населення кожної соціальної групи, тільки використовуються відповідні матриці X_i.

Отже, запропонований метод визначення стабілізаційної функції споживання для регіональної ринкової соціально-економічної системи є узагальненням [1] і дозволяє враховувати фактор поділу населення регіону на соціальні групи. Крім прогнозної оцінки реакції населення на зміну вектора цін, можна отримати аналітично функцію корисності споживача, яку можна застосувати у макроекономічному моделюванні. Підкреслимо, що розраховані матриці інциденцій X_i функції споживання є одними із можливих.

Література.

1. Твердохліб І.П., Цегелик. Г.Г. Метод визначення стабілізованої функції споживання. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1998. Вип. 50, с.196-200. 2. Твердохліб І.П. Метод апроксимації моделей пріоритетного споживання. //В кн.: Сучасні проблеми математики: Матеріали міжнародної наук. конференції. Частина 3.- Київ: Ін-т математики НАН України, 1998, с.126-128. 3. Deaton A.S. and Muellbauer J. An Almost Ideal Demand System. //Amer. Econ. Rev. June 1980, vol. 70, p.312-326.

I.P.Tverdohlib, G.G.Tsegelyck

The method of the definition of stable function of consumption for regional marketing system with heterogeneous social structure of population.

Method of the definition of the stable function of consumption for regional marketing system with heterogeneous social structure of population, which is based on the well-known modal an Almost Ideal Demand System is proposed.

Стаття надійшла до редколегії 13.10.98.

УДК 517.51

Г.Г.Цегелик, Н.В.Федчишин

До побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона для функцій двох дійсних змінних, заданих таблично

Некласична теорія мажорант і діаграм Ньютона бере свій початок з робіт [1,2], в яких вперше введено поняття некласичної мажоранти і діаграми Ньютона нескінченної числової послідовності, встановлені необхідні і достатні умови існування діаграми Ньютона, вивчені властивості мажоранти Ньютона. Як застосування, запропоновано підхід до побудови класу наближених методів пошуку інформації в файлах баз даних, що використовують характеристики діаграми Ньютона послідовності значень пошукового ключа, яким характеризуються записи файла. В [3] теорія некласичних мажорант і діаграм Ньютона перенесена на функції дійсної змінної, задані таблично. Як застосування, запропоновано використати цей апарат для побудови чисельного методу пошуку екстремуму негладких і розривних функцій. В [4] апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона використаний для побудови чисельного методу обчислення визначених інтегралів. В [5] пропонується використати цей апарат для побудови чисельного методу наближеного розв'язування задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку, а також для розробки методу рівномірного наближення функцій, заданих на проміжку.

В даній роботі некласична теорія мажорант і діаграм Ньютона: розроблена для функцій дійсної змінної, заданих таблично, переноситься на функції двох дійсних змінних, заданих таблично. Робота є продовженням [6].

Розглянемо функцію двох дійсних змінних $z = f(x,y)$, яка задана своїми значеннями в деяких точках (x_i, y_j) $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$:

$$f(x_i, y_j) = z_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m).$$

Нехай $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, $y_1 < y_2 < \cdots < y_m$,

$$|z_{ij}| = a_{ij} \le M \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m).$$

де M – деяка стала, і $a_{11} \cdot a_{1m} \cdot a_{n1} \cdot a_{nm} \ne 0$.

Точку $P_{ij}(x_i, y_j, -\ln a_{ij})$ з координатами $x = x_i$, $y = y_j$, $z = -\ln a_{ij}$ в просторі xyz назвемо точкою зображення значення функції $z = f(x,y)$ в точці (x_i, y_j). Припустимо, що точки зображення P_{ij} значень функції $z = f(x,y)$ в точках (x_i, y_j) $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$ в просторі xyz побудовані. Множину цих точок позначимо через S, а її опуклу оболонку – через $C(S)$. Для кожної точки $(x,y) \in R = \{\, x_1 \le x \le x_n,\ y_1 \le y \le y_m \}$ визначимо точку $B(x, y, \kappa(x,y))$, де

$$\kappa(x,y)=\inf_{(x,y,z)\in C(S)} z\,.$$

Множина точок $B(x,y,\kappa(x,y))$, де $(x,y)\in R$, утворює багатогранну поверхню δ_f, яка обмежує $C(S)$ знизу. Ця поверхня є неперервною, опуклою і її рівняння має вигляд:

$$z=\kappa(x,y)\,,\quad (x,y)\in R\,,$$

поверхню δ_f, визначену на R, назвемо діаграмою Ньютона функції $z=f(x,y)$ на R.

Діаграма Ньютона δ_f функції $z=f(x,y)$ має такі властивості: 1) кожна вершина δ_f розміщена в одній із точок зображення P_{ij} значення функції $z=f(x,y)$ в точці (x_i,y_j); 2) кожна точка зображення P_{ij} знаходиться на δ_f або розміщена вище неї; 3) кожній точці $(x_i,y_j)\in R$ на діаграмі δ_f відповідає точка $B(x_i,y_j,\kappa_{ij})$, де $\kappa_{ij}=\kappa(x_i,y_j)$.

Позначимо

$$\mathrm{M}_f(x,y)=\mathrm{e}^{-\kappa(x,y)}\,,\quad (x,y)\in R\,.$$

Тоді для кожної точки (x_i,y_j) $(i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,m)$ виконується нерівність

$$\left|f(x_i,y_j)\right|=\left|z_{ij}\right|=a_{ij}\le \mathrm{M}_f(x_i,y_j)\,.$$

Дійсно, з визначення δ_f випливає, що $-\ln a_{ij}\ge\kappa(x_i,y_j)$ або $a_{ij}\le \mathrm{e}^{-\kappa(x_i,y_j)}=\mathrm{M}_f(x_i,y_j)$. Крім того

$$\mathrm{M}_f(x_1,y_1)=\left|f(x_1,y_1)\right|,\quad \mathrm{M}_f(x_1,y_m)=\left|f(x_1,y_m)\right|,$$

$$\mathrm{M}_f(x_n,y_1)=\left|f(x_n,y_1)\right|,\quad \mathrm{M}_f(x_n,y_m)=\left|f(x_n,y_m)\right|.$$

Функцію $z=\mathrm{M}_f(x,y)$, визначену на R, назвемо мажорантою Ньютона функції $z=f(x,y)$ на R.

Нехай

$$\mathrm{M}_f(x_i,y_j)=T_{ij}\quad (i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,m).$$

Величини

$$R_{ij}(x)=\left(\frac{T_{i-1,j}}{T_{ij}}\right)^{\frac{1}{x_i-x_{i-1}}}\quad \left(i=2,3,\dots,n;\ j=1,2,\dots,m;\ R_{1j}=0\right)$$

і

$$R_{ij}(y)=\left(\frac{T_{i,j-1}}{T_{ij}}\right)^{\frac{1}{y_j-y_{j-1}}}\quad \left(j=2,3,\ldots,m;\, i=1,2,\ldots,n;\, R_{i1}=0\right)$$

назвемо (i,j)–ми числовими нахилами $\mathsf{M}_f(x,y)$ відповідно в напрямку осей абсцис і ординат, а величини

$$D_{ij}(x)=\frac{R_{i+1,j}(x)}{R_{ij}(x)}\quad \left(i=2,3,\ldots,n-1;\, j=1,2,\ldots,m;\, D_{1j}=D_{nj}=\infty\right)$$

і

$$D_{ij}(y)=\frac{R_{i,j+1}(y)}{R_{ij}(y)}\quad \left(j=2,3,\ldots,m-1;\, i=1,2,\ldots,n;\, D_{i1}=D_{im}=\infty\right)$$

назвемо (i,j)–ми числовими відхиленнями $\mathsf{M}_f(x,y)$ відповідно в напрямку осей $0x$ і $0y$.

Із опуклості вниз діаграми Ньютона δ_f випливають такі нерівності

$$D_{ij}(x)\ge 1\quad \left(i=2,3,\ldots,n-1\right),$$
$$D_{ij}(y)\ge 1\quad \left(j=2,3,\ldots,m-1\right).$$

Нехай E – множина пар індексів (i,j), для яких $a_{ij}\neq 0$. Покажемо, що коефіцієнти T_{ij} значень мажоранти Ньютона $\mathsf{M}_f(x,y)$ в точках $\left(x_i,y_j\right)$ можна безпосередньо визначити через коефіцієнти a_{ij}, $(i,j)\in E$. Розглянемо просторовий трикутник Δ_p, утворений точками $P_{i_1j_1}, P_{i_2j_2}, P_{i_3j_3}$, де $(i_k,j_k)\in E$, $k=1,2,3$. Проекція цього трикутника на площину xy дасть трикутник Δ, вершини якого позначимо через $C_{i_1j_1}, C_{i_2j_2}, C_{i_3j_3}$. Введемо позначення

$$h_{123}=h_{23}\left(i_1,j_1\right)=\begin{vmatrix} x_{i_1}-x_{i_2} & y_{j_1}-y_{j_2}\\ x_{i_3}-x_{i_2} & y_{j_3}-y_{j_2}\end{vmatrix}.$$

Тоді $h_{123}=h_{231}=h_{312}$ (перевіряється розкриттям відповідних визначників). Для того щоб точка C_{ij} належала трикутнику Δ, досить, щоб одночасно виконувались такі умови:

$$\begin{aligned} H_1&=h_{23}(i,j)\cdot h_{23}(i_1,j_1)\ge 0,\\ H_2&=h_{31}(i,j)\cdot h_{31}(i_2,j_2)\ge 0,\\ H_3&=h_{12}(i,j)\cdot h_{12}(i_3,j_3)\ge 0.\end{aligned}\qquad (1)$$

Ці умови випливають із ознак взаємного розміщення прямої і пари точок.

Припустимо, що для точки C_{ij} виконуються нерівності (1), причому хоча б одна з них є строгою. Визначимо аплікату точки $\overline{P}\left(x_i, y_j, -\ln t_{ij}\right)$ перетину трикутника Δ_p з прямою, паралельною осі аплікат, яка проходить через точку C_{ij}.

Рівняння площини, яке проходить через точки $P_{i_1j_1}, P_{i_2j_2}, P_{i_3j_3}$, запишемо у вигляді

$$\begin{vmatrix} x - x_{i_1} & y - y_{j_1} & z + \ln a_{i_1j_1} \\ x_{i_2} - x_{i_1} & y_{j_2} - y_{j_1} & -\ln a_{i_2j_2} + \ln a_{i_1j_1} \\ x_{i_3} - x_{i_1} & y_{j_3} - y_{j_1} & -\ln a_{i_3j_3} + \ln a_{i_1j_1} \end{vmatrix} = 0 .$$

Оскільки точка $\overline{P}$ лежить на цій площині, то для знаходження аплікати $-\ln t_{ij}$ цієї точки одержуємо рівняння

$$\begin{vmatrix} x_i - x_{i_1} & y_j - y_{j_1} & -\ln t_{ij} + \ln a_{i_1j_1} \\ x_{i_2} - x_{i_1} & y_{j_2} - y_{j_1} & -\ln a_{i_2j_2} + \ln a_{i_1j_1} \\ x_{i_3} - x_{i_1} & y_{j_3} - y_{j_1} & -\ln a_{i_3j_3} + \ln a_{i_1j_1} \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкривши визначник по елементах третього стовпчика, дістаємо рівняння

$$\ln\left(\frac{a_{i_1j_1}}{t_{ij}}\right)^{h_{13}(i_2,j_2)} - \ln\left(\frac{a_{i_1j_1}}{a_{i_2j_2}}\right)^{h_{13}(i,j)} + \ln\left(\frac{a_{i_1j_1}}{a_{i_3j_3}}\right)^{h_{12}(i,j)} = 0 .$$

Оскільки $h_{13}(i_2, j_2) - h_{13}(i,j) + h_{12}(i,j) = h_{32}(i,j)$, і $-h_{12}(i,j) = h_{21}(i,j)$, то

$$t_{ij} = \left(\left(a_{i_1j_1}\right)^{h_{32}(i,j)}\left(a_{i_2j_2}\right)^{h_{13}(i,j)}\left(a_{i_3j_3}\right)^{h_{21}(i,j)}\right)^{\frac{1}{h_{13}(i_2,j_2)}} .$$

Тому

$$T_{ij} = \sup_{H_1,H_2,H_3 \geq 0} t_{ij} ,$$

де точна верхня межа береться по всеможливих трикутниках $\Delta \in R$, для яких в (3) має місце хоча б одна строга нерівність.

Література.

1. Цегелик Г.Г. Мажоранты и диаграммы Ньютона числовых последовательностей и их приложение к поиску информации в базах данных.– Киев, 1985. – 12 с. – (Препринт /АН УССР. Институт кибернетики им. В.М.Глушкова; № 85–49). 2. Цегелик Г.Г. Организация и поиск

информации в базах данных. Львов: Вища школа, 1987, 176 с. 3. Цегелик Г.Г. Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение //Укр. матем. журн., 1989. № 9. Т.41. С. 1273-1276. 4. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. Використання некласичного апарату мажорант і діаграм Ньютона функцій для побудови нової квадратурної формули //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.– мат. Вип. 41. 1995. С. 108-111. 5. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій дійсної змінної, заданих таблично, та його використання //Матер. міжнарод. наук. конф. «Сучасні проблеми математики». Чернівці – Київ, 1998. Ч. 3. С. 189–192. 6. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.– мат. Вип. 50. 1998. С. 209–211.

G.G.Tsegelyk, N.V.Fedchyshyn

To the construction of the device of the Non-Classical Newtonian Majorants and Diagrams for the functions of two real variables given tabularly

The device of Non-Classical Newtonian Majorants and Diagrams for the functions of two real variables given tabularly is constructed and the properties of these Majorants and Diagrams are investigated in the paper.

Стаття надійшла до редколегії 10.11.1998

УДК 539.3

Н.М.Щербина

Про один чисельно – аналітичний метод розв'язування крайових задач

Значна частина задач, які виникають при дослідженні напружено–деформованого стану тонкостінних елементів конструкцій (оболонок, пластин, стержнів) під дією експлуатаційних навантажень, у тому числі при контактній взаємодії з жорсткими тілами, зводиться до розв'язування крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами.

У даній праці розглядається один із можливих методів розв'язування таких задач. Цей метод в ідейному плані подібний до