физ.-мат. наук:01.02.04/Ин-т прикл. проблем механики и математики АН Украины.–Львов, 1984.–19 с. 9. Пелех Б.Л., Лазько В.А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений.–Киев: Наук. думка, 1982.–296 с. 10. Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями.–Киев: Наук. думка, 1988.–280 с. 11. Пелех Б.Л., Хомяк Н.Н. Контактная проблема для слоистых композитов при нелинейных межфазных взаимодействиях // Механика композит. материалов.–1993.–№1.–С.105–111. 12. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач.–М.: Мир, 1980.–512 с.

Marchuk M.V., Khomyak M.M.

The varitional approach in the nonideal interlayered contact problem

The varitional statement of the nonideal contact problem between thin elastic layers are proposed. A dual nature of the sandwich-type structure energy functional with constraints on the interphases is studied. Using layer models within the framework {m,n}-approximation a symmetric system of varitional unequations is obtained. An example of calculation is presented and analyzed.

Стаття надійшла до редколегії 30.11.1998

УДК 519.6

Ю.П.Оліярник

Приклад функції наповнення для побудови тунельних алгоритмів глобальної мінімізації

1. Постановка задачі. Основні означення .

Розглянемо задачу глобальної оптимізації

$$f(x) \to \min, \; x \in X \subset R^n, \tag{1}$$

де $f(x) \in C^2(X)$, X – компактна множина; R^n – евклідовий простір.

Нехай $x^* \in X$ – деяка ізольована точка локального мінімуму задачі (1). Розглянемо множини :

$A(f;x^*) = \{x \in X : f(x) \geq f(x^*)\} \setminus \{x^*\}$; $B(f;x^*) = \{x \in X : f(x) < f(x^*)\}$

$B_\varepsilon(f;x^*) = \{x \in X : f(x) \leq f(x^*) - \varepsilon\}$; $H(y) = \{h \in R^n | y + \alpha h \in X, \; \alpha > 0\}$, де $\varepsilon > 0$ – точність розв'язку задачі (1) по значенню функції мети, $y \in X$.

Назвемо точку $y \in \operatorname{int} X$ квазістаціонарною [1] для функції f(x), якщо $f'(y;x^* - y) \cdot f'(y;y - x^*) \geq 0$. (2)

Позначимо $Y(f) = \overline{X}(f) \setminus \{x^*\}$, де $\overline{X}(f)$ – множина квазістаціонарних точок функції f(x) на множині X. Функцію F(x) будемо називати функцією наповнення для f(x) в точці x^* на множині X, якщо [1] :

1) F(x) неперервна на $X \setminus B_\varepsilon(f;x^*)$; (3)

2) $Y(F) \subset B(f;x^*)$; (4)

3) $Y(F) \neq \varnothing$ при $B_\varepsilon(f;x^*) \neq \varnothing$; (5)

4) x^* – екстремальна точка для функції F(x) на множині X. (6)

2. Приклад функції наповнення. Розглянемо функцію

$$R(x,x^*,\alpha) = 1/\alpha \cdot (1/(1+\|x-x^*\|^2)) - \alpha \cdot \exp((f(x^*) - f(x) - \varepsilon)/\alpha), \quad (7)$$

де $\alpha > 0$ – деякий параметр.

Теорема. Якщо x^* – внутрішня точка множини X, то існує $\alpha_0 > 0$ таке, що функція (7) є функцією наповнення для цільової функції f(x) задачі (1) для довільного α з інтервалу $(0;\alpha_0)$.

Доведення. В рамках умови теореми перевіримо виконання умов (3) – (6).

Виконання умови (3) очевидне, оскільки функція (7) є композицією f(x) і ще декількох функцій з класу C^∞. Легко бачити, що для $x \in \partial B_\varepsilon(f,x^*)$ $R(x,x^*,\alpha) \to +\infty$ при $\alpha \to +0$. Для $x \in \operatorname{int} B_\varepsilon(f,x^*)$ $R(x,x^*,\alpha) \to -\infty$ при $\alpha \to +0$. Отже, існує стала $\alpha_1 > 0$ така, що функція $R(x,x^*,\alpha)$ для довільного $\alpha \in (0,\alpha_1)$ має екстремальні точки на множині $B_\varepsilon(f;x^*)$, що доводить (5). Для доведення (6) розглянемо наступні розклади :

$$1 - e^t = -t - t^2/2 - o(t^2),\ t \in R,$$

$$f(y) - f(y+\Delta) = -<f'(y);\Delta> - \frac{<f''(y)\Delta;\Delta>}{2} + o(\|\Delta\|^2),$$

$$1 - \exp\left(\frac{f(y) - f(y+\Delta)}{\alpha}\right) = \frac{<f'(y);\Delta>}{\alpha} + \frac{<f''(y)\Delta;\Delta>}{2\alpha} - \frac{<f'(y);\Delta>^2}{2\alpha} + o(\|\Delta\|^2),$$

де

$$y \in X,\ \ y+\Delta \in H(y),\ \ o(\|\Delta\|^2)/\|\Delta\|^2 \to 0,\ \|\Delta\|^2 \to 0 \tag{8}$$

Оскільки $f'(x^*)=0$, з (8) випливає

$$R(x^*+\Delta,x^*,\alpha)-R(x^*,x^*,\alpha)=-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\|\Delta\|^2}{1+\|\Delta\|^2}+\exp(-\frac{\varepsilon}{\alpha})\cdot\frac{1}{2}\cdot<f''(x^*)\Delta;\Delta>+o(\|\Delta\|^2)$$

$$R(x^*+\Delta,x^*,\alpha)-R(x^*,x^*,\alpha)\le\|\Delta\|^2\cdot\left(\frac{M_2}{2}\exp(-\frac{\varepsilon}{\alpha})-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+D^2}\right)+o(\|\Delta\|^2), \tag{9}$$

де $M_2=\max\limits_{j=1,\dots,n}\left|\partial f_i(x^*)/\partial x_j\right|,\ i=1,\dots,n.,\ D=\max\limits_{x,y\in X}\|x-y\|$. З (9) випливає існу-вання сталої $\alpha_2>0$ такої, що нерівність $R(x^*+\Delta,x^*,\alpha)-R(x^*+\Delta,x^*,\alpha)\le 0$ виконується для довільного достатньо малого $\|\Delta\|$ і довільного $\alpha\in(0;\alpha_2)$, тобто x^* – точка максимуму для $R(x,x^*,\alpha)$. Доведемо(4). Нехай $x\in A(f,x^*)$. Необхідно довести, що:

$$\partial R(x,x^*,\alpha)/\partial(x-x^*)\cdot\partial R(x,x^*,\alpha)/\partial(x^*-x)<0,\ \forall\alpha\in(0;\alpha_3), \tag{10}$$

де $\alpha_3>0$ – деяка стала, існування якої треба довести.

Розглянемо функцію $R(x,x^*,\alpha)$ як суму двох функцій:

$$R_1(x,x^*,\alpha)=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+\|x-x^*\|^2},\quad R_2(x,x^*,\alpha)=-\alpha\cdot\exp(\frac{f(x^*)-f(x)-\varepsilon}{\alpha})$$

Функція $R_1(x,x^*,\alpha)$ очевидно задовольняє умову аналогічну (10), а саме $\partial R_1(x,x^*,\alpha)/\partial(x-x^*)\cdot\partial R_1(x,x^*,\alpha)/\partial(x^*-x)<0,\ \forall\alpha\in(0;\alpha_3)$. Покажемо, що знак похідної по напряму $x-x^*$ функції $R(x,x^*,\alpha)$ на множині $A(f;x^*)$ визначається знаком функції $R_1(x,x^*,\alpha)$. Для $p=x-x^*$ одержимо :

$$\frac{\partial R_1(x,x^*,\alpha)}{\partial p}=-\frac{1}{\alpha}\frac{2\cdot\|x-x^*\|^2}{(1+\|x-x^*\|^2)^2};\ \frac{\partial R_2(x,x^*,\alpha)}{\partial p}=exp(\frac{f(x^*)-f(x)-\varepsilon}{\alpha})\frac{\partial f(x)}{\partial p}$$

Оскільки x^* – ізольована точка максимуму для $R(x,x^*,\alpha)$, знайдеться $\delta>0$ таке, що (10) виконується для довільних $\alpha>0$ та x околу

$O(x^*,\delta)$. Для довільних $x \in A(f;x^*) \setminus O(x^*;\delta)$, $\alpha > 0$ має місце нерівність:

$$\left| \partial R_1(x,x^*,\alpha) / \partial p \right| \geq 2/\alpha \cdot \delta^2 / (1+D^2)^2 \qquad (11)$$

Аналогічно для $x \in A(f;x^*)$, $\alpha > 0$ виконується:

$$\left| \partial R_2(x,x^*,\alpha) / \partial p \right| \leq L \cdot \exp(-\varepsilon/\alpha), \text{ де } L = \max_{y \in X, p \in H(y)} \left| \partial f(y) / \partial p \right| \qquad (12)$$

Очевидно, що знайдеться стала $\alpha_3 > 0$ така, що:

$$L \cdot \exp(-\varepsilon/\alpha_3) \leq 2/\alpha_3 \cdot \delta^2 / (1+D^2)^2 \qquad (13)$$

З (11), (12), (13) випливає :

$$\left| \partial R_1(x,x^*,\alpha) / \partial p \right| \geq 2/\alpha \cdot \delta^2 / (1+D^2)^2 \geq L\exp(-\varepsilon/\alpha) \geq \left| \partial R_2(x,x^*,\alpha) / \partial p \right|, \qquad (14)$$

для довільних $x \in A(f;x^*)$, $\alpha \in (0,\alpha_3)$ що згідно (2) доводить (4). Покладемо $\alpha_0 = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

3. <u>Деякі аспекти застосування функції наповнення (7).</u> Функція наповнення (7) належить до того ж класу гладкості, що і функція f(x). Це дозволяє використовувати різноманітні алгоритми локальної оптимізації на тунельній фазі без додаткових модифікацій, пов'язаних із розривністю функції наповнення [1,2].

Література.

1. Голуб Б.М. Функції наповнення у глобальній оптимізації //Вісн. Львів. ун-ту. Сер.мех.-мат.-1996 – Вип.44. С.76-81. 2. Ge R.P. The theory of filled function method for finding global minimizers of nonlineary constrained minimization problems //J.of Computational Mathematics.-1987.-V.5. N1.-P.1-9.

Y. P. Oliyarnik

The filled function example for the filled function global minimization algorithms construction

This article deals with the global optimization problem. A new filled function for the filled function global optimization algorithms is described. This function has several theoretical and practical advantages in comparasion with known filled functions.

Стаття надійшла до редколегії 24.09.1998