

або покриттями. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип.39. С.30-34. 9. Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К.: НМК ВО, 1991. 87с. 10. Brenner S.C., Scott L.R. The mathematical theory of finite element methods, Springer-Verlag New-York, Inc. 1994. 350p. 11. Rektorys K. Variational methods in mathematics, science and engineering. Prague. 1980. 589p. 12. Wolfram S. Mathematica: A system for doing mathematics by computer. Second Edition. Addison-Wesley. 1991. 500p.

Kreys V.V., Savula Y.G.

On a hierarchical model of heat conduction of a thin layer

The problem of mathematical modelling of heat conduction in thin media was considered by many researchers [1,5-8]. In this paper we propose a general approach to construction of dimensionally reduced mathematical model of heat conduction in thin media. A general form of the mathematical model is derived, which is independent of the concrete temperature distribution by thickness of the thin layer. Symmetry and positive definiteness of the obtained bilinear forms are investigated. An a priori error estimate is obtained.

Стаття надійшла до редколегії 1.12.1998

УДК 539.3

М.В. Марчук, М.М. Хом'як

Варіаційний підхід в задачі про неідеальний міжшаровий контакт

Модель шаруватого середовища часто використовується при розрахунках сучасних, в тому числі композиційних матеріалів. Найбільш адекватний підхід вимагає дискретного розгляду шарів і врахування специфіки міжшарової взаємодії, що допускає наявність зон типу розшарувань, проковзування тощо. Дана робота стосується деяких аспектів варіаційної постановки статичної задачі як основи змішаного МСЕ [12] в переміщеннях шарів і контактних напруженнях, оскільки відомо, що точність визначення останніх має вирішальний вплив на оцінку крайових ефектів і процесів міжшарового руйнування [4,10]. Розглядається функціонал Лагранжа для шаруватої структури в рамках моделі стрибка і зв'язок з постановкою у варіаційних нерівностях, що дозволяє із загальних позицій досліджувати як ідеальний, так і неідеальний контакт. Приведено приклад розрахунку.

1. Основні позначення та співвідношення. Розглянемо структуру, що складається з N тонких шарів постійної товщини $2h = 2 \sum_{j=1}^N h^{(j)}$ і займає обмежену область $\bigcup_{j=1}^N \Omega^{(j)} = \Omega \subset R^3$, причому область шару $\Omega^{(j)} = S^{(j)} \times [-h^{(j)}; +h^{(j)}]$ віднесена до криволінійної ортогональної системи координат $(\alpha^{(j)}, \beta^{(j)})$ на серединній поверхні $S^{(j)}$, а товщина $z^{(j)} \in [-h^{(j)}; +h^{(j)}]$ відраховується вздовж нормалі до $S^{(j)}$, додатній напрям якої визначає також порядок нумерації шарів. Область шару має неперервну за Ліпшицем границю $\partial\Omega^{(j)} = S_+^{(j)} \cup S_-^{(j)} \cup L^{(j)}$, що складена з лицьових поверхонь $S_{\pm}^{(j)} (z = \pm h^{(j)})$ і лінійчатої поверхні на торці $L^{(j)} = \Gamma^{(j)} \times [-h^{(j)}; +h^{(j)}]$, утвореної нормаллю, біжучою вздовж контура $\Gamma^{(j)}$ серединної поверхні (теж неперервного за Ліпшицем). У рамках моделі стрибка міжшаровий контакт моделюємо фізичною поверхнею нульової товщини $S^{(j,j+1)} = S_+^{(j)} \cap S_-^{(j+1)}$, причому в загальному випадку $S^{(j,j+1)} \subseteq S_+^{(j)}$, $S^{(j,j+1)} \subseteq S_-^{(j+1)}$.

Напружено-деформований стан (НДС) окремого шару описується вектором компонент переміщень $u^{(j)} = (u_{\alpha}, u_{\beta}, u_z)^T$, деформації $\varepsilon^{(j)} = (\varepsilon_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{\beta\beta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha z}, \varepsilon_{\beta z})^T$ і напружень $\sigma^{(j)} = (\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha z}, \sigma_{\beta z})^T$ в області $\Omega^{(j)}$, що зумовлені дією силових навантажень $\sigma_{\pm}^{(j)}$ на лицьових поверхнях $S_{\pm}^{(j)}$ (в їх ролі можуть бути зовнішні або контактні напруження)

$$\sigma^{(j)} \Big|_{z=\pm h} = (\sigma_{zz}^{(j)}, \sigma_{\alpha z}^{(j)}, \sigma_{\beta z}^{(j)})^T = \sigma_{\pm} \text{ на } S_{\pm}^{(j)} \quad (1.1)$$

при таких головних і природних граничних умовах на торцях $L^{(j)}$:

$$\mathbf{G}_u^{(j)} u^{(j)} = U_0^{(j)} \text{ на } \Gamma_u^{(j)} \times [-h^{(j)}, +h^{(j)}], \quad (1.2)$$

$$\mathbf{G}_{\sigma}^{(j)} \sigma^{(j)} = N_0^{(j)} \text{ на } \Gamma_{\sigma}^{(j)} \times [-h^{(j)}, +h^{(j)}], \Gamma^{(j)} = \Gamma_u^{(j)} \cup \Gamma_{\sigma}^{(j)}. \quad (1.3)$$

Крім умов (1.1)–(1.3), крайова задача лінійної теорії пружності для шару містить (однорідну–у випадку відсутності об'ємних навантажень) систему диференціальних рівнянь рівноваги “в переміщеннях”, 2-го порядку кожне,

$$A_u^{(j)} u^{(j)} = 0 \text{ в } \Omega^{(j)}. \quad (1.4)$$

Геометричні співвідношення й закон пружності запишемо у виді

$$\varepsilon^{(j)} = C^{(j)} u^{(j)}, \sigma^{(j)} = D^{(j)} \varepsilon^{(j)} \quad (1.5)$$

де $C^{(j)}$ – матриця диференціальних операторів не вище першого порядку, а матриця пружних констант $D^{(j)}$ (обмежимося однорідним або кусково-однорідним матеріалом) залежить від його анізотропії, при цьому для реальних матеріалів виконуються умови симетрії та еліптичності

$$D^{(j)} = \{d_{ik}^{(j)}\}_{i,k=1}^3, d_{ik}^{(j)} = d_{ki}^{(j)}, d_{ik}^{(j)} \xi_i \xi_k \geq c_1 \xi_i \xi_i, c_1 > 0, \forall \xi_i. \quad (1.6)$$

Функціонал повної енергії задачі (1.1)–(1.5) запишемо так:

$$J(u^{(j)}) = a^{(j)}(u^{(j)}, u^{(j)}) - 2(f^{(j)}, u^{(j)}), \quad (1.7)$$

$$(f^{(j)}, u^{(j)}) = \iint_{S_+^{(j)}} \sigma_+^{(j)} u_+^{(j)} dS + \iint_{S_-^{(j)}} \sigma_-^{(j)} u_-^{(j)} dS + (f_\Gamma^{(j)}, u^{(j)}). \quad (1.8)$$

де $(f_\Gamma^{(j)}, u^{(j)}) = \int_{-h^{(j)}}^{+h^{(j)}} dz^{(j)} \int_{\Gamma_\sigma^{(j)}} N_0^{(j)} u^{(j)} d\Gamma_\sigma^{(j)}$ – вплив навантаження на торцях,

$a^{(j)}(u^{(j)}, u^{(j)}) = 1/2 \int \{\varepsilon^{(j)}\}^T D^{(j)} \varepsilon^{(j)} d\Omega^{(j)}$ – квадратична форма енергії деформації, яка є неперервною та симетричною, крім того,

$$a^{(j)}(v^{(j)}, v^{(j)}) \geq \gamma_j^2 \|v^{(j)}\|^2, \gamma_j^2 > 0, \forall v^{(j)} \in \ker V^{(j)}. \quad (1.9)$$

Тут норма розглядається на просторі Соболева $V^{(j)} = (H^1(\Omega^{(j)}))^3$, $H^1(\Omega^{(j)}) = W_2^1(\Omega^{(j)})$, що вміщає підпростір $\ker V^{(j)} = V^{(j)} \setminus Q$, де Q – фактор-простір жорстких переміщень тіла з нульовою енергією. Нерівність (1.9) для криволінійного шару в припущенні достатньої гладкості функцій, які описують його геометрію, можна довести на основі нерівності типу нерівності Корна і є наслідком коерцитивності системи операторів, ототожнених з компонентами деформацій $\varepsilon^{(j)}$, відносно простору інтегрованих з квадратом функцій $U^{(j)}(\Omega^{(j)}) = (L_2(\Omega^{(j)}))^3$ [5, 7]. Щодо лінійної частини прийнято стандартне припущення

$$\sigma_\pm^{(j)} \in (L_2(S_\pm^{(j)}))^3, N_0^{(j)} \in (L_2(\Gamma_\sigma^{(j)} \times [-h^{(j)}; h^{(j)}]))^3.$$

Уточнимо підпростір $\ker V^{(j)}$ стосовно задачі про міжшаровий контакт. Як стверджує перша теорема про сліди [5], на границі області $\partial\Omega^{(j)}$ можна визначити неперервне лінійне відображення (оператор сліду)

$$u^{(j)} \in V(\Omega^{(j)}) \rightarrow \text{tr } u^{(j)} \in (L^2(\partial\Omega^{(j)}))^3. \quad (1.10)$$

З використанням поняття сліду введемо множину кінематично допустимих вектор-функцій (к.д.ф.) для функціонала (1.7)

$$K^{(j)} = \{u^{(j)} \in H^1(\Omega^{(j)}), \text{tr} u^{(j)} = (G_u^{(j)})^{-1} U_0^{(j)} \in \Gamma_u^{(j)} \times [-h^{(j)}; h^{(j)}]\}, \quad (1.11)$$

яка буде підпростором у випадку однорідних умов (1.2)

$$\ker V^{(j)} = \{u^{(j)} \in H^1(\Omega^{(j)}), \text{tr} u^{(j)} = 0 \in \Gamma_u^{(j)} \times [-h^{(j)}; h^{(j)}]\}. \quad (1.12)$$

Відомо, що розв'язок задачі мінімізації функціонала (1.7) на к.д.ф. виду (1.11) або (1.12) існує і єдиний [5]. Оскільки підпростір володіє властивістю лінійності, то для реалізації чисельних методів мінімізації, наприклад, на базі МСЕ, більш зручним є к.д.ф. виду (1.12). Розв'язок задачі з неоднорідними умовами (1.2) легко будується як сума деякого $u_0^{(j)} \in V^{(j)}$, що задовільняє (1.2) та розв'язку задачі мінімізації функціонала (1.7) на $\ker V^{(j)}$ з модифікованою лінійною частиною

$$(f^{*(j)}, u^{(j)}) = (f^{(j)}, u^{(j)} + u_0^{(j)}) - a^{(j)}(u^{(j)}, u_0^{(j)}). \quad (1.13)$$

Зауважимо, що для контактних задач важливе значення також мають граничні умови в переміщеннях на поверхнях контакту, для яких підпростір $\ker V^{(j)}$ вводиться аналогічно і справедлива теорема про існування і єдиність.

Нарешті, умови неідеального міжшарового контакту запишемо у вигляді

$$u_-^{(j+1)} - u_+^{(j)} = \Phi^{(j,j+1)}, \quad (1.14)$$

$$\sigma_+^{(j)} = -\sigma_-^{(j+1)} = \sigma^{(j,j+1)}, \quad (1.15)$$

$$\sigma^{(j,j+1)} \Phi^{(j,j+1)} \geq 0 \text{ на } S^{(j,j+1)}, \quad (1.16)$$

де $u_{\pm}^{(j)}$ – переміщення лицьових поверхонь шарів (в сенсі визначення сліду (1.10)), $\Phi^{(j,j+1)}$ – вектор стрибка переміщень при переході через контактну поверхню, $\sigma^{(j,j+1)}$ – вектор контактних напружень. Математична модель пошкодження міжшарового контакту, як правило, записується у вигляді обмежень (типу нерівностей) на допустимі значення для $\Phi^{(j,j+1)}$ і $\sigma^{(j,j+1)}$, що утворюють випуклу множину. Наприклад, нерівність (1.16) постулює дисипативний характер міжшарових пошкоджень. Стрибок $\Phi^{(j,j+1)} \neq 0$, в загальному, невідомий (визначається в процесі розв'язування) і характеризує зони неідеального контакту.

В силу зробленого вище зауваження, для пари шарів можна гарантувати існування та єдиність розв'язку як тільки площа міжшарового контакту $S^{(j,j+1)}$ має додатню міру і виключені переміщення як жорсткого цілого хоча б для одного з шарів [6]. Застосовуючи такий підхід рекурсивно, поширюємо результат на структуру в цілому при заданих головних граничних умовах на торцях тільки ок-

ремних шарів, або хоча б одного з них. При цьому умови на окремі компоненти вектора переміщень можуть бути задані на різних шарах.

2.Варіаційна постановка і принцип двоїстості. Для структури в цілому, яка складається з N шарів введемо простори $V = V^{(1)}(\Omega^{(1)}) \otimes \dots \otimes V^{(N)}(\Omega^{(N)})$ і $U = U(S^{(1,2)}) \otimes \dots \otimes U(S^{(N-1,N)})$, що є прямим добутком відповідних просторів для окремих шарів і контактних поверхонь, і об'єднані вектори $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(N)})^T \in V$, $\sigma = (\sigma^{(1,2)}, \dots, \sigma^{(N-1,N)})^T \in U$. Визначимо множину к.д.ф. (переміщень)

$$K = \left\{ u \in V \mid u^{(j)} \in K^{(j)}, \Phi^{(j,j+1)} = u_-^{(j+1)} - u_+^{(j)}, j = 1, \dots, N-1 \right\} \quad (2.1)$$

Очевидно, що K задає множину функцій зі скінченними розривами на контактних поверхнях (майже всюди). З теореми про кускове склеювання [2] випливає, що існує єдина узагальнена функція переміщень $u \in K$, звуження якої на кожному з шарів співпадає з $u^{(j)} \in K^{(j)}$. Зауважимо, що опис множини K носить формальний характер (в припущенні фіксованих стрибків переміщень), оскільки стрибки $\Phi^{(j,j+1)}$ наперед невідомі і визначаються разом з переміщеннями $u_{\pm}^{(j)}$ і контактними напруженнями $\sigma^{(j,j+1)}$ в залежності від моделі контакту (наприклад, проковзування або розшарування). У випадку ідеального контакту, $\Phi^{(j,j+1)} = 0$, отримуємо

$$K_0 = \left\{ u \in V \mid u_-^{(j+1)} = u_+^{(j)}, j = 1, \dots, N-1 \right\} \quad (2.2)$$

Відповідно до можливості описаної вище заміни $u^{(j)} \in K^{(j)}$ на $u^{(j)} \in \ker V^{(j)}$ з врахуванням модифікації (1.13), можна припускати, що у визначеннях (2.1) і (2.2) маємо $u^{(j)} \in \ker V^{(j)}$. Тоді важливо відмітити, що $\ker V = K_0$ – підпростір V , і тому він є більш “зручним” для застосування МСЕ, ніж K . Таким чином, показано базову роль задачі про ідеальний контакт.

Енергія N -шарової структури формально може бути записана як сума складових виду (1.7):

$$J(u) = \sum_{j=1}^N J(u^{(j)}) = \sum_{j=1}^N \left\{ a^{(j)}(u^{(j)}, u^{(j)}) - (f_\Gamma^{(j)}, u^{(j)}) \right\} - \sum_{j=1}^N \left\{ (\sigma_+^{(j)}, u_+^{(j)}) + (\sigma_-^{(j)}, u_-^{(j)}) \right\} \quad (2.3)$$

де $(\sigma_{\pm}^{(j)}, u_{\pm}^{(j)}) = \iint_{S_{\pm}^{(j)}} (\sigma_{\pm}^{(j)})^T u_{\pm}^{(j)} dS$ – скалярний добуток в просторі

$U(S_{\pm}^{(j)}) = (L_2(S_{\pm}^{(j)}))^3$. При виконанні умов міжшарового контакту (1.15) для дійсних переміщень $u \in K$ маємо

$$J(u) = \inf J(v), \forall v \in K, \quad (2.4)$$

$$J(u) = \sum_{j=1}^N \{a^{(j)}(u^{(j)}, u^{(j)}) - (f_{\Gamma}^{(j)}, u^{(j)})\} - \sum_{j=1}^{N-1} (\sigma^{(j,j+1)}, u_+^{(j+1)} - u_-^{(j)}). \quad (2.5)$$

Другу суму в (2.5) можемо опустити, оскільки вона не впливає на мінімум функціонала $J(u)$ для $u \in K$ ($\Phi^{(j,j+1)}$ – вважаються фіксовані, а $\sigma^{(j,j+1)}$ функціонально незалежні від $u^{(j)}$). З іншого боку, $J(u)$ – квадратичний випуклий функціонал відносно переміщень $u^{(j)}$, і задача мінімізації (2.4) еквівалентна системі варіаційних нерівностей (в загальному, переміщення шару обмежені переміщеннями іншого шару, інакше матимемо рівність) [5,6,11]

$$a^{(j)}(v^{(j)}, v^{(j)} - u^{(j)}) \geq (f_{\Gamma}^{(j)}, v^{(j)} - u^{(j)}) \forall v^{(j)} \in \ker V^{(j)}, j = 1, \dots, N, \quad (2.6)$$

що по вигляду співпадає із задачею про ідеальний контакт. Трудність задачі (2.4) або (2.6) полягає в задоволенні додаткових обмежень на переміщення u , що накладають умови неідеального міжшарового контакту, тобто належності до множини K , $u \in K$.

Використовуючи техніку множників Лагранжа, введемо функціонал

$$J^L(\sigma, u) = \sum_{j=1}^N \left\{ a^{(j)}(u^{(j)}, u^{(j)}) - \int_{-h^{(j)}}^{+h^{(j)}} dz^{(j)} \int_{\Gamma_0^{(j)}} N_0^{(j)} u^{(j)} d\Gamma_{\sigma}^{(j)} \right\} - \sum_{j=1}^{N-1} (\sigma^{(j,j+1)}, u_+^{(j+1)} - u_-^{(j)} + \Phi^{(j,j+1)}) (u, \sigma) \in V \times U \quad (2.7)$$

Більш точно, функціонал (2.7) розглядаємо на підпросторі $\ker V = K_0$, тобто при фіксованих $\Phi^{(j,j+1)}$ можна вважати, що шукані переміщення $u \in \ker V$ задовільняють умовам ідеального контакту, а вплив пошкоджень враховує додатковий вклад в лінійну частину функціонала виду як у другій сумі в (2.5).

При фіксованих σ переміщення $u \in K_0 \subset V$, такі, що звуження u на області окремого шару відповідають дійсним переміщенням – розв'язку задачі (2.4) (але задовільняють інші умови контакту), є також розв'язком задачі

$$\inf J^L(v, \sigma) = J^L(u, \sigma) = J(u), \forall v \in K_0 \quad (2.8)$$

Тому задачі (2.4) і (2.8) еквівалентні в тому сенсі, що дають один і той же розв'язок для переміщень окремих шарів. Порівнюючи (2.7) і (2.3),

легко бачити, що формально введені при побудові J^L множники Лагранжа для умов контакту справді мають фізичний зміст контактних напружень згідно побудови функціонала J . Перевага J^L над J зв'язана з підпростором K_0 .

Теорема (двоїстості). Розв'язок (2.8)–дійсні переміщення u і контактні напруження σ – є сідловою точкою функціонала (2.7):

$$J^L(u, s) \leq J^L(u, \sigma) \leq J^L(v, \sigma) \forall v \in K_0 \subset V, \forall s \in U, \quad (2.9)$$

і навпаки, якщо сідлова точка J^L досягається на $(u, \sigma) \in K_0 \otimes U$,

$$\sup_{s \in U} \inf_{v \in K_0} J^L(v, s) = \inf_{v \in K_0} \sup_{s \in U} J^L(v, s) = J(u, \sigma) \quad (2.10)$$

то (u, σ) відповідають дійсному НДС окремих шарів структури

Схема доведення аналогічна як для функціонала з обмеженнями [5]. Для спрощення записів розглянемо характерну 2-шарову структуру. На основі (2.8) при довільних фіксованих σ випливає права з нерівностей (2.9). Оскільки $\sup(-s, \Phi^{(1,2)})_U = 0$ при $u \in K_0$, $\Phi^{(1,2)} = 0$, яким відповідають дійсні напруження $s = \sigma^{(1,2)}$ або $s = 0, \Phi^{(1,2)} \neq 0$ (розшарування, контакту немає), то задача (2.8) еквівалентна

$$\inf_{v \in K_0} \sup_{s \in U} J^L(v, s) = J^L(u, \sigma),$$

Враховуючи $\sup \inf \leq \inf \sup$, звідси отримуємо

$$\sup_{s \in U} \inf_{v \in K_0} J^L(v, s) \leq J^L(u, \sigma), \quad (2.11)$$

тобто виконується ліва з нерівностей (2.9), а отже, й умови сідлової точки для (σ, u) . Лишилося показати, що в (2.11) насправді має місце рівність. Оскільки $\inf_{x \in X} J(x) \leq J(x_0), x_0 \in X$, то

$$\inf_{v \in K_0} J^L(v, s) = J^{*L}(s) \leq \inf_{v \in K_0} J^L(v, \sigma) = J^L(u, \sigma),$$

тобто

$$\sup J^{*L}(s) \leq J^L(u, \sigma), s \in U \quad (2.12)$$

З іншого боку, обчислимо спочатку внутрішній $\inf$. Запишемо:

$$J^L(v, s) = J_1^L(v) + J_2^L(s, v),$$

$$\text{де} \quad J_1^L(v) = \sum_{j=1}^2 \{a^{(j)}(v^{(j)}, v^{(j)}) - 2(f_\Gamma^{(j)}, v^{(j)})\} - (\sigma_-^{(1)}, v_-^{(1)})_U - (\sigma_+^{(2)}, v_+^{(2)})_U,$$

$$J_2^L(s, v) = -(s, v_+^{(1)} - v_-^{(2)} + \Phi^{(1,2)})_U. \text{ Для першого функціонала}$$

$$\inf_{v \in K_0} J_1^L(v) = J_1^L(u) - (\sigma, u_+^{(1)} - u_-^{(2)}) = J_1^L(u)$$

при ідеальному контакті $u \in K_0$. Тоді $J_2^L(s, v) = -(s, \Phi^{(1,2)})$ у випадку $v = u \in K_0$, і видно, що $\inf_{s \in U} J_2^L(s, v) = -\infty$. Але в сумі отримуємо

$$\begin{aligned} \inf_{v \in K_0} J_1^L(v) + \inf_{s \in U} J_2^L(s, v) &= J_1^L(u) - (\sigma, u_+^{(1)} - u_-^{(2)}) - (s, \Phi) = \\ &= \begin{cases} J_1^L(u) - (\sigma, u_+^{(1)} - u_-^{(2)} + \Phi) = J^L(\sigma, u), s = \sigma, \\ -\infty, s \neq \sigma. \end{cases} \end{aligned}$$

Тому $\sup_{s \in U} \inf_{v \in K_0} J^L(s, v) \geq J^L(u, \sigma)$, що разом з (2.12) завершує доведення теореми.

3. Особливості $\{m, n\}$ -апроксимації для тонких шарів. Розкладаючи всі параметри НДС в ряди по поліномах Лежандра від координати, зв'язаної з товщиною, отримують двовірні співвідношення уточненої теорії шару (в порівнянні із застосуванням класичної теорії оболонок). Перевага $\{m, n\}$ -апроксимації [9] – в можливості точного задоволення умов у напруженнях на лицьових поверхнях $z^{(j)} / h^{(j)} = \pm 1$, що важливо для контактних задач. Вибір конкретних m і n визначається ефектами деформування, характерними для шару, наприклад, $m=1$ дозволяє враховувати зсуви, а $n=0, 1, 2$ – відповідно не враховувати чи враховувати деформації стиснення. Таким чином, $\{1, 0\}$ -апроксимація узагальнює теорію оболонок, що базуються на зсувній моделі С.П.Тимошенка, а $\{1, 2\}$ -апроксимація – додатково забезпечує квадратичний закон розподілу прогинів і кубічний розподіл напружень σ_{zz} по товщині шару.

Постановка крайової задачі містить систему диференціальних рівнянь (2-го порядку кожне) рівноваги шарів “в переміщеннях”

$$L_u^{(j)} u^{(j)} - \tilde{D}_-^{(j)} \sigma_-^{(j)} + \tilde{D}_+^{(j)} \sigma_+^{(j)} = 0 \text{ на } S^{(j)} \quad (3.1)$$

з відповідними аналогами граничних умов (1.2)-(1.3) та умов контакту (1.14)-(1.15) або навантажень на зовнішніх лицьових поверхнях шарів.

Переміщення на поверхнях $S_{\pm}^{(j)}$ матимуть вид [11]

$$u_{\pm}^{(j)} = B_{\pm}^{(j)} u^{(j)} + C_1^{\pm(j)} \sigma^{(j-1, j)} + C_2^{\pm(j)} \sigma^{(j, j+1)}. \quad (3.2)$$

де $B_{\pm}^{(j)}$ – диференціальні оператори не вище першого порядку, $C_{1,2}^{\pm(j)}$ – діагональні матриці констант, що залежать від модулів пружності і товщини шару. Приймаючи (3.2) за визначення сліду переміщень

$u^{(j)} \in (W_2^1(S^{(j)}))^{k_{(m,n)}}$ на лицьових поверхнях (більш точно, тут і далі $u^{(j)}$ – це $k_{(m,n)}$ компонентів розкладу в ряди по поліномах Лежандра), аналогічно (1.10) можна стверджувати, що $u_{\pm}^{(j)} \in (L_2(S_{\pm}^{(j)}))^3$. В рамках $\{m,n\}$ -апроксимації функціонал (2.7) набуде виду [11]

$$\begin{aligned} J_{(m,n)}^L = & \sum_{j=1}^N (A_j u^{(j)}, u^{(j)})_I - \sum_{j=1}^N (u^{(j)}, \tilde{D}_+^{(j)} \sigma^{(j,j+1)})_I + \sum_{j=1}^N (u^{(j+1)}, \tilde{D}_-^{(j+1)} \sigma^{(j,j+1)})_I + \\ & + \sum_{j=1}^N (\sigma^{(j,j+1)}, B_-^{(j+1)} u^{(j+1)})_{II} - \sum_{j=1}^N (\sigma^{(j,j+1)}, B_+^{(j)} u^{(j)})_{II} - \\ & - \sum_{j=2}^{N-1} (\sigma^{(j,j+1)}, C_-^{(j,j+1)} \sigma^{(j-1,j)})_{II} - \sum_{j=1}^{N-1} (\sigma^{(j,j+1)}, C_+^{(j,j+1)} \sigma^{(j,j+1)})_{II} \\ & - \sum_{j=2}^{N-1} (\sigma^{(j-1,j+1)}, C_+^{(j,j+1)} \sigma^{(j,j+1)})_{II} - l(u) \end{aligned} \quad (3.3)$$

де $(\cdot, \cdot)$ – визначає інтегрування по поверхні, нижній індекс “I” відноситься до відповідної серединної поверхні шару, а індекс “II” – до контактної поверхні; $l(u)$ – лінійна частина, що враховує навантаження на торцях. У випадку тонких шарів різницею між інтегруванням типу I і II по сусідніх поверхнях можна знехтувати. Враховуючи це, для $\{m,n\}$ -апроксимації оператори типу D і B , а також C симетричні:

$$\begin{aligned} [\tilde{D}_-^{(j+1)}]^T &= B_-^{(j+1)}, [\tilde{D}_+^{(j)}]^T = B_+^{(j)}, j = 1, \dots, N, \\ (C_1^{+(j)} = C_-^{(j,j+1)}) &= (C_2^{-(j+1)} = C_+^{(j-1,j)}), j = 1, \dots, N-1, \\ „_{2}^{(j,j+1)} &= „_{1}^{+(j)} - „_{1}^{-(j+1)}, j = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (3.4)$$

де $C^{(j,j+1)}$ – симетрична (і навіть діагональна) матриця з усіма додатніми коефіцієнтами на діагоналі, що є особливістю моделей шару в рамках $\{m,n\}$ -апроксимації [11]. Для конкретних $\{m,n\}$ -апроксимацій властивість додатньої визначеності квадратичної форми енергії деформації шару $a^{(j)}(u^{(j)}, u^{(j)}) = (A_j u^{(j)}, u^{(j)})$ можна довести як і в уточнених теоріях оболонок і пластин [1,7,8]. В припущенні, що умови (1.9) виконані і слід визначений згідно (3.2) для шаруватої структури в рамках $\{m,n\}$ -апроксимації справедливі результати, аналогічні як в пп. 1-2 (існування та єдиність розв'язку, теорема двоїстості). В цьому сенсі можна говорити про еквівалентність просторової задачі та її $\{m,n\}$ -апроксимації, а остання в обчислювальному аспекті має і ту перевагу, що матриці типу C ненульові.

В блочному вигляді функціонал (3.3) можна представити як

$$J_{(n,n)}^L(u, \sigma) = \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & \tilde{D} \\ \tilde{D}^T & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} f_A \\ f_C \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

що дозволяє записати систему варіаційних нерівностей:

$$\begin{aligned} a(u, v - u) + (\tilde{D}\sigma, v - u) &\geq (f_A, v - u) \quad \forall v \in K_0, \\ (\tilde{D}^T u, \sigma - s) - (C\sigma, \sigma - s) &\geq (f_C, \sigma - s) \quad \forall s \in \Lambda \subset U, \end{aligned} \quad (3.6)$$

Відмітимо симетричність даної постановки, яка виявляється в тому, що кожен з функціоналів $J_{(m,n)}^L(u) = J_{(m,n)}^L(u, \sigma_{fix})$ і $J_{(m,n)}^L(\sigma) = -J_{(m,n)}^L(u_{fix}, \sigma)$ є квадратичним і випуклим. Випукла множина Λ визначає нелінійний характер міжшарової взаємодії, наприклад, для зон пластичного проковзування

$$\Lambda = \{\sigma | F(\sigma) \leq 0\} \quad (3.7)$$

де $F(\sigma) = 0$ – випукла функція текучості. Загальну теорію чисельного дослідження задачі на екстремум функціонала (3.5) можна знайти в [3].

4. Приклад розрахунку. При дискретному розгляді шарів в рамках $\{m, n\}$ -апроксимації дослідимо згин навантаженням $\sigma_{zz}^+ = \text{const}$ шарнірно-опертої тришарової пластини ($l = 10$ см – довжина і $2h = 2$ см – сумарна товщина) в умовах плоскої деформації з врахуванням прикрайових зон пластичного проковзування на міжшарових поверхнях (рис.1). Матеріал шарів для простоти вважався ізотропним з модулем Юнга $E = 10^4$ МПа і коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,3$.

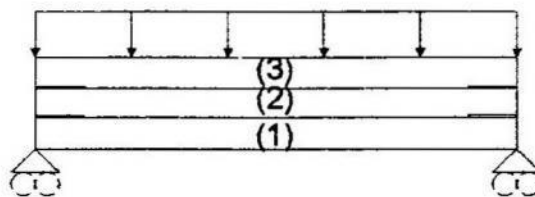


Рис. 1. Схема навантаження тришарової пластини.

Чисельні результати (рис.2) отримані для ідентичних шарів при $h^{(j)} = h/N, h/l = 0,1$ і параметра навантаження $\sigma_{zz}^+/E = -0,01$. Зауважимо, що в даній задачі дотичні контактні напруження між першим і другим, а також між другим і третім шаром практично співпадають, як і для ідеального контакту. Внаслідок “зрізання” недопустимих дотичних напружень зона пластичності “зростає” майже вдвічі. При цьому нормальні міжшарові напруження в зоні пластичного проковзування між

другим і третім шаром зазнають розгрузки, але незначно зростають перед границею зони. Навпаки, для контактної поверхні між першим і другим шаром нормальні напруження зростають в пластичній зоні, з розгрузкою перед зоною. Розподіл стрибків дотичних переміщень в зоні пластичності—лінійний, крім невеликих прикорайових зон, на яких можуть зароджуватися розшарування, якщо досягнуто максимуму пластичних деформацій, які характеризуються стрибком дотичних переміщень.

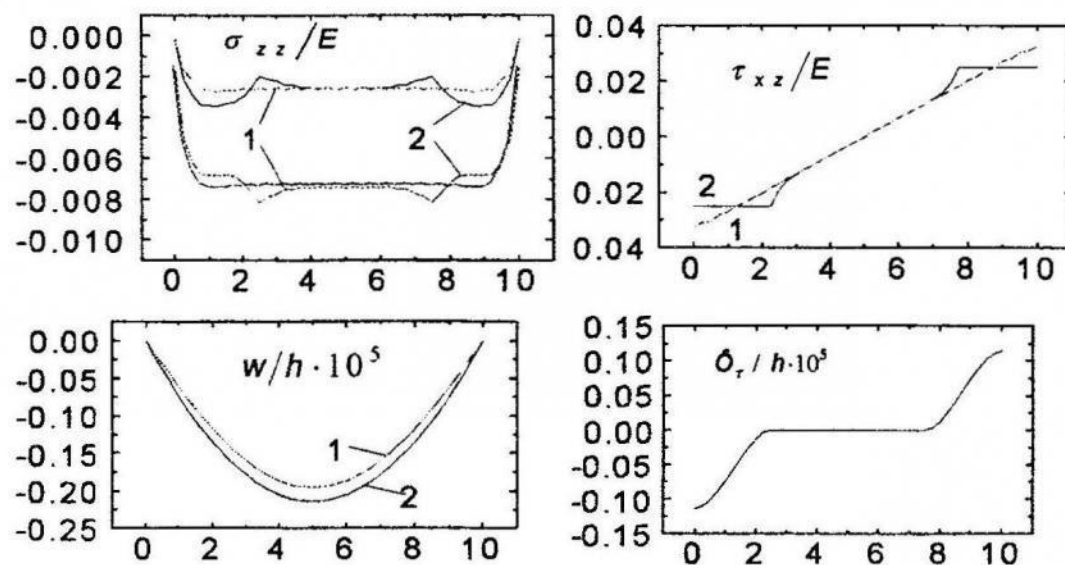


Рис. 2. Нормальні і дотичні міжшарові напруження (вверху), прогини і стрибки переміщень (внизу), 1-ідеальний контакт, 2-із зонами пластичного проковзування.

Література.

1. Вагін В.С., Іванова Н.В., Шинкаренко Г.А. Аналіз зсувних оболонок: постановка і коректність варіаційних задач динаміки//Математичні Студії.—1998.—10, №2.—С. 188–198.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1988. —512 с.
3. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств.— М.: Мир, 1979.—574 с.
4. Гузь А.Н., Коханенко Ю.В. Краевые эффекты в композитах//Прикл. механика.—1995.—31, №3.—С. 3–23.
5. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике.— М.: Наука, 1980.—384 с.
6. Кравчук А.С. Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // Прикл. математика и механика.—1978.—42, №3.—С. 466–473.
7. Литвинов В.Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике.—М.: Наука, 1987.—368 с.
8. Марчук М. В. Решение задач уточненной теории слоистых анизотропных пластин методом конечных элементов. Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук:01.02.04/Ин-т прикл. проблем механики и математики АН

физ.-мат. наук:01.02.04/Ин-т прикл. проблем механики и математики АН Украины.—Львов, 1984.—19 с. 9. Пелех Б.Л., Лазько В.А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений.—Киев: Наук. думка, 1982.—296 с. 10. Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями.—Киев: Наук. думка, 1988.—280 с. 11. Пелех Б.Л., Хомяк Н.Н. Контактная проблема для слоистых композитов при нелинейных межфазных взаимодействиях // Механика композит. материалов.—1993.—№1.—С.105—111. 12. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач.—М.: Мир, 1980.—512 с.

Marchuk M.V., Khomyak M.M.

The variational approach in the nonideal interlayered contact problem

The variational statement of the nonideal contact problem between thin elastic layers are proposed. A dual nature of the sandwich-type structure energy functional with constraints on the interphases is studied. Using layer models within the framework $\{m, n\}$ -approximation a symmetric system of variational inequations is obtained. An example of calculation is presented and analyzed.

Стаття надійшла до редколегії 30.11.1998

УДК 519.6

Ю.П.Оліярник

Приклад функції наповнення для побудови тунельних алгоритмів глобальної мінімізації

1. Постановка задачі. Основні означення.

Розглянемо задачу глобальної оптимізації

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X \subset R^n, \quad (1)$$

де $f(x) \in C^2(X)$, X – компактна множина; R^n – евклідовий простір.

Нехай $x^* \in X$ – деяка ізольована точка локального мінімуму задачі (1). Розглянемо множини :

$$A(f; x^*) = \{x \in X : f(x) \geq f(x^*)\} \setminus \{x^*\}; \quad B(f; x^*) = \{x \in X : f(x) < f(x^*)\}$$

$$B_\varepsilon(f; x^*) = \{x \in X : f(x) \leq f(x^*) - \varepsilon\}; \quad H(y) = \{h \in R^n | y + \alpha h \in X, \alpha > 0\},$$