УДК 519:330

І.П. Твердохліб, Г.Г. Цегелик

Метод визначення стабілізаційної функції споживання для регіональної ринкової системи з неоднорідною соціальною структурою населення

В [1] запропоновано метод отримання функції споживання для довільної ринкової системи, яка зберігає постійний рівень попиту. В цьому сенсі така функція має стабілізаційні властивості і оцінює реакції споживачів при зміні вектора цін. Умови для знаходження такої стабілізаційної функції попиту у формі матриці інциденцій задані базовою моделлю пріоритетного споживання з усередненими пріоритетами [2], що використовує відому AIDS-модель або так звану "майже ідеальну модель споживання" [3]. Але у [2] не враховано поділу споживачів на соціальні групи.

Нехай $G(E,K,S)$ – регіональна ринкова соціально-економічна система, де E – економіка регіону, K – споживачі, а S – система управління. У формалізованому вигляді система $G(E,K,S)$ може бути представлена так:

$$G = M\left(E(n,\vec{p},P), K\left(N,\vec{\nu},\bigcup_{i=1}^{N} K_i\left(\vec{w}_i,\vec{\alpha}_i,\vec{\beta}_i,x_i\right)\right), S\left(n,\vec{b}\right)\right), \tag{1}$$

де соціальна структура населення регіону задається таким поділом споживачів на соціальні групи

$$K = \bigcup_{i=1}^{N} K_i\left(\vec{w}_i,\vec{\alpha}_i,\vec{\beta}_i,x_i\right), \qquad K_i \cap K_j = 0 \ \left(i,j=\overline{1,N}\right) \tag{2}$$

N – кількість соціальних груп споживачів у регіоні; $\vec{b} \in E^n$ – директивний вектор зміни цін; $\vec{\nu} \in R^N$ – вектор соціальної структури населення регіону; $E(n,\vec{p},P)$, $K_i\left(\vec{w}_i,\vec{\alpha}_i,\vec{\beta}_i,x_i\right)$ – характеристики в контексті [2,3] відповідно економіки та і-ої соціальної групи населення регіону.

Проблема визначення стабілізаційної функції споживання довільної ринкової системи зводиться до такої оптимізаційної задачі: для регіональної ринкової соціально-економічної системи $G(E,K,S)$ виду (1)-(2) знайти такі симетричні матриці інциденцій $X_i : E^n \to E^n$

функцій споживання для i -ої соціальної групи $\left(i=\overline{1,N}\right)$, щоб

$$\min_{\{\vec{\alpha}_i;\eta\}}\left[\sum_{i=1}^{N}\nu_i\left(SpX_i+<\vec{b},X_i\vec{b}>\right)\right]\to ? \qquad (3)$$

при умовах

$$\vec{w}_i=\vec{\alpha}_i+X_i\vec{a}+\vec{\beta}_i c_i \qquad \left(i=\overline{1,N}\right) \qquad (4)$$

та обмеженнях

$$\begin{cases}<\vec{\alpha}_i,\vec{a}>+0.5<\vec{a},X_i\vec{a}>=k_i, \quad \vec{e}=(1,1,\ldots,1)^T\in E^n\,; \\ X_i\vec{e}=0\,, \quad <\vec{\alpha}_i,\vec{e}>=1, \quad <\vec{\beta}_i,\vec{e}>=0 \quad \left(i=\overline{1,N}\right),\end{cases} \qquad (5)$$

де $\vec{b}\in E^n,\vec{\beta}_i\in E^n,\vec{w}_i\in E^n$ – апріорі задані; $c_i,k_i\in R^1$ – константи; $E^n:=\left(R^n,<\cdot,\cdot>\right)$ – евклідовий простір; $<\cdot,\cdot>$ – звичайний скалярний добуток в евклідовому просторі; SpX_i – слід матриці X_i; η – невідомі параметри. Згідно [3] вектор $\vec{a}$ і константи c_i,k_i рівні

$$\vec{a}=\log\vec{p},\ \ c_i=\log\{x_i/P\},\ \ k_i=\log P-\alpha_0 \ \ \left(i=\overline{1,N}\right). \qquad (6)$$

Застосувавши до задачі (3)-(6)-(1)-(2) методику аналізу [2], можна показати, що розв'язок її існує для $n\geq 4$. На основі проведеного аналізу моделі (3)-(6)-(1)-(2) пропонується такий метод отримання стабілізаційних функцій споживання для всіх соціальних груп населення регіону, який узагальнює метод [1].

<u>На першому етапі</u> знаходимо ортонормовану базу векторів $\vec{e}_{ij}$ підпростору E_i^{n-1} $\left(\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{N}};j=\overline{1,n-1}\right)$, що ортогональний до вектора $\vec{e}\in E_i^{n-1}$. Формування бази підпростору E_i^{n-1} для фіксованого $i=\overline{1,N}$ здійснюємо послідовно в два кроки.

Спочатку визначаємо систему ортогональних векторів $\vec{\varphi}_{ij}\in E_i^{n-1}$ із умов

$$<\vec{\varphi}_{ij},\vec{\varphi}_{ik}>=0\ \left(j,k=\overline{1,n-1};j\neq k\right),\ <\vec{\varphi}_{ij},\vec{e}>=0\ \left(j=\overline{1,n-1}\right). \qquad (7)$$

Враховуючи довільність системи векторів $\vec{e}_{ij}$ для $i=\overline{1,N}$, будуємо її ітераційно за схемою:

1) визначаємо $\vec{\varphi}_{i,n-1}$ за формулою

$$\vec{\varphi}_{i,n-1}=\left(\vec{a}-\frac{<\vec{a},\vec{e}>}{n}\right)\Big/\sqrt{\|\vec{a}\|^2-\frac{<\vec{a},\vec{e}>^2}{n}}\ , \qquad (8)$$

де $\|\cdot\|$ – норма вектора у евклідовому просторі;

2) знаходимо $\vec{\varphi}_{i1}$ із системи умов $<\vec{\varphi}_{i1},\vec{e}>=0$, $<\vec{\varphi}_{i1},\vec{\varphi}_{i,n-1}>=0$, одним із можливих розв'язків якої є вектор

$$\vec{\varphi}_{i1}=\left(\frac{\varphi^3_{i,n-1}-\varphi^2_{i,n-1}}{\varphi^2_{i,n-1}-\varphi^1_{i,n-1}};-\frac{\varphi^3_{i,n-1}-\varphi^1_{i,n-1}}{\varphi^2_{i,n-1}-\varphi^1_{i,n-1}};1;0;\ldots;0\right)\in E^n, \tag{9}$$

де φ^k_{ij} – k-та координата вектора $\vec{\varphi}_{ij}$;

3) в загальному випадку для $2\le j\le n-2$ визначаємо $\vec{\varphi}_{ij}$ із системи рівнянь

$$<\vec{\varphi}_{ij},\vec{e}>=0,\ <\vec{\varphi}_{ij},\vec{\varphi}_{i1}>=0,\ldots,<\vec{\varphi}_{ij},\vec{\varphi}_{i,j-1}>=0,\ <\vec{\varphi}_{ij},\vec{\varphi}_{i,n-1}>=0, \tag{10}$$

де вектори $\vec{\varphi}_{i1},\ldots,\vec{\varphi}_{i,j-1}$ та $\vec{\varphi}_{i,n-1}$ вже відомі. Взявши $\varphi^{j+2}_{ij}=1,\varphi^{j+3}_{ij}=\ldots=\varphi^n_{ij}=0$, із (10) отримуємо систему $(j+1)$ лінійних рівнянь з $(j+1)$ невідомими першими координатами вектора $\vec{\varphi}_{ij}$. Застосувавши формули Крамера при $\Delta_{ij}\ne 0$, знаходимо такий вектор $\vec{\varphi}_{ij}$, що задовільняє (10):

$$\vec{\varphi}_{ij}=\left(\frac{\Delta^{(1)}_{ij}}{\Delta_{ij}};\frac{\Delta^{(2)}_{ij}}{\Delta_{ij}};\ldots;\frac{\Delta^{(j+1)}_{ij}}{\Delta_{ij}};1;0;\ldots;0\right)\in E^n\ , \tag{11}$$

де

$$\Delta_{ij}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1\\ \varphi^1_{i1} & \varphi^2_{i1} & \ldots & \varphi^j_{i1} & \varphi^{j+1}_{i1}\\ \varphi^1_{i2} & \varphi^2_{i2} & \ldots & \varphi^j_{i2} & \varphi^{j+1}_{i2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi^1_{i,j-1} & \varphi^2_{i,j-1} & \ldots & \varphi^j_{i,j-1} & \varphi^{j+1}_{i,j-1}\\ \varphi^1_{i,n-1} & \varphi^2_{i,n-1} & \ldots & \varphi^j_{i,n-1} & \varphi^{j+1}_{i,n-1}\end{vmatrix}, \tag{12}$$

а $\Delta^{(k)}_{ij}$ $\left(k=\overline{1,j+1}\right)$ утворюється із Δ_{ij} заміною k-го стовбця на стовпець

$$\left(-1;-\varphi^{j+2}_{i1};-\varphi^{j+2}_{i2};\ldots;-\varphi^{j+2}_{i,j-1};-\varphi^{j+2}_{i,n-1}\right). \tag{13}$$

Знайдену ортогональну систему векторів $\vec{\varphi}_{ij}\left(j=\overline{1,n-1}\right)$ для $i=\overline{1,N}$ нормуємо і отримуємо необхідну нам ортонормовану базу $\vec{e}_{ij}$ простору E^{n-1}_i:

$$\vec{e}_{ij}=\vec{\varphi}_{ij}/\left\|\vec{\varphi}_{ij}\right\|\quad\left(j=\overline{i,n-2}\right),\quad \vec{e}_{i,n-1}=\vec{\varphi}_{i,n-1}. \tag{14}$$

<u>**На другому етапі**</u> визначаємо будь-яку ортогональну матрицю $A_i\in Hom\left(E^{n-1}_i\right)$ для $i=\overline{1,N}$, де $Hom\left(E^{n-1}_i\right)$ – гомоморфізм простору

E_i^{n-1}. Ця матриця необхідна для обчислення координат власних векторів шуканих матриць X_i задачі (3)-(6)-(1)-(2). Умовою для знаходження коефіцієнтів матриць A_i виступає таке матричне співвідношення

$$\nu_i^{-4}\left(A_i^T \cdot A_i\right)=1 \quad \left(i=\overline{1,N}\right), \quad A_{i,n-1,k}=\nu_i^2/\sqrt{n-1} \quad \left(k=\overline{1,n-1}\right), \quad (15)$$

де A_{ijk} – елемент матриці A_i. Аналогічно [1], розглядаємо рядки матриці A_i як $(n-1)$–вимірні вектори $\vec{A}_{ij}$ $\left(j=\overline{1,n-1}\right)$. Тоді з умови (15) випливає, що

$$A_{ijk}=\begin{cases} \nu_i^2/\sqrt{j(j+1)} & \left(j=\overline{1,n-2}\right)\wedge\left(k=\overline{1,j}\right); \\ -\nu_i^2\sqrt{j/(j+1)} & \left(j=\overline{1,n-2}\right)\wedge\left(k=j+1\right); \\ 0 & \left(j=\overline{1,n-2}\right)\wedge\left(k=\overline{j+2,n-1}\right); \\ \nu_i^2/\sqrt{n-1} & \left(j=\overline{1,n-2}\right)\wedge\left(k=\overline{1,n-1}\right). \end{cases} \quad (16)$$

<u>На третьому етапі</u> необхідно знайти для кожної матриці X_i $\left(i=\overline{1,N}\right)$ систему взаємноортонормованих власних векторів $\vec{\eta}_{ij}\in E^n$ $\left(j=\overline{1,n-1}\right)$. Проведений аналіз моделі (3)-(6)-(1)-(2) показав, що власні вектори $\vec{\eta}_{ij}$ матриці X_i зв'язані з ортонормованою базою $\vec{e}_{ij}$ підпростору E_i^{n-1} векторним рівнянням

$$\vec{\eta}_{ij}=\begin{cases} \dfrac{1}{\nu_i^2}\left[\sum\limits_{k=1}^{n-2}\dfrac{1}{\sqrt{k(k+1)}}\vec{e}_{ik}+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}\vec{e}_{i,n-1}\right] & (j=1); \\ \dfrac{1}{\nu_i^2}\left[\sum\limits_{k=j}^{n-2}\dfrac{1}{\sqrt{k(k+1)}}\vec{e}_{ik}+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}\vec{e}_{i,n-1}-\dfrac{j-1}{\sqrt{j(j-1)}}\vec{e}_{i,j-1}\right] & \left(j=\overline{2,n-1}\right). \end{cases} \quad (17)$$

На основі (17) отримується система ортогональних власних векторів матриці X_i, яка задовільняє умову $<\vec{\eta}_{ij},\vec{\eta}_{ik}>=\nu_i^{-4}\delta_{jk}$ $\left(i=\overline{1,N};\, j,k=\overline{1,n-1}\right)$, тобто вектори $\vec{\eta}_{ij}$ не є нормованими.

<u>На четвертому етапі</u> обчислюємо власні числа λ_{ij} $\left(j=\overline{1,n-1}\right)$ матриць X_i. Характерною ознакою матриці інциденцій стабілізаційної функції споживання є співпадіння власних чисел цієї матриці, тобто $\lambda_{i1}=\ldots=\lambda_{i,n-1}=\lambda_i^*$. Для всіх $i=\overline{1,N}$ розраховуємо значення λ_i^* за формулою

$$\lambda_i^* = -n\bar{k}_i / \left(n\|\vec{a}\|^2 - <\vec{a},\vec{e}>^2\right), \tag{18}$$

де

$$\bar{k}_i =: 2k_i + 2 < \vec{\beta}_i c_i - \vec{w}_i, \vec{a} > . \tag{19}$$

<u>На п'ятому етапі</u> вираховуємо коефіцієнти матриць інциденцій X_i функцій споживання для i -ої соціальної групи $\left(i = \overline{1,N}\right)$. Матрицю X_i можна знайти за таким співвідношенням

$$X_i = \lambda_i^* \sum_{j=1}^{n-1} \vec{\eta}_{ij} \otimes \vec{\eta}_{ij} \quad \left(i = \overline{1,N}\right), \tag{20}$$

де $\otimes$ – тензорний добуток. Коефіцієнти x_{ijk} матриці X_i прогнозують очікувану реакцію споживачів i -ої соціальної групи на зміну вектора цін, а саме: 1% зростання ціни k -го продукту приводить до збільшення на $x_{ijk} \times 10^2$ витрат j -ої частки бюджету споживача i -ої соціальної групи. Ці матриці мінімізують величину функціоналу (3).

<u>На шостому етапі</u> знаходимо матрицю інциденцій X стабілізаційної функції споживання регіональної ринкової соціально-економічної системи $G(E,K,S)$ з заданою соціальною структурою населення:

$$X = \sum_{i=1}^{N} \nu_i X_i \ . \tag{21}$$

Коефіцієнти матриці $X : E^n \to E^n$ оцінюють очікувані зміни в процесах споживання в регіоні інтегровано, з врахуванням реакції населення із різних соціальних груп.

<u>На сьомому етапі</u> будуємо згідно вимог [3] узагальнену функцію корисності споживачів системи $G(E,K,S)$ з точністю до деяких констант α_0, β_0 :

$$\log h(u,\vec{p}) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{N} \nu_i \alpha_{ij}\right)\log p_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{jk} \log p_j \log p_k + \\ + \beta_0 \sum_{i=1}^{N} \nu_i u_i \prod_{j=1}^{n} p^{\beta_{ij}} , \tag{22}$$

де $h(u,\vec{p})$ – AIDS-функція корисності споживача, α_{ij}, β_{ij} – координати відповідних векторів, x_{jk} – коефіцієнти матриці X, а $0 \le u_i \le 1$ – параметр, що характеризує рівень споживання продуктів в i -й соціальній групі ($u_i = 0$ у випадку мінімально-необхідного споживання та $u_i = 1$ для максимального). Аналогічно (22) формуються функції корисності населення кожної соціальної групи, тільки використовуються відповідні матриці X_i.

Отже, запропонований метод визначення стабілізаційної функції споживання для регіональної ринкової соціально-економічної системи є узагальненням [1] і дозволяє враховувати фактор поділу населення регіону на соціальні групи. Крім прогнозної оцінки реакції населення на зміну вектора цін, можна отримати аналітично функцію корисності споживача, яку можна застосувати у макроекономічному моделюванні. Підкреслимо, що розраховані матриці інциденцій X_i функції споживання є одними із можливих.

Література.

1. Твердохліб І.П., Цегелик. Г.Г. Метод визначення стабілізованої функції споживання. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1998. Вип. 50, с.196-200. 2. Твердохліб І.П. Метод апроксимації моделей пріоритетного споживання. //В кн.: Сучасні проблеми математики: Матеріали міжнародної наук. конференції. Частина 3.- Київ: Ін-т математики НАН України, 1998, с.126-128. 3. Deaton A.S. and Muellbauer J. An Almost Ideal Demand System. //Amer. Econ. Rev. June 1980, vol. 70, p.312-326.

I.P.Tverdohlib, G.G.Tsegelyck

The method of the definition of stable function of consumption for regional marketing system with heterogeneous social structure of population.

Method of the definition of the stable function of consumption for regional marketing system with heterogeneous social structure of population, which is based on the well-known modal an Almost Ideal Demand System is proposed.

Стаття надійшла до редколегії 13.10.98.

УДК 517.51

Г.Г.Цегелик, Н.В.Федчишин

До побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона для функцій двох дійсних змінних, заданих таблично

Некласична теорія мажорант і діаграм Ньютона бере свій початок з робіт [1,2], в яких вперше введено поняття некласичної