Література.

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1998.–552 с. 2. Еругин Н.П., Штокало И.З. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. К.: Вища школа, 1974.–472 с. 3. Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. Киев: Наук. думка, 1988.– 280 с. 4. Щербина Н.М. Методи розв'язування контактних задач для пружних анізотропних шаруватих циліндричних оболонок.– Препр. НАН України, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, № 7 – 94, 1994.– 56 с.

N.M.Shcherbyna

On some numerical–analytical method for solving of the boundary problems

Matrix method idea to solve the linear boundary problem for the thin–walled elements of constructions has been developed in a case of the system of ordinary differential equations with variable coefficients. The test example is given to illustrate the application and validity of the proposed method.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.1998

УДК 624.074:678.067

Н.М.Щербина, Ю.М.Щербина

Задачі оптимального проектування композитних оболонок. 1. Неоднорідна оболонка мінімальної маси

При оптимальному проектуванні композитних оболонок з урахуванням специфічних особливостей їх механічної поведінки, структурної будови та технології виготовлення виникає потреба у розробці спеціальних моделей нелінійного програмування та адаптації і застосування сучасних обчислювальних методів.

У даній праці задачі оптимізації композитних циліндричних оболонок з неоднорідним за товщиною пакетом шарів формулюються як задача нелінійного програмування

$$\begin{aligned} &F(y) \to extr, \\ &y \in D, \end{aligned} \tag{1}$$

де y – вектор змінних, за якими здійснюється оптимізація, F – функція мети (відображає певні характеристики проекту оболонки), D – допустима множина (задається нерівностями, взагалі кажучи, нелінійними), $extr$ – означає min або max.

Для розв'язування отриманих задач нелінійного програмування використовується метод лінеаризації [3] та його квазіньютонівські модифікації [5,6].

1. Опис проблеми оптимального проектування у термінах нелінійного програмування пов'язаний із формуванням: а) параметрів оптимізації, тобто вектора y; б) множини D допустимих проектних розв'язків (під допустимим проектним розв'язком розуміємо конкретне значення y, яке визначається обмеженнями, що моделюють необхідні фізико-механічні і технологічні властивості проекта); в) критерія оптимальності проекта $F(y)$, який описує ефект від вибору того чи іншого допустимого проектного розв'язку.

При постановці задач оптимального проектування композитних оболонок, складених із n шарів, параметри оптимізації – компоненти вектора y – доцільно згрупувати таким чином: геометричні параметри (товщина, радіус, довжина) і структурні параметри (коефіцієнт об'ємного армування μ, кути армування $\beta_1,\ldots,\beta_n$, відносний вміст шарів з даним кутом армування у пакеті $\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}$). Отже, у загальному випадку вектор параметрів оптимізації виглядатиме так: $y=(y_1,\ldots,y_N)=(h,R,l,\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$.

Множина D допустимих проектних розв'язків задається обмеженнями, які можна класифікувати як геометричні, структурні та фізичні. Смисл геометричних та структурних обмежень очевидний, а фізичні обмеження забезпечують вимоги щодо жорсткості, міцності, стійкості та інших фізичних характеристик проекту. Отже,

$$D=\{y:\varphi(y)\le 0,\chi(y)\le 0,\psi(y)\le 0\},\tag{2}$$

де $\varphi(y),\chi(y),\psi(y)$ – вектор-функції, які описують відповідно геометричні, структурні та фізичні обмеження. Їх вигляд та кількість компонент залежать від конкретної задачі та вибраної теоретичної моделі для опису напружено-деформованого стану оболонки.

2. Розглядається багатошарова циліндрична оболонка з неоднорідним за товщиною пакетом шарів. Величини l, $2h$, R характеризуватимуть відповідно її довжину, загальну товщину, радіус серединної поверхні. Припускається, що при деформуванні шари залишаються пружними і працюють без взаємного проковзування.

Для n-шарової оболонки з неоднорідним за товщиною пакетом шарів приймається гіпотеза [1]:

$$\sigma_{ij} = \sum_{m=1}^{n} \sigma_{ij}^{(m)} = \sum_{m=1}^{n} A_{ijkl}^{(m)} e_{kl},$$
$$\rho = \sum_{m=1}^{n} \rho^{(m)}, \tag{3}$$

де $\sigma_{ij}^{(m)}$, $\rho^{(m)}$ – компоненти тензора напружень і густина матеріалу в кожному шарі, ρ – стала густина пакету, $A_{ijke}^{(m)}$ – компоненти тензора жорсткісних властивостей матеріалу m-го шару оболонки. Пружні характеристики кожного шару оболонки визначаються за відомими формулами теорії армування через властивості арматури, сполучника і параметри армування [1]. Врахування кутів армуванння шарів багатошарової оболонки здійснюється за формулами перетворення пружних сталих при повороті осей координат [1].

Для всього пакету шарів оболонки приймається узагальнена кінематична гіпотеза типу Тимошенка, яка водночас з урахуванням анізотропії жорсткісних характеристик, враховує податливість трансверсальним зсувним деформаціям та стиснення в поперечному напрямі. За цією гіпотезою маємо

$$\begin{aligned} &e_{ii} = \varepsilon_{ii} + z\chi_{ii},\ e_{i3} = \varepsilon_{i3}\ (i = 1,2); \\ &e_{12} = \varepsilon_{12} + 2z\chi_{12},\ e_{33} = 0; \\ &\sigma_{33} \neq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Тут ε_{ij}, χ_{ij} – компоненти тензора деформації серединної поверхні оболонки, z – координата в радіальному напрямі пакету (відлік від серединної поверхні оболонки).

Компоненти деформації з невідомими узагальненими переміщеннями зв'язані геометричними співвідношеннями [2]:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{R}, \\ &\varepsilon_{12} = \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x},\ \varepsilon_{13} = \gamma_1 + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ &\varepsilon_{23} = \gamma_2 + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{v}{R}, \\ &\chi_{11} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial x},\ \chi_{22} = \frac{1}{R}\frac{\partial \gamma_2}{\partial \varphi}, \\ &2\chi_{12} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \tag{5}$$

Тут для величин вживаються загальноприйняті позначення та термінологія [1,2], інші позначення пояснюються в тексті.

Рівняння руху оболонки при дії осьового навантаження T за кінематичною гіпотезою типу Тимошенка для всього пакету складових шарів мають вигляд:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial S}{\partial \varphi}=2h\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
&\frac{1}{R}\frac{\partial N_2}{\partial \varphi}+\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{1}{R}Q_2=2h\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{1}{R}\frac{\partial Q_2}{\partial \varphi}+\frac{1}{R}N_2=2h\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-T\chi_{11},\\
&\frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial \varphi}-Q_1=0,\\
&\frac{1}{R}\frac{\partial M_2}{\partial \varphi}+\frac{\partial H}{\partial x}-Q_2=0,
\end{aligned}\tag{6}$$

де N_i, S, Q_i; M_i, H $(i=1,\ 2)$ – зусилля і моменти, t – час.

Величини N_i, S, Q_i, M_i, H визначаються так:

$$\begin{aligned}
&N_i=\int_{-h}^{h}\sigma_{ii}dz,\ Q_i=\int_{-h}^{h}\sigma_{i3}dz,\ S=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}dz,\\
&M_i=\int_{-h}^{h}\sigma_{ii}zdz,\ H=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}zdz\ (i=1,\ 2).
\end{aligned}\tag{7}$$

Після підстановки (3) у (7), враховуючи при цьому, що

$$\int_{-h}^{h}\sigma_{ij}dz=\int_{-h}^{\delta_1}\sigma_{ij}^{(1)}dz+\int_{\delta_1}^{\delta_2}\sigma_{ij}^{(2)}dz+\ldots+\int_{\delta_{n-1}}^{h}\sigma_{ij}^{(n)}dz$$

$$\int_{-h}^{h}\sigma_{ij}zdz=\int_{-h}^{\delta_1}\sigma_{ij}^{(1)}zdz+\int_{\delta_1}^{\delta_2}\sigma_{ij}^{(2)}zdz+\ldots+\int_{\delta_{n-1}}^{h}\sigma_{ij}^{(n)}zdz$$

(δ_m – координата поверхні m-го і m+1-го шарів, m=1,...,n-1, n–число шарів), отримаємо у результаті інтегрування такі вирази для зусиль і моментів – характеристик напруженого стану шаруватого пакету:

$$N_1=h\left(A_{1111}\varepsilon_{11}+A_{1122}\varepsilon_{22}\right)+\frac{h^2}{2}\left(B_{1111}\chi_{11}+B_{1122}\chi_{22}\right),$$

$$N_2=h\left(A_{1122}\varepsilon_{11}+A_{2222}\varepsilon_{22}\right)+\frac{h^2}{2}\left(B_{1122}\chi_{11}+B_{2222}\chi_{22}\right),$$

$$S=2hA_{1212}\varepsilon_{12}+2h^2B_{1212}\chi_{12},$$

$$Q_1 = 2hA_{1313}\varepsilon_{13}, Q_2 = 2hA_{2323}\varepsilon_{23},$$
$$M_1 = \frac{h^2}{2}\left(B_{1111}\varepsilon_{11} + B_{1122}\varepsilon_{22}\right) + \frac{h^3}{3}\left(D_{1111}\chi_{11} + D_{2222}\chi_{22}\right),$$
$$M_2 = \frac{h^2}{2}\left(B_{1122}\varepsilon_{11} + B_{2222}\varepsilon_{22}\right) + \frac{h^3}{3}\left(D_{1122}\chi_{11} + D_{2222}\chi_{22}\right), \quad (8)$$
$$H = B_{1212}h^2\varepsilon_{12} + \frac{2h^3}{3}D_{1212}\cdot 2\chi_{12},$$

де

$$A_{ijkl} = \sum_{m=1}^{n} A_{ijkl}^{(m)}\theta_m, B_{ijkl} = \sum_{m=1}^{n} A_{ijkl}^{(m)}\eta_m,$$
$$\mathrm{D}_{ijkl} = \sum_{m=1}^{n} A_{ijkl}^{(m)}\zeta_m, \quad (9)$$
$$\theta_m = \left(\bar{\delta}_m - \bar{\delta}_{m-1}\right), \eta_m = \left(\bar{\delta}_m^2 - \bar{\delta}_{m-1}^2\right), \zeta_m = \left(\bar{\delta}_m^3 - \bar{\delta}_{m-1}^3\right),$$
$$\bar{\delta}_m = \frac{\delta_m}{h}, \bar{\delta}_0 = -1, \bar{\delta}_n = 1.$$

За гіпотезою $e_{33} = 0\ (\sigma_{33} \neq 0)$ компоненти тензора жорсткості $A_{ijkl}^{(m)}$ m-го шару оболонки визначаються співвідношеннями вигляду

$$A_{1111}^{(m)} = \frac{E_1^{(m)}}{1 - \nu_{12}^{(m)}\nu_{21}^{(m)}}\left(1 + \frac{\nu_{13}^{(m)} + \nu_{12}^{(m)}\nu_{21}^{(m)}}{\Delta_m}\frac{E_1^{(m)}}{E_3^{(m)}}\right),$$
$$A_{1122}^{(m)} = \frac{E_1^{(m)}}{1 - \nu_{12}^{(m)}\nu_{21}^{(m)}}\left(\nu_{12}^{(m)} + \frac{\left(\nu_{13}^{(m)} + \nu_{12}^{(m)}\nu_{21}^{(m)}\right)\left(\nu_{23}^{(m)} + \nu_{21}^{(m)}\nu_{12}^{(m)}\right)}{\Delta_m}\frac{E_2^{(m)}}{E_3^{(m)}}\right),$$
$$A_{2222}^{(m)} = \frac{E_2^{(m)}}{1 - \nu_{12}^{(m)}\nu_{21}^{(m)}}\left(1 + \frac{\left(\nu_{23}^{(m)} + \nu_{21}^{(m)}\nu_{12}^{(m)}\right)^2}{\Delta_m}\frac{E_2^{(m)}}{E_3^{(m)}}\right), \quad (10)$$
$$A_{1133}^{(m)} = E_1^{(m)}\frac{\left(\nu_{13}^{(m)} + \nu_{12}^{(m)}\nu_{21}^{(m)}\right)}{\Delta_m}, A_{2233}^{(m)} = E_2^{(m)}\frac{\left(\nu_{23}^{(m)} + \nu_{12}^{(m)}\nu_{21}^{(m)}\right)}{\Delta_m},$$
$$A_{1212}^{(m)} = \frac{1}{2}G_{12}^{(m)}, A_{1313}^{(m)} = \frac{1}{2}G_{13}^{(m)}, A_{2323}^{(m)} = \frac{1}{2}G_{23}^{(m)},$$
$$\Delta_m = 1 - \nu_{12}^{(m)}\nu_{21}^{(m)} - \nu_{13}^{(m)}\nu_{31}^{(m)} - \nu_{23}^{(m)}\nu_{32}^{(m)} - \nu_{12}^{(m)}\nu_{23}^{(m)}\nu_{31}^{(m)} - \nu_{13}^{(m)}\nu_{21}^{(m)}\nu_{32}^{(m)},$$

де $\nu_{ij}^{(m)}$ і $E_i^{(m)}$ – коефіцієнти Пуасона і модулі Юнга, для яких виконуються відомі залежності [1], $G_{ij}^{(m)}$ $(i, j = 1,2,3)$ – модулі зсуву m-го шару оболонки.

Нехай шарувата циліндрична оболонка шарнірно оперта на торцях і стискається вздовж твірної зусиллям T. У випадку осесиметричної задачі ($v=0,\ \gamma_2=0$, величини u, γ_1, w залежать тільки від координати x, похідні по φ від шуканих функцій дорівнюють нулю) за допомогою (5), (6), (8) отримуємо систему рівнянь для дослідження статичної стійкості оболонки з урахуванням неоднорідності її структурної будови за товщиною:

$$
\begin{aligned}
&C_1\frac{d^2\bar{u}}{d\xi^2}+C_2\frac{d\bar{w}}{d\xi}+C_3\frac{d^2\gamma}{d\xi^2}=0,\\
&C_4\frac{d^2\bar{w}}{d\xi^2}+C_5\frac{d\gamma}{d\xi}-C_2\frac{d\bar{u}}{d\xi}+C_6\bar{w}=T\frac{d\gamma}{d\xi},\\
&C_3\frac{d^2\bar{u}}{d\xi^2}-C_5\frac{d\bar{w}}{d\xi}+C_7\frac{d^2\gamma}{d\xi^2}+C_8\gamma=0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

У системі (11) вжито такі позначення:

$$
\begin{aligned}
&C_1=\frac{h}{R}A_{1111}, C_2=\frac{h}{R}A_{1122}, C_3=\frac{h^2}{2R^2}B_{1111},\\
&C_4=\frac{2h}{R}A_{1313}, C_5=C_4-\frac{h^2}{2R^2}B_{1122}, C_6=-C_2,\\
&C_7=\frac{h^3}{3R^3}\mathrm{D}_{1111}, C_8=-C_4,
\end{aligned}
$$

$\bar{w}=\dfrac{w}{R},\ \bar{u}=\dfrac{u}{R}$ – безрозмірні величини поперечного і поздовжнього переміщень оболонки, $\xi=\dfrac{x}{R}$.

З отриманої ключової системи рівнянь (11) при $\bar{w}=A\sin\lambda_m\xi, \gamma=B\cos\lambda_m\xi$ (параметр $\lambda_m=\dfrac{m\pi}{l}$ характеризує хвилеутворення в повздовжньому напрямку) визначається [4] критичне значення стискаючого зусилля для шаруватої оболонки як функції геометричних параметрів і фізико-механічних характеристик складових шарів, числа шарів та кутів їх армування:

$$
T=a\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b}{\sqrt{\frac{b}{a}}}+c,
\tag{12}
$$

де

$$a=\frac{1}{4}\left(\frac{h}{R}\right)^4 B_{1111}^2-\frac{1}{3}\left(\frac{h}{R}\right)^4 D_{1111}A_{1111},$$

$$b=\left(\frac{h}{R}\right)^2 A_{1122}^2-\left(\frac{h}{R}\right)^2 A_{1111}A_{1122},$$

$$c=\left(-8\left(\frac{h}{R}\right)A_{1111}A_{1313}^2+\frac{2}{3}\left(\frac{h^3}{R}\right)D_{1111}\left(A_{1122}^2-A_{1111}A_{1122}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{R}\right)^3 B_{1111}^2\left(A_{1122}-A_{1122}^2\big/A_{1111}\right)\right)\right)\Big/d\quad;$$

$$d=4A_{1111}A_{1313}-\left(\frac{h}{R}\right)A_{1111}B_{1122}+\left(\frac{h}{R}\right)B_{1111}A_{1122}.$$

За (9), (10) величина T виражається через параметри оптимізації.

3. Зафіксуємо радіус серединної поверхні R і довжину оболонки l, густину її матеріалу ρ (тобто густину сполучника ρ_c, армувальних волокон ρ_a, коефіцієнт армування μ), пружні характеристики: E_c, E_a – модулі пружності; ν_c, ν_a – коефіцієнти Пуасона та кути армування шарів $\beta_1,\ldots,\beta_n$.

При заданих властивостях вихідних компонент композиту ставиться задача знаходження оптимальної структури будови оболонки мінімальної маси. Функція мети – маса оболонки – визначається за формулою

$$F(y)=2\pi\left(\mu\rho_a+(1-\mu)\rho_c\right)Rl\left(x\left(h_+-h_-\right)+h_-\right),\qquad(13)$$

де $x=\dfrac{h-h_-}{h_+-h_-}$, $h=\sum\limits_{k=1}^{n}h_k$; h_-, h_+ – відповідно нижня і верхня межі товщини оболонки.

При фіксованих значеннях кутів армування β_k $(1\le k\le n)$ вектор проектних параметрів має N компонент: $y=(y_1,\ldots,y_N)=\left(x,\overline{\delta}_1,\ldots,\overline{\delta}_{n-1}\right)$, тобто параметрами оптимізації є загальна товщина оболонки $h=x\left(h_+-h_-\right)+h_-$, координати поверхонь розділу (відповідно і товщини складових шарів).

Обмеження на параметри оптимізації у розглядуваній задачі приймаються такими:

$$x \geq 0,\ 1-x \geq 0;$$
$$1-\bar{\delta}_k \geq 0,\ 1+\bar{\delta}_k \geq 0 \ \ (k=1,2,\dots,n-1); \qquad (14)$$
$$\bar{\delta}_k - \bar{\delta}_{k-1} \geq 0 \ \ (k=2,\dots,n-1).$$

У даному випадку критерієм несучої здатності вибрана статична стійкість оболонки при осьовому стиску, відповідне фізичне обмеження матиме вигляд нерівності

$$1-\frac{T}{T_*} \leq 0, \qquad (15)$$

де T_* – задане значення осьового зусилля, T визначається за формулою (12).

Отже, задача оптимізації за масою композитної оболонки, яка працює на статичну стійкість від осьового стиску, формулюється так: знайти мінімум функції (13) за умов (14), (15). Ця задача є задачею нелінійного програмування.

Література.

1. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572с. 2. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка, 1973. 248с. 3. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. М.: Наука, 1983. 136с. 4. Щербина Н.Н., Черепюк И.Д. Статическая устойчивость слоистой цилиндрической оболочки //Динаміка і стійкість композиційних структур: Матеріали I наук.-техн. семінару. Львів, 1991. С.34-38. 5. Щербина Ю.Н., Голуб Б.М. Квазиньютоновская модификация метода линеаризации //Кибернетика. 1988. №6. С.66-71. 6. Щербина Ю.Н., Голуб Б.М. Модификация метода линеаризации для решения задачи математического программирования на простом множестве типа «параллелепипеда» //Мат. методы и физ.-мех. поля. 1989. Вып. 30. С.24-28.

N.M. Shcherbyna, Yu.M. Shcherbyna

Optimum projection problems for composite shells. 1. Nonhomogeneous shell of minimum mass

The statement of optimum projection problems for the laminated composite shells is presented. A generalized shell theory taking into account the nonhomogeneous elastic properties is assumed to as a basis of these investigation. Mathematical model of the considered optimum problem is formulated as the nonlinear programming problem.

Стаття надійшла до редколегії 15.12.1998.