информации в базах данных. Львов: Вища школа, 1987, 176 с. 3. Цегелик Г.Г. Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение //Укр. матем. журн., 1989. № 9. Т.41. С. 1273-1276. 4. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. Використання некласичного апарату мажорант і діаграм Ньютона функцій для побудови нової квадратурної формули //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.– мат. Вип. 41. 1995. С. 108-111. 5. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій дійсної змінної, заданих таблично, та його використання //Матер. міжнарод. наук. конф. «Сучасні проблеми математики». Чернівці – Київ, 1998. Ч. 3. С. 189–192. 6. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.– мат. Вип. 50. 1998. С. 209–211.

G.G.Tsegelyk, N.V.Fedchyshyn

To the construction of the device of the Non-Classical Newtonian Majorants and Diagrams for the functions of two real variables given tabularly

The device of Non-Classical Newtonian Majorants and Diagrams for the functions of two real variables given tabularly is constructed and the properties of these Majorants and Diagrams are investigated in the paper.

Стаття надійшла до редколегії 10.11.1998

УДК 539.3

Н.М.Щербина

Про один чисельно – аналітичний метод розв'язування крайових задач

Значна частина задач, які виникають при дослідженні напружено–деформованого стану тонкостінних елементів конструкцій (оболонок, пластин, стержнів) під дією експлуатаційних навантажень, у тому числі при контактній взаємодії з жорсткими тілами, зводиться до розв'язування крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами.

У даній праці розглядається один із можливих методів розв'язування таких задач. Цей метод в ідейному плані подібний до методу, який детально досліджений у праці [4] і виявився ефективним при розв'язуванні багатьох практичних задач у випадку систем із сталими коефіцієнтами.

1. Розглянемо наступну математичну модель у вигляді системи n лінійних звичайних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами:

$$\frac{d}{dx}z(x) = A(x)z(x) + f(x)\,,\ x \in [0,b]\,, \tag{1}$$

з крайовими умовами, накладеними на функцію $z(x)$ при $x=0$ та $x=b$ (по $n/2$ на кожному кінці, n – парне). Тут z – невідомий вектор з компонентами $z_1, z_2, \ldots, z_n$; $A(x)$ – функціональна матриця розмірності $n \times n$, елементи якої $a_{ij}(x)$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ – задані неперервні функції в інтервалі зміни аргументу x; $f(x)$ – вектор–функція з компонентами $f_i(x)$. Надалі вважатимемо, що виконуються умови, які забезпечують існування і єдиність розв'язку крайової задачі.

При розв'язуванні сформульованої двоточкової лінійної крайової задачі використовуємо прийом зведення її до набору $n+1$ задач Коші

$$\frac{d}{dx}z^{(0)}(x) = A(x)z^{(0)}(x) + f(x)\,,\ z_i^{(0)}(0) = 0\,,\ i = 1,2,\ldots,n\,; \tag{2}$$

$$\frac{d}{dx}z^{(k)}(x) = A(x)z^{(k)}(x)\,,\ z_i^{(k)}(0) = \begin{cases} 1, i = k, \\ 0, i \neq k, \end{cases} \ (i,k = 1,2,\ldots,n)\,. \tag{3}$$

За допомогою розв'язків задач (2) – (3) розв'язок крайової задачі записується у вигляді

$$z(x) = z^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k z^{(k)}(x)\,. \tag{4}$$

Невідомі сталі C_k визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь, одержаної при задоволенні крайових умов.

Метод знаходження розв'язків задач (2) – (3) пов'язаний безпосередньо з побудовою матриціанта. Як відомо [1], матриціант може бути представлений у вигляді такого ряду:

$$G_0^x = E + \int_0^x A(x_1)\mathrm{d}x_1 + \int_0^x A(x_2)\int_0^{x_2} A(x_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + \cdots +$$

$$+ \int_0^x A(x_k)\int_0^{x_k} A(x_{k-1})\cdots\int_0^{x_2} A(x_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_k + \cdots.$$

Цей ряд є абсолютно і рівномірно збіжним у будь–якому замкненому інтервалі неперервності функції $A(x)$.

Відзначимо, що при описаному підході відшукання розв'язку крайової задачі не має потреби у чисельному розв'язуванні задач Коші. Основною проблемою тут є обчислення матриціанта G_0^x. У загальному випадку матриці $A(x)$ це є складною і аналітично практично нерозв'язальною задачею.

Використовуючи зображення матриціанта у вигляді мультиплікативного інтегралу [1], наближене обчислення матриціанта здійснюємо за формулою:

$$G_0^x = [E + A(\xi_n)\Delta x_n]\cdots[E + A(\xi_2)\Delta x_2][E + A(\xi_1)\Delta x_1] + O(\Delta x). \qquad (5)$$

Тут $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ($k = 1,2,...,n$; $x_n = x$). Через $O(\Delta x)$ позначено величини порядку $O(\Delta x_k)$, $k = 1,2,...,n$. Відзначимо деякі характерні аспекти організації обчислювальної процедури. Вважаючи Δx_k малими першого порядку, при обчисленні $G_{x_{k-1}}^{x_k}$ з точністю до малих другого порядку можна взяти

$$A(x) \approx \text{const} = A(\xi_k).$$

При наближеному обчисленні матриціанта істотно використовуємо також таку його властивість:

$$G_0^x = G_{x_{n-1}}^x G_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} \cdots G_{x_1}^{x_2} G_0^{x_1}.$$

Нехай при чисельній реалізації пропонованого методу розв'язування крайової задачі потрібно одержати значення матриціанта у точках $\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_m$ проміжку інтегрування $[0,b]$, де $\hat{x}_m = b$. Тоді, використовуючи асоціативність добутку матриць, достатньо m разів виконати описану процедуру з формулою (5). Алгоритм включає наступні кроки.

Крок 1–й. Обчислити $G_0^{\hat{x}_1}$.

Крок 2–й. Обчислити $G_{\hat{x}_1}^{\hat{x}_2}$ і

$$G_0^{\hat{x}_2} = G_{\hat{x}_1}^{\hat{x}_2} \cdot G_0^{\hat{x}_1}.$$

Крок 3–й. Обчислити $G_{\hat{x}_2}^{\hat{x}_3}$ і

$$G_0^{\hat{x}_3} = G_{\hat{x}_2}^{\hat{x}_3} \cdot G_0^{\hat{x}_2}.$$

. . . . .

Крок m–й. З попереднього кроку маємо $G_0^{\hat{x}_{m-1}}$. Обчислити $G_{\hat{x}_{m-1}}^{\hat{x}_m}$ і

$$G_0^{\hat{x}_m} = G_{\hat{x}_{m-1}}^{\hat{x}_m} \cdot G_0^{\hat{x}_{m-1}}.$$

Позначимо через $g_{ij}(x)$ елементи матриці G_0^x, а через $k_{ij}(x,\tau)$ – матриці $K(x,\tau)=G_0^x\left[G_0^\tau\right]^{-1}$. Тоді розв'язок крайової задачі у покомпонентному записі матиме вигляд

$$z_i(x)=\sum_{i=1}^{n}C_k g_{ik}(x)+\int_0^x\sum_{j=1}^{n}k_{ij}(x,\tau)f_j(\tau)\mathrm{d}\tau \ \ (i=1,2,\dots,n). \tag{6}$$

При $x=0$ $n/2$ невідомих сталих C_k легко визначаються відразу. Решта сталих C_k знаходяться з наступної системи $n/2$ лінійних алгебраїчних рівнянь, отриманої внаслідок задоволення крайових умов при $x=b$:

$$z_i(b)=z_i^{(0)}(b)+\sum_{k\in J_2}C_k g_{ik}(b), \tag{7}$$

де $J_2=\{1,2,\dots,n\}\setminus J_1$. Через J_1 і J_2 позначені відповідно множини індексів знайдених та ще не визначених сталих C_k.

2. Відзначимо також важливі часткові випадки, коли матрицант виражається у явному вигляді через вихідну матрицю $A(x)$.

За умови Лаппо–Данилевського (матриця $A(x)$ є комутативною зі своїм інтегралом):

$$A(x)\cdot\int_0^x A(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^x A(\tau)\mathrm{d}\tau\cdot A(x), \tag{8}$$

матрицант має вигляд

$$G_0^x=\exp\left(\int_0^x A(\tau)\mathrm{d}\tau\right). \tag{9}$$

Схема побудови розв'язку досліджуваної крайової задачі залишається без змін, особливість цього випадку – в обчисленні матрицанта. Тут для обчислення матрицанта G_0^x використовуємо розклад матричної експоненти у матричний ряд, який збігається рівномірно на будь-якому скінченному інтервалі [1]:

$$e^{M(x)}=E+\frac{1}{1!}M(x)+\frac{1}{2!}M^2(x)+\cdots+\frac{1}{m!}M^m(x)+\cdots, \tag{10}$$

де $M(x)=\int_0^x A(\tau)\mathrm{d}\tau$.

Елементи матриці $M(x)$ позначатимемо через $m_{ij}(x)$ ($i,j=1,2,\dots,n$). Згідно з (10), елементи G_0^x обчислюються за формулами

$$g_{ii}(x) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{m_{ii}^{(s)}(x)}{s!}, \quad g_{ij}(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{m_{ii}^{(s)}(x)}{s!} \ (i \neq j), \tag{11}$$

де $m_{ij}^{(s)}(x)$ – це (i, j)–й елемент матриці M^s. Зазначимо, що при практичних розрахунках у рядах (11) обмежуємося m членами. Вибір параметра m залежить від конкретної задачі і тісно пов'язаний з точністю результатів обчислень.

Розв'язок крайової задачі матиме вигляд (4), де

$$z_i^{(0)} = \int_0^x \sum_{j=1}^{n} \widetilde{g}_{ij}(x,\xi) f_j(\xi) \mathrm{d}\xi, \ i = 1,2,\ldots,n,$$

$\widetilde{g}_{ij}(x,\xi)$ – елементи матриці $G(x,\xi) = G(x)G^{-1}(\xi) = \exp\left(\int_\xi^x A(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$.

Сталі C_k визначаються так само, як у загальному випадку.

Нехай $A = \{a_{ij}\}_1^n$ – стала матриця системи рівнянь (1). Вона задовольняє умові комутативності (8), а тому матрицантом, згідно з (9), у цьому випадку є матриця e^{Ax}.

При розв'язуванні конкретних практичних задач зустрічається випадок, коли матриця A є нільпотентною (деякий степінь її дорівнює нулю). Тоді, обмежуючись $m-1$ членами розкладу матричної експоненти e^{Ax} у матричний ряд:

$$e^{Ax} = E + A\frac{x}{1!} + A^2\frac{x^2}{2!} + \cdots + A^{m-1}\frac{x^m}{m!},$$

отримуємо розв'язок, який збігається з точним. Наприклад, для побудови розв'язку задачі, досліджуваній у праці [3], достатньо було обмежитись трьома членами матричного ряду. Якщо ж матриця не є нільпотентною, то для досягнення потрібної точності результатів необхідно у залежності від конкретної задачі при наближеному обчисленні матриціанта брати різне число членів матричного ряду. Це питання детально досліджене у праці [4].

Таким чином, описаний метод дозволяє одержати наближений розв'язок крайової задачі в аналітичній формі, що є особливо цінним при розв'язуванні контактних задач. Розроблено програмний модуль для обчислення матрицанта у загальному випадку функціональної матриці $A(x)$ (виконання умови Лаппо–Данилевського не вимагається).

Проілюструємо метод на такій крайовій задачі:

$$\frac{dy_1}{dx} = (\cos x)y_1 + (\sin x)y_2 ,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = (\sin x)y_1 + (\cos x)y_2 ;$$

$$y_1(0) = 1,\ y_2(1) = 6.2428210789 .$$

Для даної задачі виконується умова Лаппо–Данилевського, але цей факт ніяк не використовується; вибір задачі обумовлений лише тим, що для неї відомий аналітичний розв'язок [2].

За описаним методом розв'язок даної задачі зображається у вигляді

$$y_1(x) = C_1 g_{11}(x) + C_2 g_{12}(x) ,$$

$$y_2(x) = C_1 g_{21}(x) + C_2 g_{22}(x) ,$$

де $g_{ij}(x)$ – елементи деякого наближення матриціанта G_0^x. Задовольняючи умови при $x = 0$ і враховуючи, що

$$g_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

знаходимо $C_1 = 1$. З умови при $x = 1$ одержимо вираз для сталої C_2:

$$C_2 = \left(6.2428210789 - g_{21}(1)\right)/g_{22}(1) .$$

У таблиці наведені результати розрахунків у точках $\hat{x}_i = \hat{x}_0 + ih$, $i = 0,\ldots,10$, $h = 0.1$ проміжку $[0,1]$. Кожний проміжок $[\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}]$, $i = 0,\ldots,9$ розбивався k точками. У таблиці наведені результати для $k = 1000, 10000$ і результати, обчислені за точним аналітичним розв'язком.

Таблиця

x	$k = 1000$		$k = 10000$		Точний розв'язок	
	y_1	y_2	y_1	y_2	y_1	y_2
0.0	1.00000	2.00019	1.00000	2.00002	1.00000	2.00000
0.1	1.11604	2.21572	1.11604	2.21554	1.11604	2.21552
0.2	1.26864	2.46456	1.26865	2.46438	1.26865	2.46436
0.3	1.46522	2.75058	1.46524	2.75039	1.46525	2.75037
0.4	1.71398	3.07829	1.71401	3.07811	1.71401	3.07809
0.5	2.02364	3.45294	2.02369	3.45276	2.02370	3.45274
0.6	2.40317	3.88038	2.40324	3.88022	2.40325	3.88020
0.7	2.86128	4.36695	2.86138	4.36681	2.86139	4.36679
0.8	3.40587	4.91909	3.40600	4.91898	3.40602	4.91897
0.9	4.04333	5.54279	4.04350	5.54273	4.04352	5.54273
1.0	4.77769	6.24282	4.77792	6.24282	4.77794	6.24282

Література.

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1998.–552 с. 2. Еругин Н. П., Штокало И. З. и др. Курс ообыкновенных дифференциальных уравнений. К.: Вища школа, 1974.–472 с. 3. Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. Киев: Наук. думка, 1988.– 280 с. 4. Щербина Н. М. Методи розв'язування контактних задач для пружних анізотропних шаруватих циліндричних оболонок.– Препр. НАН України, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, № 7 – 94, 1994.– 56 с.

N.M.Shcherbyna

On some numerical–analytical method for solving of the boundary problems

Matrix method idea to solve the linear boundary problem for the thin–walled elements of constructions has been developed in a case of the system of ordinary differential equations with variable coefficients. The test example is given to illustrate the application and validity of the proposed method.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.1998

УДК 624.074:678.067

Н.М.Щербина, Ю.М.Щербина

Задачі оптимального проектування композитних оболонок. 1. Неоднорідна оболонка мінімальної маси

При оптимальному проектуванні композитних оболонок з урахуванням специфічних особливостей їх механічної поведінки, структурної будови та технології виготовлення виникає потреба у розробці спеціальних моделей нелінійного програмування та адаптації і застосування сучасних обчислювальних методів.

У даній праці задачі оптимізації композитних циліндричних оболонок з неоднорідним за товщиною пакетом шарів формулюються як задача нелінійного програмування

$$\begin{aligned} &F(y) \to extr, \\ &y \in D, \end{aligned} \tag{1}$$