\right) = L^{M,N}(\mathbf{s}),\ \forall \mathbf{s} \in \widetilde{V}, \tag{57}$$

Оцінимо спочатку перший доданок в (56). Тоді, використовуючи додатну визначеність білінійної форми $A^M(\cdot,\cdot)$ та неперервність лінійних форм $L^M(\cdot)$ та $L^{M,N}(\cdot)$, отримаємо

$$\begin{aligned}
\mu_1\left\|\mathbf{t} - \widetilde{\mathbf{t}}\right\|_{1,D}^2 &\le A^M\left(\mathbf{t} - \widetilde{\mathbf{t}}, \mathbf{t} - \widetilde{\mathbf{t}}\right) = L^M\left(\mathbf{t} - \widetilde{\mathbf{t}}\right) - L^{M,N}\left(\mathbf{t} - \widetilde{\mathbf{t}}\right)\\
&= \gamma^{N+1}\left(\int_D \left(\mathbf{t} - \widetilde{\mathbf{t}}\right)^T (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)A_1A_2\,d\alpha_1 d\alpha_2 + \int_{\partial D}\left(\mathbf{t} - \widetilde{\mathbf{t}}\right)^T \mathbf{p}_3\,d\Gamma\right)\\
&\le \gamma^{N+1}\mu_6\left\|\mathbf{t} - \widetilde{\mathbf{t}}\right\|_{1,D},
\end{aligned}$$

а отже

$$\left\|\mathbf{t} - \widetilde{\mathbf{t}}\right\|_{1,D} \le \gamma^{N+1}\frac{\mu_6}{\mu_1}. \tag{58}$$

Оцінимо другий доданок в (56). Білінійні форми $A^M(\cdot,\cdot)$ та $A^{M,N}(\cdot,\cdot)$ визначають неперервні оператори $B^M : \widetilde{V} \to \widetilde{V}$ та $B^{M,N} : \widetilde{V} \to \widetilde{V}$ відповідно:

$$A^{M,N}(\mathbf{t},\mathbf{s}) = \left(B^{M,N}\mathbf{t},\mathbf{s}\right)_{1,D},\ A^M(\mathbf{t},\mathbf{s}) = \left(B^M\mathbf{t},\mathbf{s}\right)_{1,D},\ \forall \mathbf{t},\mathbf{s} \in \widetilde{V},$$

З огляду на теорему про апроксимацію оберненого обмеженого оператора [3] випливає, що

$$\left\|\widetilde{\mathbf{t}}-\mathbf{t}^N\right\|_{1,D} \le \frac{\rho}{1-\rho}\left\|\left(B^{M,N}\right)^{-1}\right\|\mu_7, \tag{59}$$

якщо $\rho=\left\|\left(B^{M,N}\right)^{-1}\left(B^{M,N}-B^M\right)\right\|<1$. Оцінимо величину ρ. З додатної визначеності білінійної форми $A^{M,N}(\cdot,\cdot)$ випливає, що

$$\left\|\left(B^{M,N}\right)^{-1}\right\| \le \mu_4^{-1}. \tag{60}$$

$$\begin{aligned}\left|\left(\left(B^M-B^{M,N}\right)\mathbf{t},\mathbf{s}\right)_{1,D}\right| &= \left|A^M(\mathbf{t},\mathbf{s})-A^{M,N}(\mathbf{t},\mathbf{s})\right| = \\ &= \gamma^{N+1}\left|\int_D\left(\partial_1\mathbf{s}^T\mathbf{H}_1\partial_1\mathbf{t}+\partial_2\mathbf{s}^T\mathbf{H}_2\partial_2\mathbf{t}+\mathbf{s}^T\mathbf{H}_3\mathbf{t}\right)A_1A_2\,d\alpha_1 d\alpha_2\right| \\ &\le \gamma^{N+1}\mu_8\|\mathbf{t}\|_{1,D}\|\mathbf{s}\|_{1,D}.\end{aligned} \tag{61}$$

З огляду на (60), (61) маємо

$$\rho=\left\|\left(B^{M,N}\right)^{-1}\left(B^{M,N}-B^M\right)\right\| \le \left\|\left(B^{M,N}\right)^{-1}\right\|\left\|B^{M,N}-B^M\right\| \le \gamma^{N+1}\frac{\mu_8}{\mu_4},$$

та

$$\left\|\widetilde{\mathbf{t}}-\mathbf{t}^N\right\|_{1,D} \le \gamma^{N+1}\frac{\mu_7\mu_8}{(1-\rho)\mu_4^2}. \tag{62}$$

Остаточно, якщо $\rho<1$, то з (58), (62) отримуємо

$$\left\|\mathbf{t}-\mathbf{t}^N\right\|_{1,D} \le \gamma^{N+1}\left(\frac{\mu_6}{\mu_1}+\frac{\mu_7\mu_8}{(1-\rho)\mu_4^2}\right) \tag{63}$$

Теорема доведена.

7. <u>Дискретизація Гальоркіна.</u> Для побудови наближених розв'язків задачі (44) виберемо послідовність скінченно-елементних підпросторів $\left\{\widetilde{V}_h\right\}$ з простору $\widetilde{V}$ [9] таким чином, що

$$\begin{cases}\dim\widetilde{V}_h\to\infty \text{ при } h\to 0,\\ \bigcup\limits_{h>0}\widetilde{V}_h \text{ щільно вкладена в } \widetilde{V}.\end{cases} \tag{64}$$

Апроксимація Гальоркіна $\mathbf{t}_h^N$ з простору $\widetilde{V}_h$ розв'язку $\mathbf{t}^N\in\widetilde{V}$ задачі (44) визначається наступною варіаційною задачею.

Знайти $\mathbf{t}_h^N\in\widetilde{V}_h$, що задовольняє рівняння

$$A^{M,N}\left(\mathbf{t}_h^N,\mathbf{s}\right)=L^{M,N}(\mathbf{s}),\ \forall\mathbf{s}\in\widetilde{V}_h \tag{65}$$

Відомо [10], що

$$\left\|\mathbf{t}^N-\mathbf{t}_h^N\right\|_{1,D}\le\widetilde{C}_3\frac{h^{\min(p,2s)}}{p^{2s-1}}\left|\mathbf{t}^N\right|_{2s,D}. \tag{66}$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теорем 1-5. Тоді справедлива наступна апріорна оцінка похибки наближеного розв'язку* $T_h^{M,N}=\left(\mathbf{t}_h^N\right)^T\mathbf{P}$ *ієрархічної моделі:*

$$\left\|T-T_h^{M,N}\right\|_A\le\widetilde{C}_1\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^{2s-1}}{\left(M(M+1)\right)^{s-\frac{1}{2}}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left\|L_i^sT\right\|^2_{0,D\times\left[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right]}}$$

$$+\mu_2\widetilde{C}_2\gamma^{N+1}+\mu_2\widetilde{C}_3\frac{h^{\min(p,2s)}}{p^{2s-1}}\left|\mathbf{t}^N\right|_{2s,D}. \tag{67}$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що

$$\|T\|_A^2=A(T,T)=A^M(\mathbf{t},\mathbf{t})\le\mu_2\|\mathbf{t}\|_{1,D}^2,\ \forall T=\mathbf{t}^T\mathbf{P}\in V^M. \tag{68}$$

За нерівністю трикутника

$$\left\|T-T_h^{M,N}\right\|_A\le\left\|T-T^M\right\|_A+\left\|T^M-T^{M,N}\right\|_A+\left\|T^{M,N}-T_h^{M,N}\right\|_A, \tag{69}$$

де $T\in H^{2s}\left(D\times\left[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right]\right)$ є розв'язком задачі (10), $T^M=\mathbf{t}^T\mathbf{P}\in V^M$ відповідає розв'язку задачі (14), $T^{M,N}=\left(\mathbf{t}^N\right)^T\mathbf{P}\in V^M$ відповідає розв'язку задачі (44), а $T_h^{M,N}=\left(\mathbf{t}_h^N\right)^T\mathbf{P}\in V^M$ відповідає розв'язку задачі (65). Твердження теореми випливає з (66), (67) та результатів теорем 3, 5. Теорему доведено.

Література.

1. Кит Г.С., Кривцун М.Т. Плоские задачи термоупругости для тела с трещинами. К.: Наук. думка. 1983. 273с. 2. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. II. М.: Наука. 1991. 544с. 3. Остудін Б.А., Шинкаренко Г.А. Методи функціонального аналізу в обчислювальній математиці. Функціональні простори. К:. НМК ВО, 1992. 152с. 4. Пелех Б.П. Обобщенная теория оболочек. Л.: Вища школа, 1978. 159с. 5. Савула Я.Г., Кревс В.В. Про застосування методу декомпозиції області до задачі теплопровідності для тіла з тонким покриттям. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1996. Вип. 44. С.3-10. 6. Савула Я.Г. Математична модель теплоперенесення через тривимірне тіло з тонким плоским покриттям. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип. 42. С.3-7. 7. Савула Я.Г., Сипа І.М., Струтинський І.В. Математичні моделі теплопровідності для тіл з тонкими покриттями і включеннями. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992. Вип.37. С.39-45. 8. Флейшман Н.П. Математичні моделі теплового спряження середовищ із тонкими чужорідними прошарками

або покриттями. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип.39. С.30-34. 9. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К.: НМК ВО, 1991. 87с. 10. Brenner S.C., Scott L.R. The mathematical theory of finite element methods, Springer-Verlag New-York, Inc. 1994. 350p. 11. Rektorys K. Variational methods in mathematics, science and engineering. Prague. 1980. 589p. 12. Wolfram S. Mathematica: A system for doing mathematics by computer. Second Edition. Addison-Wesley. 1991. 500p.

Krevs V.V., Savula Y.G.

On a hierarchical model of heat conduction of a thin layer

The problem of mathematical modelling of heat conduction in thin media was considered by many researchers [1,5-8]. In this paper we propose a general approach to construction of dimentionally reduced mathematical model of heat conduction in thin media. A general form of the mathematical model is derived, which is independent of the concrete temperature distribution by thickness of the thin layer. Symmetry and positive definiteness of the obtained bilinear forms are investigated. An a priori error estimate is obtained.

Стаття надійшла до редколегії 1.12.1998

УДК 539.3

М.В. Марчук, М.М. Хом'як

Варіаційний підхід в задачі про неідеальний міжшаровий контакт

Модель шаруватого середовища часто використовується при розрахунках сучасних, в тому числі композиційних матеріалів. Найбільш адекватний підхід вимагає дискретного розгляду шарів і врахування специфіки міжшарової взаємодії, що допускає наявність зон типу розшарувань, проковзування тощо. Дана робота стосується деяких аспектів варіаційної постановки статичної задачі як основи змішаного МСЕ [12] в переміщеннях шарів і контактних напруженнях, оскільки відомо, що точність визначення останніх має вирішальний вплив на оцінку крайових ефектів і процесів міжшарового руйнування [4,10]. Розглядається функціонал Лагранжа для шаруватої структури в рамках моделі стрибка і зв'язок з постановкою у варіаційних нерівностях, що дозволяє із загальних позицій досліджувати як ідеальний, так і неідеальний контакт. Приведено приклад розрахунку.