

ISSN 0201-758X.

ISSN 0320-6572.

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА



ВИПУСК

52

1999

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

**Львівський державний університет
імені Івана Франка**

**ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.

Випуск 52

**ЗАДАЧІ
ТА МЕТОДИ
ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ**

Львів
1999

У Віснику вміщені статті з математичного моделювання, чисельних методів розв'язання задач математичної фізики і оптимізації та програмного забезпечення.

Для наукових працівників, викладачів і студентів старших курсів.

Бібліогр. у кінці статей.

Відповідальний секретар:

Г.А.ШИНКАРЕНКО

д-р фіз.-мат. наук, професор

Редакційна колегія:

Ю.М.ЩЕРБИНА (відп. секр.)

канд. фіз.-мат. наук, доцент

М.Я.БАРТІШ

канд. фіз.-мат. наук, доцент

М.М.ВОЙТОВИЧ

д-р фіз.-мат. наук, професор

Г.Г.ЦЕГЕЛИК

д-р фіз.-мат. наук, професор

Я.Г.САВУЛА

д-р фіз.-мат. наук, професор

Б.О.ПОПОВ

д-р фіз.-мат. наук, професор

О.М.КОСТОВСЬКИЙ

д-р фіз.-мат. наук, професор

Відповідальний за випуск:

Ю.М.ЩЕРБИНА.

Адреса редколегії:

290602 Львів, вул Університетська, 1

Університет, кафедра теорії оптимальних процесів

Тел: 79-47-91

E-mail: kis@franko.lviv.ua

<http://www.franko.lviv.ua/faculty/pmi/visnyk/visnyk.htm>

М.Я.Бартіш, О.В.Николайчук, А.І.Чипурко

**Про деякі різницеві модифікації
методу Гаусса-Ньютона для нелінійної задачі
найменших квадратів з малою нормою нев'язки**

В даній статті ми продовжуємо дослідження різницевого схем комбінованих методів розв'язання нелінійної задачі про найменші квадрати

$$\text{знайти} \quad \min \frac{1}{2} F(x)^T F(x) \quad (1)$$

де $F(x):R^n \rightarrow R^m$ – нелінійна по x , $m \geq n$. Зокрема, в [1] було запропоновано загальну схему на базі різницевого аналога формули Гаусса-Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - [F(x_k, \theta_k)^T F(x_k, \theta_k)]^{-1} F(x_k, \theta_k)^T F(x_k), \quad (2)$$

$$\theta_k = \alpha x_k + (1 - \alpha) \Phi(x_k), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (3)$$

$$k = 0, 1, \dots,$$

де $F(x, y)$ – перша поділена різниця [4], а оператор $\Phi(x)$ породжує ітераційну формулу порядку $1 \leq \tau \leq 2$, тобто

$$\|\Phi(x) - x^*\| \leq L \|x - x^*\|^\tau, \quad L = \text{const} > 0. \quad (4)$$

Доведено [1], що для задач з нульовою нормою нев'язки (2),(3) має кращі швидкісні властивості в порівнянні з класичними методами, а саме збігається з порядком $\tau + 1$ при $\alpha = 0$ та порядком 2 при $\alpha \neq 0$.

В даній замітці ми розглянемо випадок наявності малої норми нев'язки. Наступна теорема дає умови Коші збіжності (2),(3).

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

1) $\Phi(x)$ – неперервний оператор, який породжує ітераційну формулу порядку τ , $1 \leq \tau \leq 2$;

2) $F(x)$ – неперервно-диференційовна в області $D \subseteq R^n$;

3) $\forall x, y \in D \quad \|F(x, y)\| \leq C$, під $F(x, x)$ розуміємо $F'(x)$ [4];

4) $\forall x, y, z \in D \quad \|F(x, y, z)\| \leq M$, де $F(x, y, z)$ – друга поділена різниця [4];

5) $\forall x, y \in D$ існує обернений оператор $[F(x, y)^T F(x, y)]^{-1}$, причому $\|[F(x, y)^T F(x, y)]^{-1}\| \leq B$;

6) в області D існує точка x^* , яка є розв'язком задачі (1), причому $\|F(x^*)\| \leq \varepsilon$, де ε – достатньо мале число;

7) початкове наближення x_0 вибрано так, що $x_0 \in \Omega_0 = \{x: \|x - x^*\| < \eta_0\} \subset D$, $\eta_0 = \text{const} > 0$, $L\eta_0^{\tau-1} \leq 1$;

8) $h_0 = K_1\eta_0 < 1$, де $K_1 = BCM + 2BM\gamma\eta_0^{\tau-1}$.

Тоді послідовність наближень, породжена (2),(3), коректно означена, збігається до розв'язку задачі (1) і справедливі наступні оцінки

$$\|x_k - x^*\| \leq h_0^{2^k-1} \eta_0, \quad k = 1, 2, \dots, m+1, \quad (5)$$

$$\|x_{m+p} - x^*\| \leq h_0^{(p+1)2^m-1} \eta_0, \quad p = 2, 3, \dots, \quad (6)$$

Тут m визначаємо з умови

$$\gamma \|x_{m+1} - x^*\|^\tau < \varepsilon \leq \gamma \|x_m - x^*\|^\tau,$$

де x_m, x_{m+1} – два послідовні наближення, отримані по (2),(3), $\gamma = \text{const} > 0$.

Якщо $\alpha = 0$ і виконується умова

$$8') \quad h_0^\tau = K_\tau \eta_0^\tau < 1, \quad \text{де } K_\tau = BCM L + 2BM\gamma,$$

то будемо мати

$$\|x_k - x^*\| \leq h_0^{(\tau+1)^k-1} \eta_0, \quad k = 1, 2, \dots, m+1 \quad (7)$$

$$\|x_{m+p} - x^*\| \leq h_0^{(p\tau+1)(\tau+1)^m-1} \eta_0, \quad p = 2, 3, \dots \quad (8)$$

Доведення. Отримаємо спочатку загальну оцінку для деякого $k+1$ наближення схеми (2),(3). При цьому, будемо вважати, що всі попередні наближення не вийшли за межі околу Ω_0 , що буде показано пізніше. З (2), при використанні властивостей скінчених різниць [4], можемо записати

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= [F(x_k, \theta_k)^T F(x_k, \theta_k)]^{-1} F(x_k, \theta_k)^T (F(x_k, \theta_k)(x_k - x^*) \\ &- F(x_k)) = [F(x_k, \theta_k)^T F(x_k, \theta_k)]^{-1} F(x_k, \theta_k)^T ((F(x_k, \theta_k) - F(x_k, x^*)) \times \\ &\times (x_k - x^*) - F(x^*)) = [F(x_k, \theta_k)^T F(x_k, \theta_k)]^{-1} F(x_k, \theta_k)^T F(x_k, \theta_k, x^*) \times \\ &\times (\theta_k - x^*)(x_k - x^*) - [F(x_k, \theta_k)^T F(x_k, \theta_k)]^{-1} (F(x_k, \theta_k, x^*) (\theta_k - x^*) + \end{aligned}$$

$$+ F(x_k, x^*) - F'(x^*) \Big)^T F(x^*) .$$

Звідси, з огляду на умови 3)-6) теореми, буде справедливою нерівність

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq BCM \|\theta_k - x^*\| \|x_k - x^*\| + BM\varepsilon (\|\theta_k - x^*\| + \|x_k - x^*\|). \quad (9)$$

Далі, використовуючи (3) та умову 7) теореми, отримаємо оцінку

$$\|\theta_k - x^*\| \leq (\alpha + (1-\alpha)L\eta_0^{\tau-1}) \|x_k - x^*\| \leq \|x_k - x^*\|. \quad (10)$$

З (9), тепер можемо записати

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\| &\leq BCM \left(\alpha \|x_k - x^*\|^2 + (1-\alpha)L \|x_k - x^*\|^{\tau+1} \right) + \\ &\quad + 2BM\varepsilon \|x_k - x^*\|. \end{aligned} \quad (11)$$

Для $\alpha \neq 0$, використовуючи метод математичної індукції та умови теореми маємо

$$\begin{aligned} \|x_1 - x^*\| &\leq BCM \left(\alpha + (1-\alpha)L \|x_0 - x^*\|^{\tau-1} \right) \|x_0 - x^*\|^2 + \\ &\quad + B\gamma(M + \beta) \|x_0 - x^*\|^{\tau-1} \|x_0 - x^*\|^2 \leq (BCM + 2BM\gamma\eta_0^{\tau-1}) \|x_0 - x^*\|^2 \leq \\ &\leq K_1\eta_0\eta_0 = h_0\eta_0 = h_0^{2^1-1}\eta_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Для k -го наближення ($k \leq m$), аналогічно (12) отримаємо

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\| &\leq (BCM + 2BM\gamma\eta_0^{\tau-1}) \|x_k - x^*\|^2 \leq K_1 h_0^{2^{k+1}-2} \eta_0^2 = \\ &= h_0^{2^{k+1}-1} \eta_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким чином, послідовність $\{x_k\} \in \Omega_0$, $k = 1, 2, \dots, m+1$ і (5) є справедливою для цих наближень.

Покажемо тепер виконання (6) для наближень з номерами від $m+2$ і далі.

$$\begin{aligned} \|x_{m+2} - x^*\| &\leq BCM \left(\alpha \|x_{m+1} - x^*\|^2 + (1-\alpha)L \|x_{m+1} - x^*\|^{\tau+1} \right) + \\ &\quad + 2BM\varepsilon \|x_{m+1} - x^*\| \leq BCM \left(\alpha \|x_m - x^*\| \|x_{m+1} - x^*\| + \right. \\ &\quad \left. + (1-\alpha)L \|x_m - x^*\|^\tau \|x_{m+1} - x^*\| \right) + 2BM\gamma \|x_m - x^*\|^\tau \|x_{m+1} - x^*\| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left(BCM + 2BM\gamma \|x_m - x^*\|^{\tau-1} \right) \|x_m - x^*\| \|x_{m+1} - x^*\| \leq K_1 h_0^{2^m-1} \eta_0 \leq h_0^{2^{m+1}-1} \eta_0 \leq h_0^{(2+1)2^m-1} \eta_0. \quad (14)$$

Припустимо тепер, що (6) виконується для $m+p$ -го наближення ($p > 2$). Тоді, як і в (14)

$$\begin{aligned} \|x_{m+p+1} - x^*\| &\leq \left(BCM + 2BM\gamma \|x_m - x^*\|^{\tau-1} \right) \|x_m - x^*\| \times \\ &\times \|x_{m+p} - x^*\| \leq K_1 h_0^{2^m-1} \eta_0 h_0^{(p+1)2^m-1} \eta_0 \leq h_0^{(p+2)2^m-1} \eta_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Спрямувавши в (15) p до нескінченості, отримаємо

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x_{m+p+1} - x^*\| = 0.$$

Отже, ми показали, що в загальному послідовність $\{x_k\}$, $k=1,2,\dots$, отримана по (2), (3) при умовах теореми збігається до точки x^* – розв'язку задачі (1), мають місце оцінки (5), (6) і кожне наближення схеми лежить в околі Ω_0 .

Розглянемо тепер випадок, коли $\alpha = 0$ і виконується умова 10' теореми. Проведемо індукцію для послідовності наближень з номерами від 1 до $m+1$. Використовуючи (11), отримаємо

$$\|x_1 - x^*\| \leq K_\tau \eta_0^\tau \eta_0 = h_0^{(\tau+1)^1-1} \eta_0. \quad (16)$$

Припустимо, що оцінка (7) справедлива для k -го наближення ($k \leq m$), тоді

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\| &\leq (BCM + 2BM\gamma) \|x_k - x^*\|^{\tau+1} \leq \\ &\leq K_\tau h_0^{((\tau+1)^k-1)(\tau+1)} \eta_0^{\tau+1} \eta_0 = h_0^\tau h_0^{(\tau+1)^{k+1}-\tau-1} \eta_0 = h_0^{(\tau+1)^{k+1}-1} \eta_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогічно попередньому, для $k > m+1$, маємо таку оцінку

$$\begin{aligned} \|x_{m+p+1} - x^*\| &\leq (BCM + 2BM\gamma) \|x_m - x^*\|^\tau \|x_{m+p} - x^*\| \leq \\ &\leq K_\tau h_0^{\tau(\tau+1)^m-\tau} \eta_0^\tau h_0^{(p\tau+1)(\tau+1)^m-1} \eta_0 = h_0^{((p+1)(\tau+1))(\tau+1)^m-1} \eta_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Формули (17) та (18) показують збіжність (2),(3) для $\alpha = 0$, при умові 8' та справедливості оцінок (7), (8).

Теорему доведено.

Як зазначалось вище, теорема показує збіжність процесу для нелінійних задач про найменші квадрати з ненульовими, але достатньо малими нормами нев'язок. Зокрема важливою в цьому плані є умова 9 теореми. За цієї умови, в загальному випадку метод буде генерувати $m+1$ наближення з квадратичною швидкістю збіжності (формула (13)). Далі швидкість збіжності буде тільки лінійною (формула (15)).

Більш ефективної роботи методу можна сподіватись при $\alpha = 0$. З (17) видно, що до $m+1$ наближення включно, порядок швидкості збіжності становитиме $\tau+1$. Для наближень з номерами від $m+2$ і далі будемо мати надлінійний порядок (формула (18)).

Досліджуючи збіжність загальної схеми [1] та її різницевого аналога (2), (3) для випадку задачі (1) з малою нормою нев'язки, були отримані оцінки швидкості різних порядків. А саме, для довільних $\alpha \in [0,1]$ мали місце оцінки типу

$$\|x_k - x^*\| \leq K_1 \|x_{k-1} - x^*\|^2 \leq h_0^{2^{k-1}} \eta_0, \quad (19)$$

де $k = 1, 2, \dots, m+1$ та

$$\|x_{m+p} - x^*\| \leq K_1 \|x_m - x^*\| \|x_{m+p-1} - x^*\| \leq h_0^{(p+1)2^m-1} \eta_0, \quad (20)$$

де $p = 2, 3, \dots$. $K_1 > 0$ – константа, окремо отримана для кожного методу. Якщо з (19) будемо мати квадратичний порядок збіжності для наближень від 1 до $m+1$, то оцінка (20) вказує на змінний порядок ρ для всіх наступних наближень, який отримаємо з рівняння

$$\rho = 1 + \frac{1}{\rho^{p-1}}. \quad (21)$$

Зокрема, для $p = 2$, $\rho \approx 1.61$, для $p = 3$, $\rho \approx 1.46$.

Формула (23) показує, що з ростом p , порядок збіжності ρ буде прямувати до одиниці, а значить схеми збігаються і швидкість збіжності переходить в лінійну.

Для нерізницевої схеми [1] при $\alpha = \frac{1}{2}$ та схеми (2), (3) при $\alpha = 0$, отримані оцінки типу

$$\|x_k - x^*\| \leq K_\tau \|x_{k-1} - x^*\|^{\tau+1} \leq h_0^{(\tau+1)^{k-1}} \eta_0, \quad (22)$$

де $k = 1, 2, \dots, m+1$

$$\|x_{m+p} - x^*\| \leq K_\tau \|x_m - x^*\|^\tau \|x_{m+p-1} - x^*\| \leq h_0^{(p\tau+1)(\tau+1)^m-1} \eta_0, \quad (23)$$

де $p = 2, 3, \dots$, $K_p > 0$ – константа, окремо отримана для кожного методу. В даному випадку (22) вказує на порядок збіжності рівний $\tau + 1$ для наближень до $m + 1$ -го. Далі для визначення змінного порядку ρ , що залежить від p , маємо рівняння

$$\rho = 1 + \frac{\tau}{p-1}.$$

Література.

1. М. Я. Бартиш, А. І. Чипурко. Про одну модифікацію методу Гаусса - Ньютона, Математичні Студії. - 1998. - Т.10, №1. -85-92. 2. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. - М. Мир, 1988. - 440 с. 3. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. - М. Мир, 1975. - с. 4. Ульм С. Ю. Об обобщенных разделенных разностях. I. Изд. АН ЭССР. Физика. Матем., 1967, 16, N1, С.13-26.

Bartish M.Ja., Nykolajchuk O.V., Chypurko A.I.

About Some Difference Modifications of Gauss-Newton Method for a Nonlinear Least Squares Problem with Small Residual Norm

In this paper we study the difference analogue of the generalized scheme of the modifications of Gauss-Newton method, proposed in [1]. There are presented the conditions of convergence and estimates of the accuracy of the method for solving Nonlinear Least Squares Problem in the case when the residual is sufficiently small but not equal zero. We determine the influence of valid parameter on rate of convergence of process.

Стаття надійшла до редколегії 8.12.1998

УДК 539.3

П.П.Вагін, Р.Б.Малець, Г.А.Шинкаренко

Квазілінеаризація задачі термопружності для гнучких оболонок з деформівною нормаллю

Дослідження нелінійної теорії оболонок типу Тимошенка з врахуванням обтіску нормального елемента можна знайти в працях

[1,2,3]. У даній роботі сформульовано крайову задачу термопружності для геометрично нелінійної теорії оболонок з деформівною нормаллю та наведено схему квазілінеаризації відповідної варіаційної задачі.

Під квазістатичною задачею термопружності розуміють таку задачу, в котрій не враховуються ефект пов'язаності температурного поля і поля деформацій, а також сили інерції, обумовлені нестационарним температурним полем. Перший етап розв'язування такої задачі полягає в знаходженні температурного поля тонкої оболонки, що в свою чергу зводиться до розв'язування початково-крайової задачі теплопровідності. Потім за відомим температурним полем в кожний момент часу визначають відповідний напружено-деформований стан оболонки, що виникає під дією заданого силового навантаження в умовах нерівномірного нагріву оболонки.

Тут ми обмежимося розглядом процесу нелінійного деформування ізотропних оболонок з деформівною нормаллю під дією силових навантажень та нерівномірного нагріву.

Математична модель задачі базується на геометрично нелінійній теорії оболонок із урахуванням поперечних деформацій за зсувною моделлю Тимошенка (шестимодальний варіант).

1. Постановка крайової задачі квазістатичної термопружності для геометрично нелінійної теорії тонких оболонок з деформівною нормаллю.

Нехай оболонка постійної товщини h в початковому (недеформованому) стані займає область V , обмежену поверхнею S , яка складається з двох лицьових поверхонь Ω_+ , Ω_- та бічної поверхні Σ :

$$V = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega, -h/2 \leq \alpha_3 \leq h/2\},$$

$$S = \Omega_+ \cup \Omega_- \cup \Sigma.$$

Відносимо серединну поверхню оболонки Ω до криволінійної ортогональної системи координат $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$, причому напрямок α_3 нормальний до серединної поверхні Ω , а координатні лінії $\alpha_1 = const$ та $\alpha_2 = const$ співпадають з лініями головних кривин $k_1 = k_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $k_2 = k_2(\alpha_1, \alpha_2)$. Серединна поверхня оболонки має неперервну в площині (α_1, α_2) за Ліпшицем межу Γ ($\Gamma \subset \Sigma$).

Згідно кінематичної гіпотези теорії оболонок типу Тимошенка з нежорсткою нормаллю, яка полягає в тому, що нормальний елемент недеформованої оболонки після її навантаження лишається прямолінійним, але може змінювати свою довжину і не обов'язково є ортогональним до деформованої серединної поверхні, переміщення

довільної точки оболонки $U = \{U_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\}_{i=1}^3$ повністю визначаються переміщеннями u_i та поворотами γ_i нормалі її серединної поверхні

$$U_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \gamma_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

Розв'язування крайової задачі квазістатичної термопружності для геометрично нелінійної теорії тонких зсувних (з деформівною нормаллю) оболонок полягає у знаходженні такого вектора узагальнених переміщень $u = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$, що відповідні вектори компонент тензора деформації $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i=1}^{11} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}, \chi_{13}, \chi_{23})^T$, а також симетричних зусиль і моментів $\sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^{11} = (N_1, N_2, N_3, S, N_{13}, N_{23}, M_1, M_2, H, M_{13}, M_{23})^T$ задовольняють:

- співвідношення між деформаціями та узагальненими переміщеннями

$$\varepsilon = C_1 u + \frac{1}{2} (C_\sigma u)_{11}^T E_\sigma C_\sigma u \quad (1.2)$$

з врахуванням того, що процес деформування оболонки супроводжується малими деформаціями при немалих кутах повороту довільного нескінченно малого об'ємного елемента оболонки. У співвідношеннях (1.2) перший доданок відповідає лінійній складовій деформаційних компонент, тобто за припущення про малі кути повороту граничним переходом можна отримати деформаційні співвідношення лінійної теорії оболонок;

- рівняння рівноваги

$$C_\sigma \sigma^* + P = 0, \quad (1.3)$$

де $P = \{P_i\}_{i=1}^6 = (P_1, P_2, P_3, m_1, m_2, m_3)^T$ – вектор усереднених характеристик зовнішнього навантаження, $\sigma^* = \{\sigma_i^*\}_{i=1}^{14} = (N_{11}^*, N_{22}^*, N_{33}^*, S_{12}^*, S_{21}^*, N_{13}^*, N_{31}^*, N_{23}^*, N_{32}^*, M_{11}^*, M_{22}^*, H^*, M_{13}^*, M_{23}^*)^T$ – вектор введених зусиль-моментів, які зв'язані з симетричними зусиллями і моментами таким чином:

$$\sigma^* = D\sigma. \quad (1.4)$$

З рівнянь рівноваги (1.3), котрі є лінійними відносно введених зусиль-моментів, граничним переходом можна отримати рівняння рівноваги лінійної теорії оболонок, і як частковий випадок рівняння теорії типу Тимошенка [5] або Кіргофа-Лява [4];

- співвідношення термопружності

$$\sigma^* = B\varepsilon - \frac{\alpha_T E}{1-2\nu} F_T \quad (1.5)$$

записані згідно гіпотези Дюамеля-Неймана для ізотропного матеріалу оболонки, яка знаходиться в нерівномірному температурному полі [6]. Тут B – матриця пружних постійних, α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона,

$$F_T = \{F_T^i\}_{i=1}^{11} = \left(t_1 h, t_1 h, t_1 h, 0, 0, 0, t_2 \frac{h^3}{12}, t_2 \frac{h^3}{12}, 0, 0, 0 \right)^T,$$

де t_1, t_2 – усереднені за товщиною температурні характеристики;

- статичні крайові умови на частині межі $\Gamma_\sigma \subset \Gamma$

$$G_1 \sigma^*|_{\Gamma_\sigma} = \sigma_g, \quad (1.6)$$

$\sigma_g^* = (N_t, N_s, N_n, M_t, M_s, M_n)$ – вектор заданих крайових зусиль-моментів;

- кінематичні граничні умови на частині межі $\Gamma_u \subset \Gamma$

$$G_2 u|_{\Gamma_u} = u_g, \quad (1.7)$$

$u_g = (u_t^B, u_s^B, u_n^B, \gamma_t^B, \gamma_s^B, \gamma_n^B)$ – вектор заданих крайових переміщень.

Повний вигляд матриць $C_l, C_\sigma, E_\sigma, C_\sigma, B, D, G_1, G_2, P$ та решти матриць, що буде наведено нижче, можна знайти у праці [2].

2. Варіаційна задача. У даній роботі для розв'язання крайової задачі (1.1)-(1.7) пропонується використати метод скінченних елементів, заснований на варіаційних принципах. Для статичних задач використовується принцип Лагранжа [5]. Відомо [6], що узагальнений варіаційний функціонал Лагранжа квазістатичної термопружності для геометрично нелінійної теорії тонких зсувних оболонок можна отримати з функціоналу Лагранжа в нелінійній теорії оболонок (де принцип Лагранжа трактується лише як принцип стаціонарності функціоналу повної потенціальної енергії), якщо в ньому замінити густину енергії деформації густиною вільної енергії. Отже серед усіх геометрично можливих переміщень, що задовольняють (1.2)- (1.7), істинними будуть ті переміщення, котрі надають функціоналу:

$$\begin{aligned} l(u) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \varepsilon^T(u) E_0 B \varepsilon(u) d\Omega - \iint_{\Omega} \frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)} \varepsilon^T(u) F_T d\Omega - \\ & - \iint_{\Omega} u^T P d\Omega - \int_{\Gamma} (G_2 u)^T \sigma_g d\Gamma \end{aligned} \quad (2.1)$$

стаціонарного значення, тобто:

$$\delta l(u) = 0. \quad (2.2)$$

Умова стаціонарності (2.2) функціоналу (2.1) приводить до рівнянь рівноваги (1.3), та до природних (статичних) граничних умов (1.6). При нелінійному деформуванні не існує єдиного мінімуму вище згаданого функціоналу, оскільки деформації визначаються через переміщення за нелінійними залежностями (1.2).

3. Квазілінеаризація. Розкладемо в ряд вираз (2.1) для вільної енергії в околі її i -того наближення до стаціонарного значення i , нехтуючи величинами вище квадратичних, отримаємо

$$l(u_i + \Delta u) = l(u_i) + \delta l(u_i) + \frac{1}{2} \delta^2 l(u_i). \quad (3.1)$$

Тоді приріст вільної енергії

$$l(u_i; \Delta u) = l(u_i + \Delta u) - l(u_i) = \delta l(u_i) + \frac{1}{2} \delta^2 l(u_i), \quad (3.2)$$

враховуючи (2.1), запишемо наступним чином

$$\begin{aligned} l(u_i; \Delta u) = & - \iint_{\Omega} (\Delta u)^T P d\Omega - \int_{\Gamma} (G_2 \Delta u)^T \sigma_g d\Gamma - \\ & - \frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)} \iint_{\Omega} [\varepsilon(u_i + \Delta u) - \varepsilon(u_i)]^T F_T d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [\varepsilon(u_i + \Delta u) - \varepsilon(u_i)]^T E_0 B [\varepsilon(u_i + \Delta u) - \varepsilon(u_i)] d\Omega + \\ & + \iint_{\Omega} [\varepsilon(u_i + \Delta u) - \varepsilon(u_i)]^T E_0 B \varepsilon(u_i) d\Omega. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Зауважимо, що

$$\varepsilon(u_i + \Delta u) - \varepsilon(u_i) = C_i \Delta u + (C_{\Omega} u_i)_{11}^T E_{\Omega} C_{\Omega} \Delta u + \frac{1}{2} (C_{\Omega} \Delta u)_{11}^T E_{\Omega} C_{\Omega} \Delta u.$$

Нехтуючи величинами, що мають більший ніж другий порядок малості, для приросту вільної енергії остаточно отримаємо

$$\begin{aligned} l(u_i; \Delta u) = & - \iint_{\Omega} (\Delta u)^T P d\Omega - \int_{\Gamma} (G_2 \Delta u)^T \sigma_g d\Gamma - \\ & - \frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)} \iint_{\Omega} [C_i \Delta u + C_N(u_i, \Delta u)]^T F_T d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [C_i \Delta u + C_N(u_i, \Delta u)]^T E_0 B [C_i \Delta u + C_N(u_i, \Delta u)] d\Omega + \\ & + \iint_{\Omega} [C_i \Delta u + C_N(u_i, \Delta u)]^T E_0 B \left[C_i u_i + \frac{1}{2} C_N(u_i, u_i) \right] d\Omega + \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$+ \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [C_N(\Delta u, \Delta u)]^T E_{\theta} B \left[C_I u_i + \frac{1}{2} C_N(u_i, u_i) \right] d\Omega - \\ - \frac{\alpha_T E}{2(1-2\nu)} \iint_{\Omega} [C_N(\Delta u, \Delta u)]^T F_T d\Omega.$$

Тут

$$C_N(a, b) = (C_{\Omega} a)_{11}^T E_{\Omega} C_{\Omega} b.$$

Використовуючи скінченноелементну ізопараметричну апроксимацію [7] представимо шуканий вектор переміщень у вигляді

$$u = N q, \quad (3.5)$$

де q – вектор невідомих вузлових переміщень і поворотів, N – блочно-діагональна матриця апроксимуючих поліномів.

Перетворимо підінтегральні вирази останніх двох інтегралів у формулі (3.4). Для цього введемо вектор

$$T(u_i) = \{T_k\}_{k=1}^{11} = E_{\theta} B \left[C_I u_i + \frac{1}{2} C_N(u_i, u_i) \right] \quad (3.6)$$

і, використовуючи формули для апроксимацій переміщень (3.5), отримаємо

$$\begin{aligned} & [C_N(\Delta Nq, \Delta Nq)]^T E_{\theta} B \left[C_I Nq_i + \frac{1}{2} C_N(Nq_i, Nq_i) \right] = \\ & = [C_N(\Delta Nq, \Delta Nq)]^T T(Nq_i) = (\Delta q)^T \left[\sum_{k=1}^{11} T_k(Nq_i) (C_{\Omega} N)^T E_k C_{\Omega} N \right] \Delta q; \\ & [(C_{\Omega} \Delta Nq)_{11}^T E_{\Omega} C_{\Omega} \Delta Nq]^T F_T = (\Delta q)^T [(C_{\Omega} \Delta Nq)_{11}^T E_{\Omega} C_{\Omega} N]^T E_{\theta} F_T = \\ & = (\Delta q)^T \left[\sum_{k=1}^{11} F_k^T (C_{\Omega} N)^T E_k C_{\Omega} N \right] \Delta q. \end{aligned}$$

Тоді умова (2.2) стаціонарності функціоналу

$$\frac{\partial \Delta I(q_i; \Delta q)}{\partial \Delta q} = K_T(q_i) \Delta q + K(q_i) q_i - R(q_i) = 0. \quad (3.7)$$

Тут використані наступні позначення:

$$K(q_i) = \iint_{\Omega} \left[C_I + (C_{\Omega} Nq_i)_{11}^T E_{\Omega} C_{\Omega} \right] N^T E_{\theta} B \left[C_I + \frac{1}{2} (C_{\Omega} Nq_i)_{11}^T E_{\Omega} C_{\Omega} \right] N d\Omega -$$

матриця січної жорсткості;

$K_T = K_u + G$ – матриця тангенціальної жорсткості,

$$K_u(q_i) = \iint_{\Omega} \left[C_I + (C_{\Omega} Nq_i)_{11}^T E_{\Omega} C_{\Omega} \right] N^T E_{\theta} B \left[C_I + (C_{\Omega} Nq_i)_{11}^T E_{\Omega} C_{\Omega} \right] N d\Omega -$$

матриця переміщень;

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}_i) = \iint_{\Omega} \sum_{k=1}^{11} \left[\mathbf{T}_k(N\mathbf{q}_i) - \frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)} \mathbf{F}_i^k \right]^T (\mathbf{C}_{\Omega} N)^T E_k \mathbf{C}_{\Omega} N d\Omega -$$

матриця початкових напружень або геометрична матриця жорсткості;

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{q}_i) = & \iint_{\Omega} N^T \mathbf{P} d\Omega + \int_{\Gamma} (G_2 N)^T \sigma_g d\Gamma + \\ & + \frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)} \iint_{\Omega} \left\{ \mathbf{C}_i + (\mathbf{C}_{\Omega} N \mathbf{q}_i)_{11}^T E_{\Omega} \mathbf{C}_{\Omega} \right\} N^T E_{\theta} \mathbf{F}_i d\Omega - \end{aligned}$$

матриця-стовпець зовнішнього вузлового навантаження.

Розв'язуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь (3.7) відносно $\Delta \mathbf{q}$, на $i+1$ ітерації знаходимо вектор вузових переміщень і поворотів

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \Delta \mathbf{q},$$

при яких узагальнений варіаційний функціонал задачі квазістатичної термопружності (2.1) в першому наближенні набуває стаціонарного значення. Далі знову розв'язується система (3.7) і продовжується процес уточнення значення функціоналу для стану рівноваги. Алгоритм знаходження стаціонарного значення починається з пробного розв'язку $\mathbf{q}_0 = 0$. При цьому після першої ітерації отримується розв'язок геометрично лінійної задачі

$$\mathbf{K}_T(0) \Delta \mathbf{q} = \mathbf{R}(0).$$

Ітераційний процес закінчується на n -ній ітерації, коли для наперед визначеного числа $\varepsilon > 0$ виконується наступна умова [7]

$$\|\Delta \mathbf{q}\| = \left[\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\frac{\Delta q^j}{q_n^j} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon.$$

Тут k – число ступенів свободи всього ансамблю скінченних елементів, q_i^j – j -та компонента вектора вузових переміщень після i -тої ітерації.

Література.

1. Вагін П.П., Іванова Н.В., Шинкаренко Г.А. Аналіз зсувних оболонок: постановка та коректність варіаційних задач динаміки, Математичні Студії. 1998.- Т. 10, №2.- С.188-198.
2. Вагін П.П., Малець Р.Б., Шинкаренко Г.А. Моделювання нелінійного деформування зсувних оболонок при термосиловому навантаженні / Львів. ун-т. - Львів, 1998.- 29 с. - Бібліогр. : 18 назв. Укр.- Деп. в ДНТБ України 13.04.98 №186-Ук98.
3. Галимов К.З. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. -Казань: КГУ, 1977.- 211 с.
4. Григоренко

Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. - Киев: Вища школа, 1983.- 286 с. 5. Пелех Б.Л. Обобщенная теория оболочек. - Львов: Вища школа, 1978. - 159 с. 6. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. - Киев: Наукова думка, 1978.- 344 с. 7. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. - Рига: Зинатне, 1988.- 284 с.

Vahin P.P., Malets R.B., Shynkarenko G.A.

Quasilinearization of the thermoelasticity problem of elastic shells with deformable normal

In this paper we formulate the boundary-value problem of the static thermoelasticity of shear isotropic shells. The mathematical model is based on geometrically nonlinear shells theory with deformable normal. Physical relations have been adopted due to Dugamel-Neuman hypothesis. Strain-displacement relations acknowledged linear distribution of rotation tensor components respecting to the shell's thickness. The variational problem is solved by Finite Element Methods employing biquadratic isoparametric approximations of displacements.

Стаття надійшла до редколегії 14.12.1998

УДК 517.6

В.Д.Вовк

Проблеми застосування об'єктного підходу до програмної реалізації чисельних методів розв'язування початково-крайових задач

Потреби інженерної практики важко адаптуються до існуючого розмаїття розроблених наукою математичних моделей та методів їх дослідження. Конструктори воліють постійно працювати з одним-двома універсальними пакетами прикладних програм, аніж для кожної конкретної задачі шукати, вивчати і адаптувати спеціалізоване програмне забезпечення, не зважаючи на його високу ефективність. Застосування нових потужних чисельних методів, таких як, наприклад, метод скінчених елементів (МСЕ), в цілому дозволило уніфікувати програмне забезпечення стосовно геометрії досліджуваного об'єкта. Проте спроби підтримки в одному пакеті програм аналізу більшого числа математичних моделей та ще й кількома методами неминуче приво-

дять до критичного росту складності створення, використання та супроводу програмного забезпечення.

Відомо, що ефективним способом розробки складної системи (в тому числі і програмної) є застосування об'єктного підходу. Проте використання елементів об'єктно-орієнтованого програмування (ООП) в реалізаціях окремих алгоритмів (наприклад, чисельних схем) найчастіше не тільки не приводить до їх покращення, а часто супроводжується суттєвим зниженням показників ефективності програмного продукту. Причиною є малоефективність об'єктно-орієнтованого програмування окремих алгоритмів без об'єктного аналізу задачі в цілому. Останній передбачає першочергову розробку повної структури класів, що моделюють об'єкти предметної області задачі та взаємозв'язки між ними. Відомо небагато таких достатньо повних систем класів, що є загальноприйнятими і використовуються багатьма колективами розробників (наприклад MFC фірми Microsoft). Але разом з тим вони демонструють великі переваги єдиного підходу до розуміння основних класових типів, що фігурують у вихідній задачі.

Поняття методу нерозривно зв'язане з областю його застосування. Тому створення повної системи класів для реалізації конкретного чисельного методу, наприклад МСЕ, вимагає попереднього визначення кола математичних моделей для дослідження. В цілях прискорення роботи розробники найчастіше обмежуються однією моделлю, розраховуючи на швидке переналагодження програм під іншу модель за рахунок "силових" засобів ООП. Проте для опису поведінки складних реальних конструкцій, систем та процесів часто необхідне одночасне використання кількох математичних моделей (спряження масивного тіла з тонкою оболонкою, тонкі включення тощо). Отже доводиться "склеювати" в одне ціле кілька програмних комплексів. Нове програмне утворення здебільшого не має ні задовільної ефективності ні достатньої універсальності. Причиною цього є те, що повна система класів кожного конкретного чисельного методу є лише елементом більш загальної структури класів, оскільки всякий метод є похідним від більш загального, як, наприклад, МСЕ є частковим випадком методу Гальоркіна. Таким чином ця повна система класів є лише локально повною і повинна наслідуватись від більш глобальних класових структур. Вершиною ієрархії мав би стати клас з найбільш загальними абстрактними компонентами, що властиві всім без виключення чисельним методам. Зрозуміло, що побудова абсолютно повної системи класів чисельних методів розрахованої на довільну математичну модель є безмежно довгим процесом. Але для розробки системи класів конкретного методу важливо лише щоб він враховував особливості всіх вищих по ієрархії методів. Тому реальна необхідність є лише

у створенні верхівки загальної структури класів чисельних методів. Відсутність такої верхівки приводить до двох негативних наслідків:

- створення високоуніверсального програмного пакету можливе лише шляхом його нарощування програмними реалізаціями окремих математичних моделей, виконаними різними розробниками, проте ці реалізації практично неможливо звести в єдиний програмний продукт;
- розробка основних математичних типів і засобів інтерфейсу між користувачем і програмою виконується заново при створенні кожного нового програмного забезпечення, що приводить до невиправданого дублювання зусиль розробників і потреб в ресурсах комп'ютера.

Нижче запропоновано варіант верхівки повної структури класів чисельного аналізу з прикладом деталізації однієї гілки до рівня МСЕ.

Довільний процес в будь-якій досліджуваній системі описується трьома компонентами:

Дія (об'єкт) $\rightarrow$ результат

Метою вивчення системи чи процесу є знаходження однієї з цих компонент при відомих двох інших. Математична модель процесу може бути записана у вигляді операторного рівняння:

$$A(u) = f, \quad (1)$$

або еквівалентної йому задачі знаходження екстремальних точок функціоналу:

$$\Phi(u) \Rightarrow \min(\max) \quad (2)$$

де A – деякий оператор, який відображає множину U можливих станів системи на множину F допустимих на неї навантажень, а Φ – функціонал, що визначає значення деякої характеристики системи. З огляду на еківалентність (1) та (2) нижче будемо розглядати лише варіант моделі (1).

У найбільш складних випадках оператор A є диференціальним або інтегральним, а шуканий стан $u \equiv u(x)$ системи – функцією набору $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ її основних параметрів, що належать деякій області Ω . Чисельне розв'язування (1) полягає у застосуванні деякої схеми дискретизації оператора A і області Ω , яка дозволяє звести задачу (1) до системи алгебраїчних рівнянь. У частковому випадку $u(x) \equiv x$, коли стан досліджуваної системи визначається просто набором параметрів x , задача (1) безпосередньо формулюється у вигляді системи алгебраїчних рівнянь. Тому далі цей тривіальний випадок розглядатися не буде.

Навантаження f на систему поділяється на дві складові: внутрішнє $\varphi \in R(\Omega)$ та зовнішнє $g \in G(\partial\Omega)$, тобто $f = \{\varphi, g\}$, а $R \cup G = F$. Перший тип навантаження діє на кожний елемент системи, другий – тільки на елементи, що лежать на границі Ω . Відповідно оператор A є об'єднанням двох операторів $\{L, B\}$ з областями визначення $H(\Omega) \cup S(\partial\Omega) = U$, що моделюють реакцію системи на внутрішнє і зовнішнє навантаження. Враховуючи сказане, модель (1) подамо у вигляді наступної крайової задачі:

$$\begin{cases} \text{Задано} & L: H(\Omega) \Rightarrow R(\Omega), \quad B: S(\partial\Omega) \Rightarrow G(\partial\Omega), \\ & \varphi \in R(\Omega), \quad g \in G(\partial\Omega) \\ \text{Знайти} & u \in U \mid Lu = \varphi, \quad Bu|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \quad (3)$$

Поіменуємо позначення: L – оператор математичної моделі, B – оператор крайових умов, H, S – банахові простори з шуканою функцією u , R, G – простори функціоналів, що визначені на H і S відповідно, Ω – досліджувана область, яка у всіх практичних задачах належить суперпозиції евклідового простору R^n і часового інтервалу $[0, T]$.

За побудовою математичної моделі слідує вибір і реалізація методу її дослідження. Далі отриманий розв'язок аналізується з допомогою різноманітних форм його представлення. Сказане приводить до висновку, що у вершині структури класів чисельних методів на одному рівні ієрархії знаходяться три базові класи:



Кожен з них лежить в основі розгалуженого дерева похідних класів. В позначеннях мови C++ нижче покажемо елементи їх реалізації і структуру найближчих рівнів ієрархії.

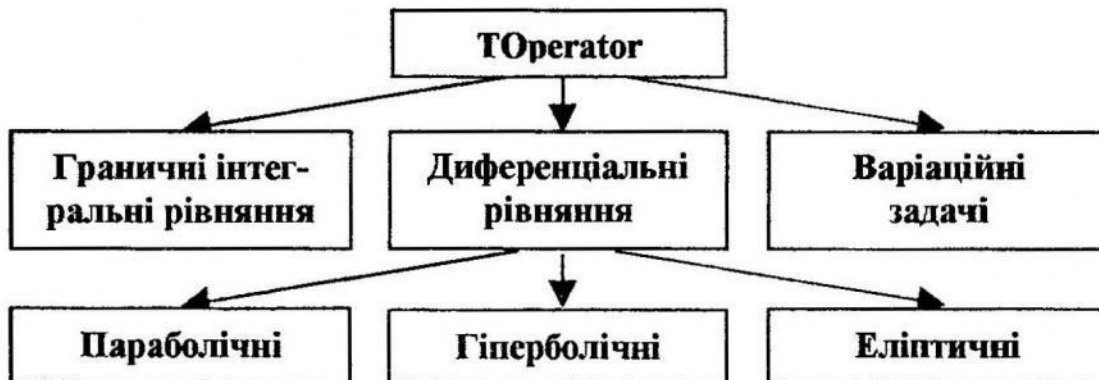
Використовуючи (3) маємо:

```

Class TMathModel
{
    TOperator *L, *B;           // Рівняння моделі і крайових умов
    TFunctional *f, *g;         // Праві частини рівнянь і КУ
    TGeometry *Г;              // Досліджувана область
    ...
}

```

Тут тип TOperator є вершиною наступної піраміди класів :



TFunctional інкапсулює узагальнене поняття функціоналу.

TGeometry лежить у вершині системи класів, що описують геометрію досліджуваних об'єктів.

Всюди нижче ми не приводитимемо повний набір методів (зокрема конструкторів) класів, щоб не загромождувати викладки.

Базовий клас представлення розв'язків :

```

Class TSolution
{double * result;           // Масив значень розв'язків
public :
virtual void show( ) = 0;    // Процедура зображення розв'язку
};
  
```

Для даного класу в силу великої різноманітності методів і засобів відображення результатів розв'язування задач ієрархія похідних класів достатньо не обґрунтована і знаходиться на стадії вивчення.

Більш детально проаналізуємо клас, що узагальнює поняття методу:

```

Class TMethod
{TMathModel model;          // Математична модель
TSolution u;                // Шуканий розв'язок
public :
virtual void solve( ) = 0;   // Процедура пошуку розв'язку
... }
  
```

Даний клас поділяється на три основні гілки :



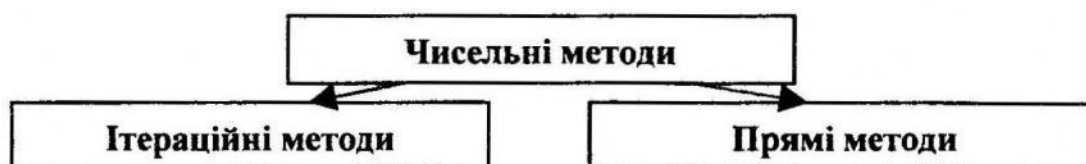
Признаком застосування чисельного методу є дискретизація розглядуваної області $\Omega \supset \Omega_h$, де h – параметр дискретизації, і на її основі заміна нескінченномірному простору U деяким скінченномірним його аналогом $U_h \subset U$ з базисом $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Отже клас чисельних методів має наступний вигляд:

```
Class    TNumericalMethod : public TMethod
{ int nelelem;           // к-ть елементів дискретизації  $\Omega_h$ 
  Telem* elems;          // масив елементів дискретизації  $\Omega_h$ 
  TApproximation * a;     // простір апроксимацій  $U_h$ 
  ... }
```

Чисельні методи полягають в заміні пошуку точного розв'язку вихідної задачі знаходженням параметрів α_i наперед вибраної апроксимуючої функції $\varphi(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, з умови задовільної її близькості до точного розв'язку. Тому базовий клас апроксимацій має наступний вигляд :

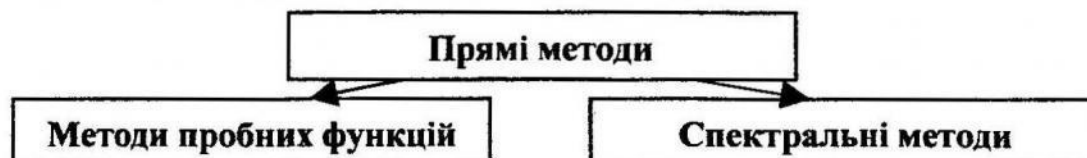
```
Class TApproximation
{ int n;                  // Кількість параметрів
  double * alpha;         // Масив параметрів
  public :
  double value (double, ...) = 0; // Значення апроксимації
  double valued (int, double, ...) = 0; // Значення похідних
  ... }
```

За способом пошуку параметрів α_i чисельні методи поділяються на дві групи :



де група ітераційних методів визначається заданням початкового наближення α_i з подальшим уточненням $\varphi_{j+1} = B(A)\varphi_j$. Конкретний ітераційний метод визначається вибором оператора B , який певним чином пов'язаний з оператором A вихідної задачі.

Прямі методи поділяються на групи вибором умови близькості апроксимуючої функції до точного розв'язку :



апроксимуюча функція $\varphi(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ задовільняє оператор крайової задачі, а підбором параметрів α_i намагаються задовільнити крайові умови (маємо широкий набір спектральних методів);

апроксимуюча функція задовільняє крайовим умовам задачі, а підбором параметрів α_i намагаються задовільнити рівняння моделі (методи пробних функцій).

Методи пробних функцій характеризуються апроксимаціями виду $u^* = \sum_i \alpha_i \varphi_i$, тому :

```
Class TTestApproximation : public TApproximation
{double (fun **)(double, ... );      // Набір пробних функцій
}
```

де функція value (double, ...) вже конкретизується.

На основі даних апроксимацій базуються дві групи методів, що відрізняються способом задовільнення рівнянь моделі :

$\int (F u^* - f)^2 d\Omega \Rightarrow \min$ – середньоквадратичні методи

$\int (F u^* - f) \Psi_i d\Omega = 0$ – проекційні методи (зважених залишків)

де Ψ_i – деякі вагові функції. Таким чином подальша ієрархія класів може бути представлена у вигляді :



Враховуючи сказане можемо записати :

```
Class TTestMethod : public TNumericalMethod
{ TCondition * c; // Правила задовільнення оператору моделі
... }
```

Отже клас проекційних методів Class TProjectMethod : public TTestMethod відрізняється від батьківського лише конкретизацією :


```

Class TProjectCondition : public TCondition
{double (weight **) (double, ... ); // Набір вагових функцій
}

```

Підстановка `weight = fun` з класу `TTestApproximation` приводить до класу `TGaliorKinMethod : public TProjectMethod`

Наведена ієрархія класів в межах статті не претендує ні на достатню повноту структури ні на детальний опис реалізації. За мету даної роботи поставлено лише показ необхідності, можливості і основні напрямки розробки такої ієрархії.

Література.

1. Буч Г. Объектно-ориентированное проектирование с примерами применения: Пер. с англ. – М.: Конкорд, 1992.- 519 с. 2. В.Д.Вовк, Р.Б.Петришин, Г.А.Шинкаренко. Верхівка системи класів програмної реалізації чисельних методів // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. - 1998.- Вип.50.- С. 48-51.

V.D.Vovk

The problems of object approach application to program implementation of the numerical methods of initial-boundary value problems solution.

Some problems of Object-Oriented Approach application to the development of numerical methods software have been investigated. It has been proved that its necessary to analyze the general structure of numerical methods class types for realization all the advantages of Object-Oriented Approach. A well-founded version of program classes top level structure is presented.

Стаття надійшла до редколегії 30.11.1998

УДК 533.6.013.42

В.М.Горlach, Я.В.Кондратюк

Чисельна модель акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною. 4. Осесиметрична задача для ізотропних середовищ з в'язкістю

Дана праця присвячена чисельному моделюванню акустичної взаємодії осесиметричної системи в'язкопружне ізотропне тіло –

ізотропна н'ютонівська рідина. В роботі формулюються початково крайова та варіаційна задачі взаємодії. Для розв'язування варіаційної задачі застосовується проекційно-сіткова схема, базована на методі скінченних елементів та однокроковій рекурентній схемі інтегрування за часом. Ефективність чисельної схеми демонструється на прикладі задачі про імпульсне навантаження нескінченного циліндра заповненого рідиною.

1. Постановка задачі: загальний випадок

В праці [1] задача акустичної взаємодії пужного тіла з рідиною у випадку середовищ з дисипацією була узагальнена наступним чином.

Нехай пружне тіло та рідина займають область $\Omega = \Omega_S \cup \Omega_F$ точок $x = (x_1, x_2, x_3)$ евклідового простору R^3 з межею Γ . Позначимо через $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ . Рух середовища описується вектором переміщень $u = (u_1, u_2, u_3)$, що задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} \rho u_i'' - \sigma_{ij,j} &= f_i \quad \text{в } \Omega \times (0, T] \\ \sigma_{ij,j}(u) &= a_{ijkm} \varepsilon_{km}(u) + c_{ijkm} \varepsilon_{km}(u') \\ \varepsilon_{ij}(u) &= (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2 \end{aligned} \quad (1),$$

граничні умови

$$u_i = 0 \quad \text{на } \Gamma_U, \quad \sigma_{ij} \nu_j = \hat{\sigma}_i \quad \text{на } \Gamma_P \quad (2),$$

причому $\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_P$, Γ_U – не порожня множина точок.

Для визначеності розв'язку до (1)–(2) додаємо початкові умови:

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1 \quad \text{в } \Omega \quad (3)$$

де ρ – густина, $f = (f_1, f_2, f_3)$ – інтенсивність розподілених джерел звуку в середовищі, яке заповнює область Ω , $\{a_{ijkm}\}$ і $\{c_{ijkm}\}$ – модулі пружності та в'язкості, відповідно, зі звичайними властивостями симетрії та додатньої визначеності.

Вектор переміщень $u = (u_1, u_2, u_3)$ введений наступним чином:

$$u = \begin{cases} u^S, & x \in \Omega_S \\ u^F, & x \in \Omega_F \end{cases}.$$

Тут u^S та u^F переміщення в пружному тілі та рідині відповідно.

2. Постановка задачі: осесиметричний випадок

Будемо припускати, що форма взаємодіючої системи пружне тіло – рідина та діючі на неї механічні навантаження осесиметричні. Тоді, якщо розглядуваний об'єкт віднесений до циліндричної системи координат (r, z, θ) , достатньо провести аналіз акустичних полів в його меридіанному перетині, наприклад, в площині $\theta = 0$. Розглянемо випадок взаємодії в'язкої стисливої рідини з в'язкопружним

ізотропним тілом. Для ізотропного в'язкопружного тіла тензор a_{ijkl} модулів пружності та тензор c_{ijklm} модулів в'язкості мають вигляд [2]:

$$a_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

$$c_{ijklm} = \eta \delta_{ij} \delta_{kl} + \xi (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

а компоненти тензора напружень приймуть вигляд

$$\sigma_{ij} = \{\lambda \theta(u) + \eta \theta(u')\} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u) + 2\xi \varepsilon_{ij}(u')$$

де $\theta = \varepsilon_{kk}$, δ_{ij} – одиничний симетричний тензор другого рангу, λ , μ – параметри Ламе, ξ , η – коефіцієнти в'язкості.

Нехай границя меридіанного перетину середовища $\Gamma = \partial\Omega$ складається з частин що не перетинаються $\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_P \cup \Gamma_0$. При цьому: Γ_U – нерухома, а Γ_P – вільна (або з заданим тиском) частини границі Γ ; на Γ_0 , яка співпадає з віссю обертання OZ , мають місце умови симетрії.

Таким чином початково-крайова задача (1) у випадку не-стаціонарної акустичної взаємодії осесиметричної системи в'язкопружне ізотропне тіло – в'язка стислива рідина приймає вигляд:

Знайти вектор-функцію $u(r, z, t) = (u_r, u_z)$ таку, що

$$\begin{cases} \rho u_r'' - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \sigma_{rr}(u)] + \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta}(u) - \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{rz}(u) = f_r \\ \rho u_z'' - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \sigma_{rz}(u)] - \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}(u) = f_z \end{cases} \quad \text{в } \Omega \times (0, T]$$

$$u_r = 0, \quad u_z = 0 \quad \text{на } \Gamma_U \times [0, T]$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(u) \cos(\nu, r) + \sigma_{rz}(u) \cos(\nu, z) = \bar{\sigma}_r \\ \sigma_{rz}(u) \cos(\nu, r) + \sigma_{zz}(u) \cos(\nu, z) = \bar{\sigma}_z \end{cases} \quad \text{на } \Gamma_P \times [0, T]$$

$$u_r = 0, \quad \sigma_{rz}(u) = 0 \quad \text{на } \Gamma_0 \times [0, T]$$

$$u_r = u_r^0, \quad u_z = u_z^0 \quad \text{в } \Omega \quad \text{при } t = 0$$

$$u_r' = u_r^1, \quad u_z' = u_z^1 \quad \text{в } \Omega \quad \text{при } t = 0$$

$$\sigma_{rr}(u) = \lambda e(u) + 2\mu \varepsilon_{rr}(u) + \eta e(u') + 2\xi \varepsilon_{rr}(u')$$

$$\sigma_{\theta\theta}(u) = \lambda e(u) + 2\mu \varepsilon_{\theta\theta}(u) + \eta e(u') + 2\xi \varepsilon_{\theta\theta}(u')$$

$$\sigma_{zz}(u) = \lambda e(u) + 2\mu \varepsilon_{zz}(u) + \eta e(u') + 2\xi \varepsilon_{zz}(u')$$

$$\sigma_{rz}(u) = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \xi \left(\frac{\partial u_z'}{\partial r} + \frac{\partial u_r'}{\partial z} \right) = 2\mu \varepsilon_{rz}(u) + 2\xi \varepsilon_{rz}(u')$$

$$e(u) = \varepsilon_{rr}(u) + \varepsilon_{zz}(u) + \varepsilon_{\theta\theta}(u) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial}{\partial z} u_z$$

Коефіцієнти λ , μ , η , ξ введені наступним чином:

$$\lambda = \begin{cases} \rho_F c^2 & \text{в } \Omega_F; \\ \lambda_S & \text{в } \Omega_S; \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} 0 & \text{в } \Omega_F; \\ \mu_S & \text{в } \Omega_S; \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} \eta_F & \text{в } \Omega_F; \\ \eta_S & \text{в } \Omega_S; \end{cases} \quad \xi = \begin{cases} \xi_F & \text{в } \Omega_F; \\ \xi_S & \text{в } \Omega_S; \end{cases}$$

де ρ_F – густина рідини, c – швидкість звуку в рідині, λ_S, μ_S – коефіцієнти Ламе пружного тіла, $\eta_F, \xi_F, \eta_S, \xi_S$ – коефіцієнти в'язкості рідини та пружного тіла відповідно.

3. Постановка задачі: варіаційне формулювання

Побудувавши принцип віртуальних робіт перейдемо до варіаційної постановки задачі.

Введемо простори

$$V = \{v = (v_r, v_z)^T \in H^1(\Omega)^2 \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_U\}, \quad H = L^2(\Omega)^2.$$

Варіаційна постановка задачі має вигляд:

$$\begin{cases} \text{Задано } l \in L^2(0, T; V'), u_0 \in V, u^1 \in H \\ \text{Знайти } u \in L^2(0, T; V) \text{ таку що} \\ m(u''(t), v) + c(u'(t), v) + a(u(t), v) = \langle l(t), v \rangle \\ a(u(0) - u^0, v) = 0, \quad m(u'(0) - u^1, v) = 0 \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Тут білінійні форми та лінійний функціонал введені наступним чином:

$$\begin{cases} m(u, v) = \int_{\Omega} \{\rho u v_r + \rho u_z v_z\} dr dz \\ d(u, v) = \int_{\Omega} \{\lambda e(u) e(v) + 2\mu(\varepsilon_{rr}(u)\varepsilon_{rr}(v) + \varepsilon_{\theta\theta}(u)\varepsilon_{\theta\theta}(v) + \varepsilon_{zz}(u)\varepsilon_{zz}(v)) + 4\mu\varepsilon_{rz}(u)\varepsilon_{rz}(v)\} dr dz \\ c(u, v) = \int_{\Omega} \{\eta e(u) e(v) + 2\xi(\varepsilon_{rr}(u)\varepsilon_{rr}(v) + \varepsilon_{\theta\theta}(u)\varepsilon_{\theta\theta}(v) + \varepsilon_{zz}(u)\varepsilon_{zz}(v)) + 4\xi\varepsilon_{rz}(u)\varepsilon_{rz}(v)\} dr dz \\ \langle l, v \rangle = \int_{\Omega} \{f_r v_r + f_z v_z\} dr dz - \int_{\Gamma_p} \{\sigma_r v_r + \sigma_z v_z\} r dy \end{cases}$$

4. Проекційно-сіткова схема

Для розв'язування варіаційної задачі застосовується проекційно-сіткова схема інтегрування за часом [1,3], яка з використанням матричних позначень має наступне алгебраїчне представлення:

$$\text{Задано } \Delta t, \beta, \gamma = \text{const} > 0; \{U^j\}, \{V^j\} \subset R^N.$$

$$\text{Знайти } \{U^{j+1}\}, \{V^{j+1}\} \subset R^N \text{ такі що}$$

$$\begin{cases} \{M + \Delta t \gamma C + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta A\} V^{j+\gamma} = \gamma \Delta t \{L_{j+1/2} - A U^j\} \\ + \{M + \frac{1}{2} \Delta t^2 (\beta - 2\gamma^2) A\} V^j, \\ \text{де } U^{j+1} = U^j + \frac{1}{2} \Delta t [V^{j+1} + V^j], \quad V^{j+1} = V^j + \frac{1}{\gamma} [V^{j+\gamma} - V^j], \quad j = 0, 1, \dots, K. \end{cases}$$

5. Задача про імпульсне навантаження нескінченного в'язкопружного циліндра заповненого рідиною

Розглянемо задачу про імпульсне навантаження нескінченного в'язкопружного циліндра заповненого рідиною. Нехай в початковий момент часу гідропружна система перебуває в стані спокою. В наступні моменти часу на сисему діє навантаження характеристики якого приведені на рис.1. Будемо припускати, що сила, яка діє на циліндр, розподілена по його поверхні рівномірно.

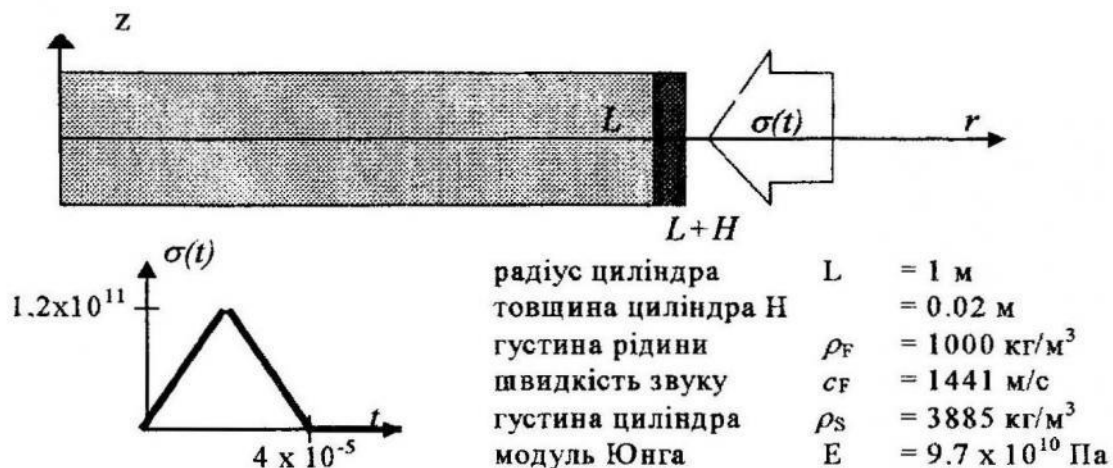


Рис. 1.

В даній постановці задачу можемо розглядати як одновимірну, розв'язок якої залежить тільки від \$t\$.

Розв'язуючи задачу за побудованою вище проекційно-сітковою схемою з використанням лінійних апроксимацій методу скінченних елементів отримаємо значення шуканих величин в дискретні моменти часу \$t_j\$.

Розрахунки проводились при 100, 200 та 400 елементів в рідині та 5, 10, 20 по товщині циліндра. При такій структурі розрахункової сітки обмеження, що накладаються умовою Куранта на крок по часу мають вигляд \$\Delta t_1 \leq 3.6e^{-7}\$, \$\Delta t_2 \leq 1.8e^{-7}\$ та \$\Delta t_3 \leq 9e^{-8}\$ відповідно. Проведені розрахунки на різних просторових та часових сітках підтверджують очікуваний порядок збіжності чисельного розв'язку як по \$r\$ так і по \$t\$.

Приведені нижче результати отримані на сітці із 100 елементів в рідині та 10 елементів по товщині циліндра.

Просторовий профіль поля швидкостей при $t=0.00048$

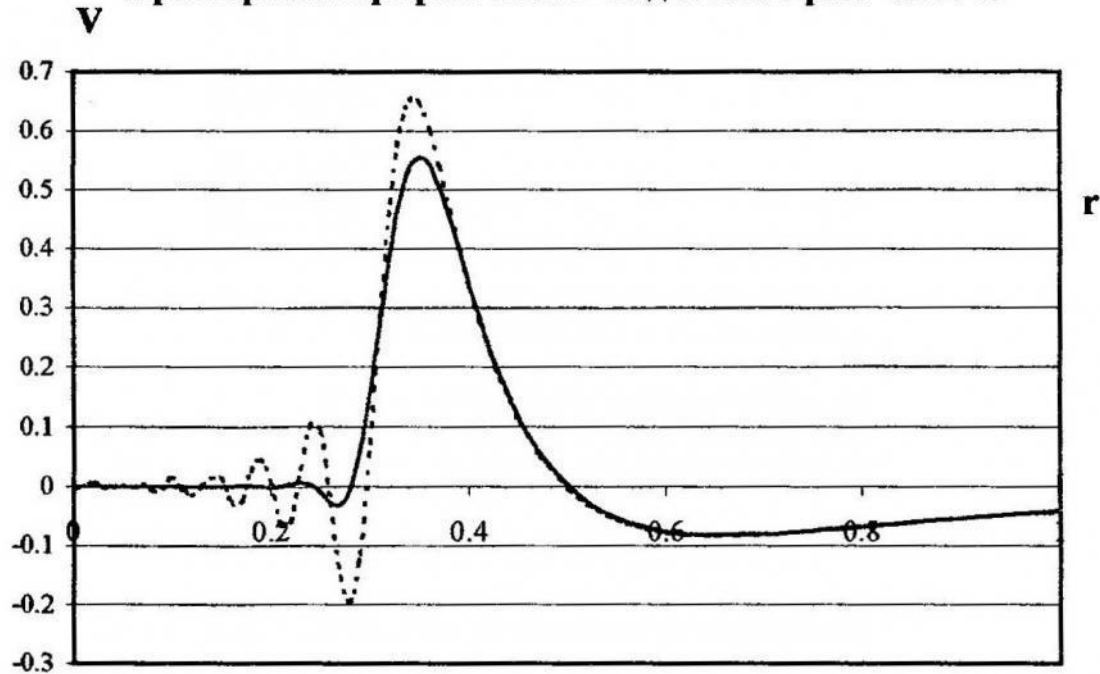


Рис. 2

Розподіл тиску в рідині при $t=0.00048$

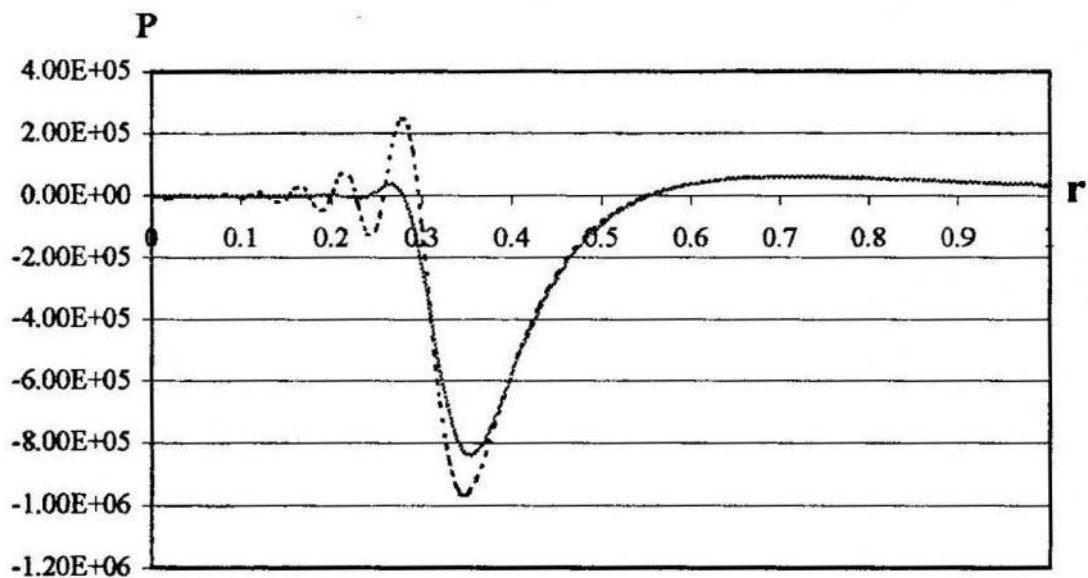


Рис. 3

На рис 2, 3 зображені просторовий профіль поля швидкостей та розподіл тиску в рідині в момент часу $t=0.00048$. Причому пунктирні лінії відповідають розв'язку задачі для ідеальних середовищ, суцільні – для середовищ з дисипацією.

На цих рисунках добре помітно, що у випадку ідеальних середовищ в зонах нерегулярності шуканого розв'язку має місце нефізична поведінка чисельного розв'язку. Перед переднім фронтом хвилі спостерігаємо осциляції чисельного розв'язку, оскільки пояснити поведінку розв'язку фізичними міркуваннями авторам не вдалось. Врахування в'язкості середовищ дозволяє позбутись цих осциляцій.

Добре погодження інтегральних характеристик наближеного розв'язку можна побачити на рис 4 для всіх моментів часу.

Графік повної енергії гідропружної системи

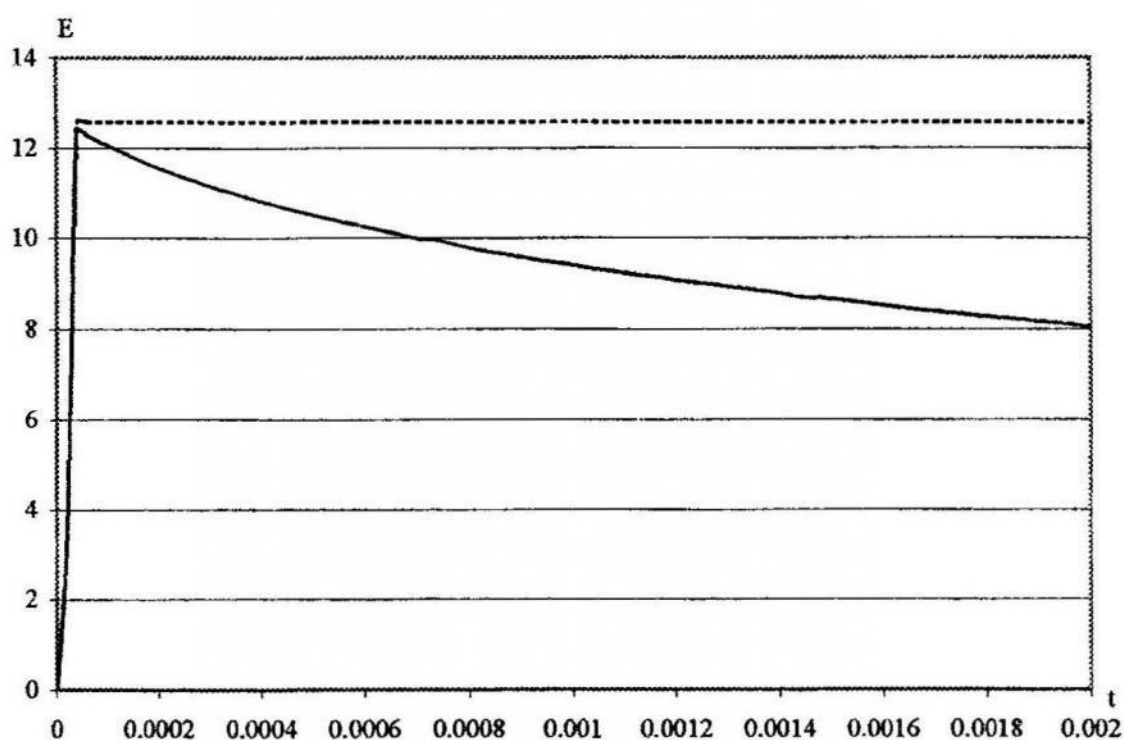


Рис. 4

На цьому рисунку зображена повна енергія гідропружної системи у випадку ідеальних середовищ та середовищ з дисипацією. У випадку ідеальних середовищ інтенсивність дисипації енергії рівна нулю. Відсутність втрат енергії в системі підтверджується незмінністю повної енергії після зняття навантаження. У випадку середовищ з дисипацією спостерігаємо втрати енергії гідропружної системи.

Література.

1. Горлач В.М., Кондратюк Я.В. Чисельна модель акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною. 3. Аналіз впливу в'язкості середовищ // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1997. Вип. 46. С.25-32.
2. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел.-МГУ. 1976. -376с.
- 3.

Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач.- Київ: УМК ВО, 1991.- 87с.

Horlatch V., Kondratyuk Y.

Numerical analysis of the fluid-structure acoustic interaction.

4. Axial-symmetric problem in case of viscous mediums

This paper presents investigation displacement-based fluid finite elements methodology for the determination of the transient dynamic fluid-structure acoustic interaction. The viscosity of the fluid will be taken into consideration with a view to get rid of the oscillation of the numeric solution. Dynamic problem involving the interaction between an elastic structure and an acoustic fluid will be formulated for FEM solution by using fluid displacement as the fundamental unknown in the fluid region.

Using equation of acoustic fluid-structure interaction in case of axial-symmetric system viscoelastic isotropic structure – isotropic newtonian fluid with appropriate boundary and initial conditions variational formulation will be derived. Numerical analysis will be included finite elements semidiscretization and one-step time integration schemes for the solution of the mentioned variational problem. The computational efficiency of the methodology will be demonstrated on the shock wave propagation example.

Стаття надійшла до редколегії 22.12.1998

УДК 517.958:536.12

Є.Г. Грицько, Р.В. Гудзь, Л.М. Журавчак, Г.В. Фітель

Числово-аналітичний спосіб розв'язування нестационарної задачі теплопровідності з нелінійними граничними умовами

Визначенню температурних полів при змінному коефіцієнті теплопровідності з границі тіла у літературі приділяється значна увага, наприклад, [6,7]. Однак задачі теплопровідності для тіл неканонічної форми із залежністю коефіцієнта теплопровідності від координат, часу і температури розглянуті ще недостатньо.

У роботі пропонується ефективна числово-аналітична методика розв'язування нестационарних задач теплопровідності для тіл складної геометричної форми при змішаних граничних умовах у випадку, коли гранична умова III роду є нелінійною.

© Грицько Є.Г., Гудзь Р.В., Журавчак Л.М., Фітель Г.В., 1998

Розглянемо плоский криволінійний трикутник, сторони якого l_m задаються наступним чином [1,2] :

$$l_m = \left\{ (x_1, x_2) : x_s = \sum_{j=1}^3 \varphi_j(\eta) x_{ms}^j, \quad s=1,2 \right\}, \quad m=\overline{1,3}, \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi_1(\eta) &= 0.5\eta(\eta-1), & \varphi_2(\eta) &= 0.5\eta(\eta+1), \\ \varphi_3(\eta) &= (1-\eta)(1+\eta), & \eta &\in [-1, 1], \end{aligned}$$

x_{ms}^j – декартові координати вузлів, що задають форму криволінійного трикутника, причому $x_{1s}^2 = x_{2s}^1$, $x_{2s}^2 = x_{3s}^1$, $x_{3s}^2 = x_{1s}^1$ – вузли, що містяться у вершинах трикутника, x_{1s}^3 , x_{2s}^3 , x_{3s}^3 – вузли, що містяться приблизно посередині відповідно кривих l_1 , l_2 , l_3 .

Необхідно знайти функцію температури $\theta(x, \hat{\tau})$ в області $\Omega \in R^2$, обмеженій сторонами криволінійного трикутника, при змішаних граничних умовах на її границі $\partial\Omega = \bigcup_{m=1}^3 l_m$. Вважаємо, що на стороні l_1 задано значення температурного поля, на l_2 – розподіл інтенсивності теплового потоку. Через l_3 відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем. Коефіцієнт тепловіддачі з l_3 залежить від координат, часу і температури, що приводить до нелінійної граничної умови III роду

$$\partial\theta/\partial n + h(x, \hat{\tau}, \theta(x, \hat{\tau})) [\theta - \theta_c(x, \hat{\tau})] = 0, \quad (x, \hat{\tau}) \in l_3 \times T. \quad (2)$$

Тут n – зовнішня нормаль до $\partial\Omega$, $h(x, \hat{\tau}, \theta(x, \hat{\tau}))$ – критерій Біо, $\theta_c(x, \hat{\tau})$ – температура зовнішнього середовища, $T = \{\hat{\tau} : 0 < \hat{\tau} \leq \infty\}$, $\hat{\tau}$ – час.

Таким чином, для знаходження температурного поля $\theta(x, \hat{\tau})$ одержуємо нелінійну крайову задачу, в яку входять умови (2) та

$$\partial^2 \theta / \partial x_1^2 + \partial^2 \theta / \partial x_2^2 = \partial \theta / \partial \hat{\tau}, \quad (x, \hat{\tau}) \in \Omega \times T, \quad (3)$$

$$\theta = \theta_0(x), \quad \hat{\tau} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$\theta = \theta_\Gamma(x, \hat{\tau}), \quad (x, \hat{\tau}) \in l_1 \times T, \quad (5)$$

$$-\partial \theta / \partial n = q_\Gamma(x, \hat{\tau}), \quad (x, \hat{\tau}) \in l_2 \times T, \quad (6)$$

де $\theta_0(x)$, $\theta_\Gamma(x, \hat{\tau})$, $q_\Gamma(x, \hat{\tau})$ – задані функції, що описують відповідно початковий температурний стан в Ω , температуру на l_1 та величину теплового потоку з l_2 , і задовільняють наступним умовам:

$$\lim_{x \rightarrow l_1} \theta_0(x) = \lim_{\hat{\tau} \rightarrow 0} \theta_\Gamma(x, \hat{\tau}), \quad \lim_{x \rightarrow l_2} \partial \theta_0 / \partial n = \lim_{\hat{\tau} \rightarrow 0} q_\Gamma(x, \hat{\tau}).$$

Для розв'язування (2)-(6) будемо використовувати схему “послідовності початкових умов” [4]. При використанні даної схеми на кожному k -му кроці по часу $(k-1)\Delta\tau < \hat{\tau} \leq k\Delta\tau$, $\Delta\tau$ – величина кроку по часу, вводиться локальний час τ , такий, що

$$\tau = \hat{\tau} - (k-1)\Delta\tau,$$

$$]0, \hat{\tau}] = \bigcup_{v=1}^{k-1}](v-1)\Delta\tau, v\Delta\tau] \cup](k-1)\Delta\tau, \tau], \quad \bigcup_{v=1}^0](v-1)\Delta\tau, v\Delta\tau] = 0,$$

і розв'язується крайова задача для $\theta_k(x, \tau)$, яка формується шляхом введення функцій $\theta_{0k}(x)$, $\theta_{\Gamma k}(x, \tau)$, $q_{\Gamma k}(x, \tau)$, $\theta_{ck}(x, \tau)$ замість $\theta_0(x)$, $\theta_\Gamma(x, \hat{\tau})$, $q_\Gamma(x, \hat{\tau})$, $\theta_c(x, \hat{\tau})$ відповідно, причому

$$\theta_{0k}(x) = \begin{cases} \theta_0(x), & k=1, \\ \theta_{k-1}(x, (k-1)\Delta\tau), & k>1, \end{cases} \quad (7)$$

$$A_k(x, \tau) = A(x, (k-1)\Delta\tau + \tau), \quad A \in \{\theta_\Gamma, q_\Gamma, \theta_c\}.$$

Зауважимо, що для $\theta(x, \hat{\tau})$ виконується наступне співвідношення:

$$\theta(x, \hat{\tau}) = \sum_{v=1}^k \theta_v(x, \tau) \chi_{v\tau}(\hat{\tau}), \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq \hat{\tau} \leq k\Delta\tau, \quad (8)$$

$$\chi_{v\tau}(\hat{\tau}) = \begin{cases} 1, & (v-1)\Delta\tau < \hat{\tau} \leq v\Delta\tau, \\ 0, & \hat{\tau} \leq (v-1)\Delta\tau, \quad \hat{\tau} > v\Delta\tau. \end{cases} \quad (9)$$

Для достатньо малого значення $\Delta\tau$ на k -му кроці залежність критерію Біо від шуканої функції $\theta(x, \hat{\tau})$ апроксимуємо так:

$$h(x, \hat{\tau}, \theta(x, \hat{\tau})) = h_k(x, \tau, \theta_{0k}(x, \tau)). \quad (10)$$

Тоді для визначення $\theta_k = \theta_k(x, \tau)$ одержимо крайову задачу:

$$\partial^2 \theta_k / \partial x_1^2 + \partial^2 \theta_k / \partial x_2^2 = \partial \theta_k / \partial \tau, \quad (x, \tau) \in \Omega \times \Delta T, \quad (11)$$

$$\theta_k = \theta_{0k}(x), \quad \tau = 0, \quad x \in \Omega, \quad (12)$$

$$\theta_k = \theta_{\Gamma k}(x, \tau), \quad (x, \tau) \in I_1 \times \Delta T, \quad (13)$$

$$-\partial \theta_k / \partial n = q_{\Gamma k}(x, \tau), \quad (x, \tau) \in I_2 \times \Delta T, \quad (14)$$

$$\partial \theta_k / \partial n + h_k(x, \tau, \theta_{0k}(x)) [\theta_k - \theta_{ck}(x, \tau)] = 0, \quad (x, \tau) \in I_3 \times \Delta T, \quad (15)$$

де $\Delta T =]0, \Delta \tau]$.

Згідно непрямого методу граничних елементів [1,2,4] запишемо інтегральне зображення розв'язку диференціального рівняння крайової задачі (11) - (15):

$$\theta_k = \int_0^\tau d\xi_4 \int_{\partial\Omega} g_k(\xi, \xi_4) E d\partial\Omega(\xi) + \int_{\Omega} \theta_{0k}(\xi) E(x, \tau, \xi, 0) d\Omega(\xi), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} -\partial \theta_k / \partial n = & \int_0^\tau d\xi_4 \int_{\partial\Omega} g_k(\xi, \xi_4) F d\partial\Omega(\xi) + \\ & + \int_{\Omega} \theta_{0k}(\xi) F(x, \tau, \xi, 0) d\Omega(\xi), \end{aligned} \quad (17)$$

де $g_k(\xi, \xi_4)$ – невідома функція інтенсивності "фіктивних" джерел тепла, що вводиться на $\partial\Omega \times \Delta T$,

$$E = E(x, \tau, \xi, \xi_4) = \exp\left\{-r^2/4(\tau - \xi_4)\right\} [4\pi(\tau - \xi_4)]^{-1},$$

$$F = F(x, \tau, \xi, \xi_4) = y_s n_s \exp\left\{-r^2/4(\tau - \xi_4)\right\} [8\pi(\tau - \xi_4)]^{-2},$$

$$r^2 = y_s y_s, \quad y_s = x_s - \xi_s, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in R^2, \quad \xi_4 \in \Delta T,$$

(x_1, x_2, τ) – координати точок спостереження, (ξ_1, ξ_2, ξ_4) – координати, які співпадають з (x_1, x_2, τ) і уведені для зручності опису точок області, у якій міститься джерело тепла.

Розіб'ємо границю області $\partial\Omega$ на граничні елементи Γ_i , тобто $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, N}$, та проведемо дискретизацію внутрішньої області Ω криволінійними чотирикутними елементами Ω_l , такими, що $\Omega = \bigcup_{l=1}^L \Omega_l$, $\Omega_l \cap \Omega_q = \emptyset$, $l \neq q$, $l, q = \overline{1, L}$.

Згідно проекційно-сіткової методики [5,3] апроксимуємо функцію $g_k(\xi, \xi_4)$ на кожному граничному елементі Γ_i невідомими константами d_{ik} :

$$g_k(\xi, \xi_4) = \sum_{i=1}^N d_{ik} \chi_{i\Gamma}(\xi), \quad (18)$$

де $\chi_{i\Gamma}(\xi) = 1$ при $\xi \in \Gamma_i$, $\chi_{i\Gamma}(\xi) = 0$ при $\xi \notin \Gamma_i$.

Це дозволяє записати дискретні аналоги співвідношень (16), (17):

$$\theta_k^* = \sum_{i=1}^N d_{ik} \Phi_{1i}^{(k)}(E, x, \tau) + \sum_{l=1}^L \Phi_{2l}^{(k)}(E, x, \tau), \quad (19)$$

$$-\partial \theta_k^* / \partial n = \sum_{i=1}^N d_{ik} \Phi_{1i}^{(k)}(F, x, \tau) + \sum_{l=1}^L \Phi_{2l}^{(k)}(F, x, \tau). \quad (20)$$

Тут θ_k^* використовується замість θ_k внаслідок апроксимаційних операцій (18),

$$\Phi_{1i}^{(k)}(f, x, \tau) = \int_0^\tau d\xi_4 \int_{\Gamma_i} f(x, \tau, \xi, \xi_4) d\Gamma_i(\xi), \quad (21)$$

$$\Phi_{2l}^{(k)}(f, x, \tau) = \int_{\Omega_l} \theta_{0k}(\xi) f(x, \tau, \xi, 0) d\Omega_l(\xi). \quad (22)$$

Для знаходження невідомих констант d_{ik} застосуємо колокаційну методику [1], згідно з якою на $\partial\Omega$ уведемо точки спостереження x_p^0 , які виберемо приблизно посередині кожного Γ_p , $p = \overline{1, N}$, і будемо вимагати точного виконання граничних умов (13) - (15) у точках $(x_p^0, \Delta\tau)$. У результаті одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення d_{ik} на k -му кроці по часу:

$$\sum_{i=1}^N A_{pi}^{(k)} d_{ik} = b_{pk}, \quad p = \overline{1, N}, \quad (23)$$

де

$$A_{pi}^{(k)} = \begin{cases} \Phi_{1i}^{(k)}(E, x_p^0, \Delta\tau), & x_p^0 \in l_1, \\ \Phi_{1i}^{(k)}(F, x_p^0, \Delta\tau), & x_p^0 \in l_2, \\ -\Phi_{1i}^{(k)}(F, x_p^0, \Delta\tau) + h_k(x_p^0, \tau, \theta_{0k}(x_p^0)) \times \\ \times \Phi_{1i}^{(k)}(E, x_p^0, \Delta\tau), & x_p^0 \in l_3, \end{cases} \quad (24)$$

$$b_{pk} = \begin{cases} \theta_{\Gamma k}(x_p^0, \Delta\tau) - \sum_{l=1}^L \Phi_{2l}^{(k)}(E, x_p^0, \Delta\tau), & x_p^0 \in l_1, \\ q_{\Gamma k}(x_p^0, \Delta\tau) - \sum_{l=1}^L \Phi_{2l}^{(k)}(F, x_p^0, \Delta\tau), & x_p^0 \in l_2, \\ \sum_{l=1}^L \Phi_{2l}^{(k)}(F, x_p^0, \Delta\tau) + h_k(x_p^0, \Delta\tau, \theta_{0k}(x_p^0)) \times \\ \times \left[\theta_{ck}(x_p^0, \Delta\tau) - \sum_{l=1}^L \Phi_{2l}^{(k)}(E, x_p^0, \Delta\tau) \right], & x_p^0 \in l_3, \end{cases} \quad (25)$$

Інтегрування по граничних та внутрішніх елементах у формулах, що містять вирази (21), (22), проводимо числово-аналітично з аналітичним виділенням особливості, коли точки спостереження x_p^0 належать відповідно областям інтегрування Γ_i , Ω_i , та числово з використанням квадратурних формул Гауса у протилежному випадку [4].

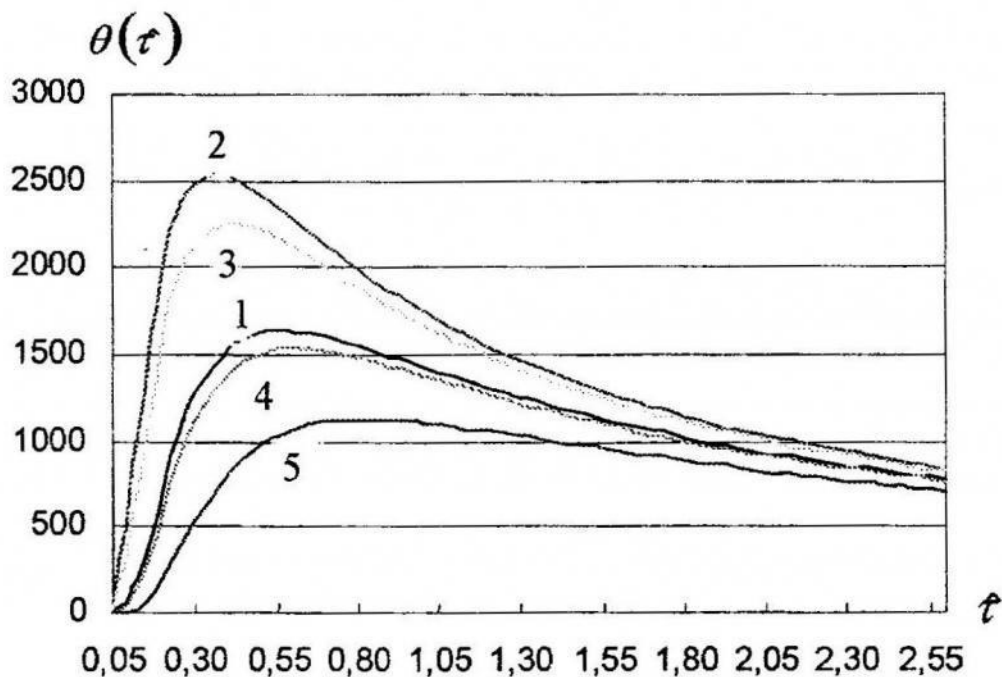
Розв'язавши систему лінійних алгебраїчних рівнянь (23) і підставивши одержані значення d_{ik} у формули (19), (20), знайдемо розв'язок крайової задачі (11) - (15) при $(k-1)\Delta\tau < \hat{\tau} \leq k\Delta\tau$ у вибраних точках спостереження. Повторюючи цей процес, одержимо мінімальний набір значень $\theta_k^*(x, \tau)$ до моменту часу, скажімо, $\hat{\tau} = N\Delta\tau$, що дає можливість визначити температуру у довільний момент часу $\hat{\tau}: N\Delta\tau \leq \hat{\tau} \leq (N+1)\Delta\tau$ у будь-якій точці $x^e \in \bar{\Omega}$.

Числові дослідження нестационарного температурного поля $\theta(x, \hat{\tau})$ проводились для криволінійного трикутника з наступними значеннями координат вузлів: $x_{11}^1 = 0$, $x_{12}^1 = 2$, $x_{11}^2 = 1$, $x_{12}^2 = 0$, $x_{11}^3 = 0,5$, $x_{12}^3 = 1$, $x_{21}^2 = 2$, $x_{22}^2 = 0$, $x_{21}^3 = 1,5$, $x_{22}^3 = 0$, $x_{31}^3 = 1$, $x_{32}^3 = 1$. Нагадаємо, що $x_{21}^1 = x_{11}^2$, $x_{22}^1 = x_{12}^2$, $x_{31}^1 = x_{21}^2$, $x_{32}^1 = x_{22}^2$, $x_{31}^2 = x_{11}^3$, $x_{32}^2 = x_{12}^3$.

Криві 1 - 5 зображують залежність температури від часу відповідно у точках з координатами (1,5; 0,1), (1,1; 0,5), (0,8; 1,0), (0,4; 1,5), (0,2; 1,8). При цьому вирази для функцій $h(x, \hat{\tau}, \theta)$, $\theta_c(x, \hat{\tau})$, $\theta_{\Gamma}(x, \hat{\tau})$, $q_{\Gamma}(x, \hat{\tau})$ та $\theta_0(x)$ вибирались рівними відповідно

$$h(x, \hat{\tau}, \theta) = h_0(\theta)(x_1 + x_2)\hat{\tau}^{-1}, \quad \theta_c(x, \hat{\tau}) = 0, \\ \theta_{\Gamma}(x, \hat{\tau}) = C \exp((e_2 x_1^2 + e_1 x_1 + e_0)\hat{\tau}^{-1})\hat{\tau}^{-1}, \quad q_{\Gamma}(x, \hat{\tau}) = 0, \quad \theta_0(x) = 0,$$

де $h_0(\theta) = C_1(1 + C_2(\theta - \theta_i))S_+(\theta - \theta_i)$; $C_1 = 0,354$; $C_2 = 0,2$;
 $\theta_i = 1840^\circ \text{C}$; $S_+(\zeta) = 1$ при $\zeta > 0$, $S_+(\zeta) = 0$ при $\zeta \leq 0$; $C = 12,6$;
 $e_2 = -1,25$; $e_1 = 2$; $e_0 = -1$.



Як показали числові дослідження, запропонована методика лінеаризації з використанням схеми "послідовності початкових умов" може бути успішно застосована до розв'язування нестационарних крайових задач при нелінійних граничних умовах для тіл довільної форми.

Література.

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. - М.: Мир, 1984. - 494 с.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. - М.: Мир, 1987. - 524 с.
3. Грицько Е.Г. Смешанная задача теплопроводности для прямоугольного параллелепипеда // Физика и химия обраб. материалов - 1980, № 6. - С. 21 - 25.
4. Журавчак Л.М., Грицько Е.Г. Метод приграничных элементов у прикладних задачах математичної фізики. - Львів: Карпатське відд. Ін-ту геофізики НАН України, 1996. - 219 с.
5. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М.: Наука, 1981. - 416 с.
6. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. - М.: Наука, 1984. - 368 с.
7. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Громовык В.И., Лозбень В.Л. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. - Киев: Наукова думка, 1977. - 158 с.

Grits'ko E., Gudz R., Zhuravchak L., Fitel G.

Numerically-analytic method of solution of nonstationary heat problem with nonlinear boundary conditions

In this paper we consider some application of the boundary element method for solution of nonstationary heat problem for the bodies with complicated geometry and boundary conditions of mixed type in the case when boundary conditions of the third kind is nonlinear.

Стаття надійшла до редколегії 3.11.1998

УДК 517.958

І.І. Дияк

**Комбінована чисельна схема
для дослідження задач пластичності**

Проблемі дослідження задач пластичності на основі використання різних теорій присвячене широке коло сучасних досліджень [1,5-7]. Використання чисельних методів та можливості сучасних комп'ютерів зробили можливим розв'язання багатьох практично важливих інженерних задач. Але проблема побудови ефективних чисельних схем залишається однією з найактуальніших.

Для дослідження нелінійних задач широко застосовуються як метод скінченних елементів (МСЕ) так і метод граничних елементів (МГЕ). У багатьох практично важливих інженерних застосуваннях область пластичної поведінки матеріалу є локальною, тому використання фізичних гетерогенних моделей (тобто одночасне використання як моделі пружного так і моделі пластичного деформування) є оправданим [8]. У задачах пластичності з використанням рівнянь теорії малих пружнопластичних деформацій широко використовується або метод змінних параметрів пружності або метод пружних розв'язків [1,5,6]. МСЕ ефективніший, ніж МГЕ для розв'язання нелінійних задач [7]. У даній статті пропонується комбінована схема МСЕ та МГЕ (числова гетерогенна апроксимація) фізично гетерогенної моделі для двовимірних фізично нелінійних задач [8].

1. Визначимо пружнопластичний напружено-деформований стан тіла, яке обмежене поверхнею $\partial\Omega$, та знаходиться у початковий момент часу t_0 у ненапруженому та недеформованому стані, а потім

навантажене поверхневими та об'ємними силами. Тіло виготовлене з одного або декількох ізотропних матеріалів. Вважається, що під дією навантаження елементи тіла деформуються за межею пружної роботи матеріалу по прямолінійних траєкторіях або близьких до таких з можливим пружним розвантаженням, деформації повзучості при цьому малі у порівнянні з миттєвими пружними та пластичними складовими. Задачу будемо розв'язувати в квазістатичній постановці у межах малих деформацій. Процес навантаження розіб'ємо на етапи таким чином, щоб моменти часу, що розділяють етапи навантаження, співпадали зі зміною напрямку процесу деформування [1,6].

Напружено-деформований стан тіла визначається з рівнянь рівноваги [5,6]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0, \quad (i, j = 1, 2), \quad x \in \Omega \subset R^2, \quad (1)$$

з врахуванням кінематичних крайових умов:

$$u_i = g_i, \quad (i = 1, 2), \quad x \in \partial\Omega_u, \quad (2)$$

статичних крайових умов:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = h_i, \quad (i, j = 1, 2), \quad x \in \partial\Omega_t, \quad (3)$$

причому $\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_t = \partial\Omega$, а $\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_t = \emptyset$.

Мають місце співвідношення Коші:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (i, j = 1, 2). \quad (4)$$

Фізичні співвідношення у відповідності з теорією малих пружно-пластичних деформацій подамо у вигляді [1,5,6]:

$$\sigma_{ij} = 2G' \varepsilon_{ij} + \lambda' \theta \delta_{ij} - \sigma_{ij}^D, \quad (i, j = 1, 2). \quad (5)$$

Тут введені позначення u_i – компоненти вектора переміщень, ε_{ij} – компоненти тензора деформацій, σ_{ij} – компоненти тензора напружень, $F = (F_1, F_2)^T$ – вектор масових сил, g_i – задані значення переміщень, n_i – компоненти одиничного вектора зовнішньої нормалі до границі $\partial\Omega_t$; h_i – задані значення компонент вектора поверхневих сил, $\theta = \varepsilon_{ii}$, $(i, j = 1, 2)$, δ_{ij} – символ Кронекера. Величини G' , λ' , σ_{ij}^D – у загальному випадкові залежать від напружено-деформованого стану тіла та визначаються з відповідних співвідношень [6] через функцію Ψ

$$\Psi = \Gamma^* / 2S = 1 / 2G',$$

тут S – інтенсивність дотичних напружень

$$S = (\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij})^{1/2},$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}, \quad \sigma_0 = \sigma_{ii} / 3, \quad (i, j = 1, 2),$$

Γ^* – інтенсивність деформацій зсуву, яка визначається:

$$\Gamma^* = \left[\frac{1}{2} (e_{ij} - e_{ij}^{ln}) (e_{ij} - e_{ij}^{ln}) \right]^{1/2},$$

тут $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{ii} / 3, \quad (i, j = 1, 2),$

де $e_{ij}^{ln} = \varepsilon_{ij}^{ln}$ – непружні складові компонент тензора деформацій у момент розвантаження, $e_{ij}^{ln} = 0$ у початковий момент часу t_0 і

$$\Gamma^* = \Gamma = (\frac{1}{2} e_{ij} e_{ij})^{1/2}.$$

Залежність $S = \Phi(\Gamma)$, задається у вигляді діаграми деформування, яка визначається експериментально[6].

Далі вважається, що зона пластичної поведінки матеріалу локалізована у частині області Ω_1 , а решта матеріалу тіла у області $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ характеризується лінійною поведінкою, причому $\partial\Omega_c = \Omega_1 \cap \Omega_2$.

2. Для побудови наближеного розв'язку задачі процес деформування тіла представляється послідовністю рівноважних станів. На кожному етапі навантаження компоненти напружень, деформацій та переміщень визначаються шляхом розв'язування крайової задачі для систем нелінійних диференціальних рівнянь (1) у частині області Ω_1 та лінійних у Ω_2 .

Лінеаризація задачі проводиться методом змінних параметрів пружності [1,6], в основі якого лежить представлення залежностей напружень від деформацій за теорією малих пружно-пластичних деформацій у формі узагальненого закону Гука, в якому параметри пружності залежать від напруженого стану в точці, а тому різні у різних точках області Ω_1 . У результаті вихідна нелінійна задача приводиться до послідовності лінійних задач – задач теорії пружності для неоднорідних тіл. Алгоритм МСЕ на основі методу Гальоркіна, напевне, найпоширеніший для розв'язання задач такого класу. У випадкові, коли розміри області Ω_1 набагато більші за розміри області Ω_2 і поведінка розв'язку задачі, в основному, цікавить всередині Ω_1 ,

ефективнішою буде запропонована далі у даній роботі гетерогенна чисельна схема МСЕ та МГЕ [2,4].

Визначимо енергетичний простір, який відповідає області Ω_1 [2]:

$$H_{\Gamma_u}^1(\Omega_1) := \{v \in H^1(\Omega_1) : v = 0 \text{ на } \partial\Omega_1 \cap \Gamma_u\},$$

тут і далі $\Gamma_u = \partial\Omega_u$, $\Gamma_t = \partial\Omega_t$, а $\Gamma_c = \partial\Omega_c$.

Простір слідів гранично-елементної області Ω_2 визначимо як $H^{\frac{1}{2}}(\Omega_2)$, а спряжений до нього – як $H^{-\frac{1}{2}}(\Omega_2)$. Введемо позначення $\langle \sigma, v \rangle = \int_{\partial\Omega_2} (\sigma, v) dS$, де $(\bullet, \bullet)$ — скалярний добуток у R^1 . Введемо

підпростір:

$$H_0^{-\frac{1}{2}}(\Omega_2) := \left\{ x \in \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Omega_2) \right)^2 : \int_{\Omega_1} x dS = 0, \int_{\partial\Omega_1} r x dS = 0 \right\},$$

де r – радіус-вектор точки. Визначимо також добуток просторів:

$$U = \left\{ (u_F, \tilde{u}) \in (H^1(\Omega_1))^2 \times \left(H^{\frac{1}{2}}(\Omega_2) \right)^2, u_F = \tilde{u} \text{ на } \Gamma_c \right\}$$

Тепер простір тестових функцій для області Ω_2 визначається так:

$$V_{\Gamma_u} = \left\{ (v_F, \tilde{v}) \in U : v_F \in (H_{\Gamma_u}^1(\Omega_1))^2, \tilde{v} = w \text{ на } \partial\Omega_2, w \in (H^1(\Omega))^2, w|_{\Gamma_c} = 0 \right\}$$

Тоді варіаційну постановку задачі можна сформулювати:

Знайти

$$((u_F, \tilde{u}), u_B, t_B) \in U \times \left(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_2) \times H_0^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_2) \right) \quad (6)$$

з $u_F = g$ на $\Gamma_u \cap \partial\Omega_1$ і $\tilde{u} = g$ на $\Gamma_u \cap \partial\Omega_2$, що задовільняють рівняння

$$a_F(u_F, v_F) + \langle t_B, \tilde{v} \rangle = f(v_F), \quad \forall (v_F, \tilde{v}) \in V_1 \quad (7)$$

та варіаційні умови спряження:

$$\langle \tilde{u} - u_B, \tau_B \rangle = 0 \quad \forall \tau_B \in \left(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_2) \right)^2. \quad (8)$$

Тут у рівнянні (7):

$$a_F(u_F, v_F) = \int_{\Omega_1} \tilde{D} \varepsilon_{ij}(u_F) \varepsilon_{ij}(v_F) d\Omega$$

$$f(v_F) = \int_{\Gamma_t} h v_F d\Gamma,$$

де $\tilde{\mathbf{D}}$ – матриця змінних параметрів пружності [5,6], а

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}_B, \tilde{\mathbf{v}} \rangle &= \langle \mathbf{S} \mathbf{u}_B, \tilde{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathbf{D} \mathbf{u}_B, \tilde{\mathbf{v}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{t}_B, \tilde{\mathbf{v}} \rangle + \langle \mathbf{t}_B, \mathbf{K} \tilde{\mathbf{v}} \rangle + \langle \mathbf{V} \mathbf{t}_B, \tau \rangle - \\ &- \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}_B, \tau \rangle - \langle \mathbf{K} \mathbf{u}_B, \tau \rangle. \end{aligned}$$

Тут $\mathbf{t}_B$ – вектор поверхневих зусиль, а вигляд псевдодиференціальних операторів $\mathbf{S}, \mathbf{D}, \mathbf{K}, \mathbf{V}$ наведений у [2].

Дискретизацію варіаційної задачі (7),(8) проводимо методом Бубнова-Гальоркіна, з використанням білінійних і біквадратичних апроксимацій переміщень на сирендипових чотирикутниках у області Ω_1 і лінійних та квадратичних апроксимації поверхневих зусиль і переміщень на криволінійних відрізках у області Ω_2 [4]. На кожному ітераційному кроці методу змінних параметрів пружності отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з симетричною матрицею частково стрічкової структури [4]. Елементи матриці знаходимо за допомогою квадратурних формул Гаусса-Лежандра, застосовуючи для обчислення сигулярних і гіперсингулярних інтегралів спеціальні методики. Розв'язання цієї системи проводимо з використанням як прямого модифікованого методу Холецкого [4] так і ітераційного методу – модифікованого методу спряжених градієнтів [3]. Розв'язавши на першому кроці пружну задачу, та визначивши на кожному СЕ дискретизації у гауссових вузлах змінні параметри пружності переформовуємо, СЕ частину матриці системи рівнянь. Критерій зупинки ітераційного процесу вибираємо аналогічно як і у [1].

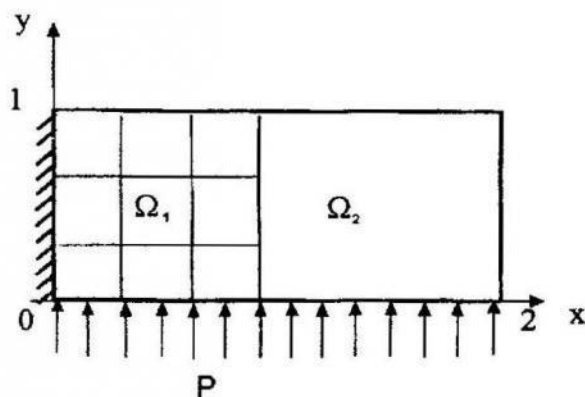


Рис. 1

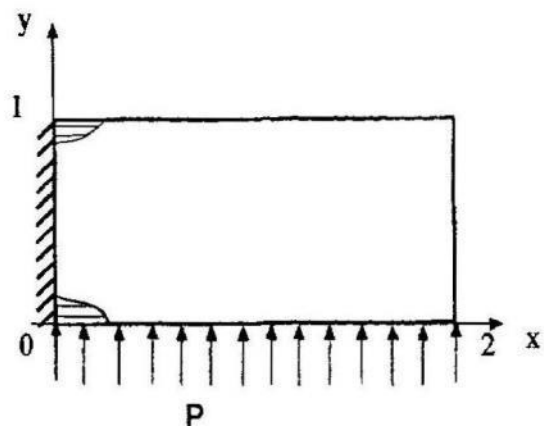


Рис. 2

3. Розглядалася тестова задача визначення пружно-пластичного деформування жорстко зашемленого на одній із границь об'єкта під дією рівномірно розподіленого навантаження. Геометрія перетину

площиною об'єкта $z = \text{const}$ та граничні умови схематично зображені на Рис.1. Задача розглядалась для таких значень параметрів: $P=1\text{МПа}$;

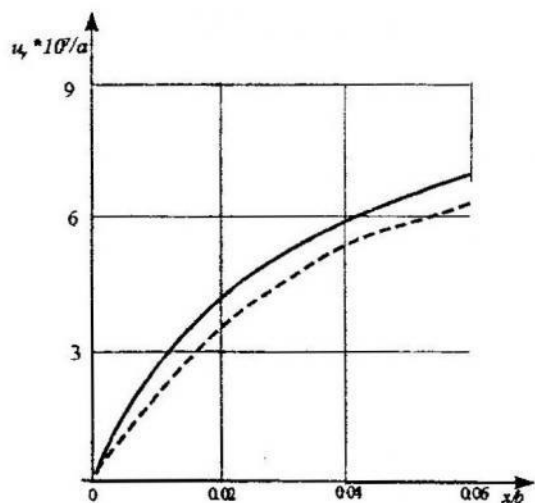


Рис.3

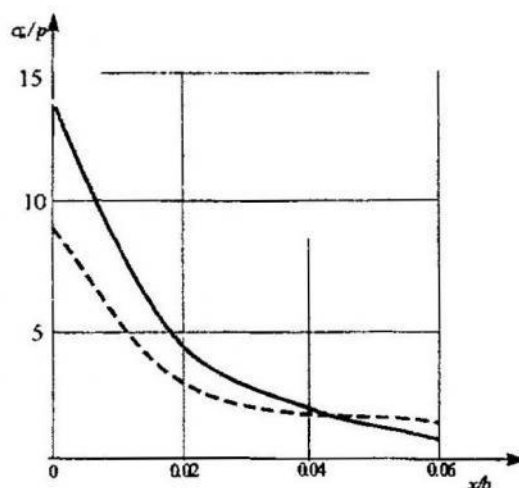


Рис.4

$\nu=0.3$, $E=2 \times 10^7 \text{МПа}$; матеріал вважався ідеально пластичним з межею пружності $\sigma_b=10 \text{МПа}$. Враховуючи крайові умови задачі, апіорі можемо передбачити виникнення пластичних зон в околі заданих умов защемлення. Для вибраних параметрах задачі пластичні деформації виникають у зонах об'єкта, які зображені на Рис.2. На Рис.3,4 наведено розподіл переміщень u_y , і напружень σ_{xx} по лініях $y=0.0$ та $y=1.0$ відповідно у зонах пластичності. Пунктирною лінією наведений розв'язок задачі пружності. Зона спряження областей Ω_1 та Ω_2 у цьому випадкові вибиралася по прямій $x=1.0.1$

Література.

1. Бабешко М.Е., Савченко В.Г. Об одном методе реализации последовательных приближений в краевых задачах термопластичности.//Прикл. механика, т.34, №3, 1998,-с.37-44.
2. Дияк І.І. Симетрична скінченно-гранично-елементна апроксимація D-адаптивної моделі теорії пружності.//Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.-1996, вип. 44. с.102-107.
3. Дияк І.І., Марчук Ю.Б. Застосування ітераційних методів для дослідження комбінованих схем методів скінченних та граничних елементів.//Вісник ЛДУ сер. мех.-мат.-1995, вип.41. с.43-48.
4. Дияк І.І., Чернуха А.Ю. Чисельне дослідження задачі теорії пружності на основі комбінації методів граничних та скінченних елементів.// Вісник ЛДУ сер.мех.-мат.-1993,вип. 39.с. 41-46.
5. Карзов Г.П. Марголин Б.З. Физико-механическое моделирование процессов разрушения.- СПб.: Политехника,1993.-391с
6. Шевченко Ю. Н., Бабешко М.Е., Пискун В.В., Савченко В.Г. Пространственные задачи

термопластичности.-К.: Научная думка, 1980.-261с. 7. Schnack E. Mixed methods in BEM for elasto-plastic problems.// Boundary Element VIII:Proc. 8th Int. Conf., Tokyo, 1986, pp.641-651. 8. Quarteroni A. Multifields modeling in numerical simulation on partial differential equations.//GAMM- Mitteilungen 1996, Heft 1,p.45-63.

I.I. Dyyak

The combined numerical scheme for the problems of plasticity

The paper presents some aspects of the formulation and numerical implementation of physical and mathematical multifields model for 2-D elasticity problem. The numerical investigation of the problem is performed by coupling Direct Boundary Element for the part of construction which is described by equations of the theory of elasticity and Finite Element Method for the remaining part of construction which is described by equations of the theory of plasticity. Numerical example is presented supporting the analysis.

Стаття надійшла до редколегії 10.12.1998

УДК 539.3

А.В.Дубовик, А.М.Олійник

Застосування методів комп'ютерної алгебри до розв'язування осесиметричної задачі теорії пружності та теплопровідності

Серед методів розв'язування задач механіки суцільного середовища метод скінченних елементів займає особливе місце завдяки своєму достатньо простому математичному формулюванню, очевидному фізичному змісту і високій ефективності. З розвитком комп'ютерної техніки цей метод дістав широкого використання. Важливим етапом методу скінченних елементів є формування системи рівнянь, з якої шукаються невідомі параметри. Велике значення при цьому має час обчислення матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, особливо при великій кількості скінченних елементів. Проблема знаходження елементів системи зводиться до обчислення певних інтегралів, вигляд яких залежить від конкретної задачі. Ця проблема може бути розв'язана двома шляхами:

- чисельним інтегруванням за квадратурними формулами (як правило це квадратурні формули Гауса)

- аналітичним обчисленням за допомогою пакетів комп'ютерної алгебри (там де це є можливим)

В даній роботі робиться спроба порівняти ефективність цих підходів для розв'язування осесиметричних задач теорії пружності та теплопровідності. Отримані результати вказують на певні переваги аналітичного способу обчислення матриць СЛАР.

Напружено-деформований стан тіла в осесиметричній задачі теорії пружності описується рівнянням рівноваги, рівнянням Коші, законом Гука[1,4], які можна записати у матричному вигляді:

$$\begin{cases} D\vec{\sigma} + \vec{F} = 0 \\ \vec{\varepsilon} = D_1\vec{u} \\ \vec{\sigma} = C\vec{\varepsilon} \end{cases} \quad x \in \Omega \quad (1)$$

$$\vec{\varepsilon} = D_1\vec{u} \quad x \in \Omega \quad (2)$$

$$\vec{\sigma} = C\vec{\varepsilon} \quad (3)$$

де D , D_1 – відомі диференціальні оператори, а C – матриця пружних констант[1].

Ця система доповнюється граничними умовами на поверхні тіла:

Статичні умови

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = p_{nn} \\ \sigma_{n\tau} = p_{n\tau} \end{cases}, x \in S_1 \quad (4a)$$

Кінематичні умови

$$\begin{cases} u_n = \tilde{u}_n \\ u_\tau = \tilde{u}_\tau \end{cases}, x \in S_2 \quad (4b)$$

Тут $S_1 \cup S_2 = \partial\Omega$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Диференціальні співвідношення (1)-(2)-(3), замкнені граничними умовами (4a) або (4b), становлять крайову задачу про деформацію осесиметричного тіла. Задача полягає у знаходженні компонент тензора напружень σ , деформації ε та компонент вектора переміщень u .

Варіаційна постановка цієї задачі полягає у мінімізації функціоналу потенціальної енергії деформованого тіла:

$$\Pi(\vec{u}) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{\sigma}^T \vec{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \vec{F}^T \vec{u} d\Omega - \int_{S_2} (u_n p_{nn} + u_\tau p_{n\tau}) dS$$

на множині вектор-функцій $V \in W_2^{(1)}(\Omega)$, що задовольняють кінематичні граничні умови (4b). Використовуючи скінченноелементну апроксимацію

$$\vec{u} = N \tilde{u}, \vec{F} = N \tilde{F}, \vec{p} = N \tilde{p},$$

на основі процедури Бубнова-Гальоркіна, крайова задача зводиться до знаходження переміщень у вузлах СЕ сітки на основі розв'язання СЛАР $K\tilde{u} = G\tilde{p} + L\tilde{F}$, де

$$K = \int_{\Omega} (D_1 N)^T C (D_1 N) d\Omega \quad G = \int_{\partial\Omega} N^T B^T N dS$$

$$L = \int_{\Omega} N^T N d\Omega$$

Тут N – вектор базисних функцій. Якщо $\vec{n} = (n_1, n_2)$, $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ – одинична зовнішня нормаль та дотична до $\partial\Omega$, то

$$B = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{pmatrix}$$

Матриці K_e, G_e, L_e (матриці на скінченному елементі) матимуть наступну структуру:

$$K_e = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{11}^{(2)} & \dots & \dots & K_{1n}^{(1)} & K_{1n}^{(2)} \\ K_{11}^{(3)} & K_{11}^{(4)} & \dots & \dots & K_{1n}^{(3)} & K_{1n}^{(4)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ K_{n1}^{(1)} & K_{n1}^{(2)} & \dots & \dots & K_{nn}^{(1)} & K_{nn}^{(2)} \\ K_{n1}^{(3)} & K_{n1}^{(4)} & \dots & \dots & K_{nn}^{(3)} & K_{nn}^{(4)} \end{pmatrix},$$

$$G_e = \begin{pmatrix} G_{11}^{(1)} & G_{11}^{(2)} & \dots & \dots & G_{1n}^{(1)} & G_{1n}^{(2)} \\ G_{11}^{(3)} & G_{11}^{(4)} & \dots & \dots & G_{1n}^{(3)} & G_{1n}^{(4)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ G_{n1}^{(1)} & G_{n1}^{(2)} & \dots & \dots & G_{nn}^{(1)} & G_{nn}^{(2)} \\ G_{n1}^{(3)} & G_{n1}^{(4)} & \dots & \dots & G_{nn}^{(3)} & G_{nn}^{(4)} \end{pmatrix},$$

$$L_e = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \dots & \dots & L_{1n} & 0 \\ 0 & L_{11} & \dots & \dots & 0 & L_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ L_{n1} & 0 & \dots & \dots & L_{nn} & 0 \\ 0 & L_{n1} & \dots & \dots & 0 & L_{nn} \end{pmatrix}$$

Елементи матриць визначаються за такими формулами:

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{(0)} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu) \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{N_i}{r} \frac{N_j}{r} d\Omega + \frac{1-2\nu}{2} \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} d\Omega + \right. \\
&\quad \left. + \nu \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{N_j}{r} + \frac{N_i}{r} \frac{\partial N_j}{\partial r} d\Omega \right\} \\
K_{ij}^{(2)} &= K_{ji}^{(3)} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \frac{1-2\nu}{2} \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial r} d\Omega + \nu \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \frac{N_i}{r} \frac{\partial N_j}{\partial z} d\Omega \right\} \\
K_{ij}^{(4)} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \frac{1-2\nu}{2} \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} d\Omega + (1-\nu) \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} d\Omega \right\} \\
G_{ij}^{(1)} &= G_{ij}^{(4)} = \int_{-1}^1 N_i N_j z'(\alpha) r(\alpha) d\alpha, \quad G_{ij}^{(2)} = -G_{ij}^{(3)} = \int_{-1}^1 N_i N_j r'(\alpha) r(\alpha) d\alpha, \\
L_{ij} &= \int_{\Omega_e} N_i N_j d\Omega
\end{aligned}
\tag{5}$$

Варіаційна постановка осесиметричної задачі теплопровідності полягає у мінімізації функціоналу енергії

$$\Pi(T) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\text{grad } T)^T \lambda_q (\text{grad } T) - 2wT - 2cT\dot{T}) d\Omega + \int_{S_2} qT dS + \int_{S_3} \frac{1}{2} h(T - T_c)T dS$$

при заданому $T|_{S_1} = \bar{T}$. Тут $\partial \Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, w – питома потужність джерел тепла, q – тепловий потік через поверхню S_2 , h – коефіцієнт тепловіддачі, T_c – температура середовища. На частині поверхні S_1 підтримується температура $\bar{T}$, на S_2 задано тепловий потік q через поверхню, а на S_3 відбувається теплообмін з зовнішнім середовищем, температура якого T_c . В початковий момент температура тіла T_0 .

Після використання скінченноелементної апроксимації крайова задача зводиться до розв'язування наступної системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} MT + C\dot{T} = f \\ T(0) = T_0 \end{cases},$$

де

$$\begin{aligned}
M &= \int_{\Omega} (\text{grad } N)^T \lambda_q (\text{grad } N) d\Omega + \int_{S_2} hN^T N dS, \quad C = \int_{\Omega} cN^T N d\Omega, \\
f &= \int_{\Omega} N^T N d\Omega \tilde{w} - \int_{S_2} N^T N dS \tilde{q} + \int_{S_3} hN^T N dS \tilde{T}_c
\end{aligned}$$

Перше рівняння перепишемо так:

$$[K + hG(S_2)]T_e + cE\dot{T}_e = E\tilde{w} - G(S_2)\tilde{q} + hG(S_3)\tilde{T}_e.$$

Елементи матриць на скінченному елементі обчислюються за наступними формулами:

$$K_{ij} = \int_{\Omega_e} (k_r \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + k_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z}) d\Omega, \quad G_{ij}(S) = \int_{S \cap \Omega} N_i N_j dS,$$

$$E_{ij} = \int_{\Omega_e} N_i N_j d\Omega \quad (6)$$

Саме інтеграли (5) і (6) нам і потрібно обчислити чисельним інтегруванням чи (де це можливо) аналітично за допомогою пакету Mathematica [2,3] для вибраних скінченних елементів та базисних функцій. Для цього використовувалися такі оператори системи Mathematica

`Integrate[f(x,y),{x,x1,x2},{y,y1,y2}]` – оператор інтегрування по двовимірній області

`D[f(x,y),x]`, `D[f(x,y),y]` – оператори обчислення часткових похідних.

Прості оператори мають синтаксис C++.

Для розбиття області використовувались СЕ серендипового типу [1,5]. Зауважимо, що лише для прямокутних СЕ з рівномірним розташуванням вузлів на границях можливе аналітичне обчислення інтегралів.

Було реалізовано набір модулів на мові C++ для обчислення матриць на СЕ при білінійній, біквадратичній та бікубічній апроксимації аналітичним та чисельним методами.

Було проведено аналіз цих двох підходів. В наведених нижче таблицях порівнюється час обчислення матриць в мілісекундах (для Pentium-120)

а) задача про деформації

порядок	К			Е		
	аналітично	чисельно	відношення	аналітично	чисельно	відношення
1	0.022	0.181	8	0.0044	0.0516	11
2	0.099	1.279	12	0.0164	0.247	15
3	0.225	4.278	19	0.0374	0.945	25

б) задача теплопровідності

порядок	K			G			E		
	анал.	чис.	відн.	анал.	чис.	відн.	анал.	чис.	відн.
1	0.0066	0.077	11	0.0027	0.0083	3	0.005	0.061	12
2	0.022	0.395	17	0.044	0.016	3	0.016	0.292	18
3	0.044	1.181	26	0.072	0.031	4	0.039	0.867	22

Цікавим є також питання про точність обчислення окремих елементів матриць (5), (6). Ці результати представлені в таблицях:

а) задача про деформації

порядок	K		E
	елементи типу 1*	інші елементи	
1	0.003	9e-14	2e-14
2	0.0005	2e-12	1e-14
3	0.006	4e-5	3e-9

*Примітка: під елементами типу 1 матриці K розуміємо елементи $K_{ij}^{(1)}$

Бачимо, що елементи типу 1 неможливо точно обчислити чисельним шляхом, але як показали тести на реальних задачах на розв'язок це не має впливу.

б) задача теплопровідності

порядок	K	G	E
1	3e-14	3e-14	2e-14
2	6e-14	2e-14	1e-14
3	5e-8	5e-9	3e-9

Таким чином, отримані результати демонструють значний вииграш в швидкості обчислення матриць аналітичним методом. Виграшу в точності чи швидкості збіжності результатів при згущуванні сітки SE не спостерігається. Для криволінійних SE можна користуватись лише чисельним способом. При розбитті домена на скінченні елементи бажано здійснювати розбиття таким чином, щоб максимальна кількість SE була прямокутними, а решта – криволінійними для забезпечення апроксимації границі домена. Таким способом розбиття ми доб'ємося максимальної швидкості побудови матриць СЛАР.

Література.

1. Сахаров А.С., Альтенбах и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел, К.:Вища школа, 1982, 2. Steven

Wolfram. Mathematica: A System for doing Mathematics by Computers, 3. Nancy Blachman. Mathematica: a practical approach, Prentice-Hall, 1991, 4. Розин Л. А. Метод конечных элементов в приложениях к упругим системам, М.:Стройиздат, 1977, 5. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация, М.:Мир, 1987

Dubovyk A.V., Oliynyk A.M.

The application of computer algebra methods to the solution of axisymmetric elasticity and heat transfer problems

The possibilities of using package of "Mathematica" for generating FEM system of algebraic equations are discussed. The FE stiffness matrices for axisymmetric problems of elasticity and heat transfer are obtained in analytical form. The efficacy of this approach is compared with standard numerical integration procedure.

Стаття надійшла до редколегії 1.12.1998

УДК 517.946

І.М.Дудзяний, В.М.Цимбал

Деяка задача для сингулярно збуреного рівняння третього порядку

Задачами для сингулярно збурених рівнянь у частинних похідних основних типів: еліптичних, параболічних та гіперболічних присвячена багаточисленна література. Значно менше вивчені задачі для сингулярно збурених рівнянь у частинних похідних, що не входять у цю класифікацію.

Тут розглядається задача для сингулярно збуреного неklasичного рівняння третього порядку в області $D = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$

$$\varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

$$u(0, t, \varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial u(0, t, \varepsilon)}{\partial x} = 0, \quad u(l, t, \varepsilon) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = 0, \quad (3)$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $0 < T < +\infty$.

Нехай виконуються такі умови:

- 1) усі функції, що входять в (1), достатньо гладкі, що забезпечує можливість подальших викладок;
- 2) $a(x, t) > 0$ в D або $a(x, t) < 0$ в D ,
- 3) виконуються умови узгодженості в кутових точках $(0, 0)$ і $(0, l)$ області D до порядку N , де N – порядок побудованої нижче асимптотики.

При цих припущеннях класичний розв'язок задачі (1) – (3) існує та єдиний при будь-яких $\varepsilon > 0$ [2].

Методом примежового шару [1] побудуємо асимптотичне розвинення розв'язку задачі (1) – (3) за степенями малого параметру ε . Воно залежить від знаку $a(x, t)$ в D .

1. *Нехай $a(x, t) > 0$ в D .*

Асимптотику розв'язку задачі (1) – (3) будемо у вигляді

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i u_i(x, t) + \varepsilon \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \Pi_i(\xi, t) + R_N(x, t, \varepsilon), \quad (4)$$

де $u_i(x, t)$ ($i = \overline{0, N}$) – функції регулярної частини асимптотики, $\Pi_i(\xi, t)$ ($i = \overline{0, N}$) – функції примежового шару в околі границі $x = 0$ області D , $\xi = x/\varepsilon$ – регуляризуюче перетворення, $R_N(x, t, \varepsilon)$ – залишковий член асимптотики.

Побудова задач для знаходження функцій, що входять у (4), стандартна [1], тому просто їх випишемо. Функції регулярної частини асимптотики знаходяться як розв'язок таких задач для гіперболічних рівнянь другого порядку

$$-\frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial t} + a(x, t) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u_i}{\partial x} + c(x, t) u_i = f_i(x, t), \quad (i = \overline{0, N}) \quad (5)$$

$$u_i(0, t) = -\Pi_{i-1}(0, t), u_i(l, t) = 0, u_i(x, 0) = 0, \quad (i = \overline{0, N}) \quad (6)$$

де $f_0(x, t) \equiv f(x, t)$, $f_i(x, t) = -\frac{\partial^3 u_{i-1}}{\partial x^3}$ ($i = \overline{1, N}$), а функція з від'ємним індексом тут і надалі вважається тотожною рівною нулю.

Функції примежового шару в околі границі $x = 0$ області D є розв'язками задач

$$\frac{\partial^3 \Pi_i}{\partial \xi^3} + a(0, t) \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \xi^2} = p_i(\xi, t), \quad (i = \overline{0, N}) \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Pi_i(0, t)}{\partial \xi} = -\frac{\partial u_i(0, t)}{\partial x}, \quad \Pi_i(\xi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad (i = \overline{0, N}) \quad (8)$$

де $p_0(\xi, t) \equiv 0$, а $p_i(\xi, t)$ ($i = \overline{1, N}$) легко виписуються у явному вигляді і, що важливо, залежать від $\Pi_j(\xi, t)$ ($j < i$) та їх похідних.

Очевидно, що функції, які входять у (4), будуються рекурентно у такій послідовності: $u_0(x, t)$, $\Pi_0(\xi, t)$, $u_1(x, t)$ і т.д.

Зауважимо, що умови узгодженості 3) забезпечують виконання звичайних умов узгодженості в кутових точках $(0, 0)$ і $(0, l)$ області D , що забезпечує існування класичних розв'язків задач (5), (6), які можуть бути знайдені методом характеристик [3], а також виконанням співвідношень $\Pi_i(\xi, t) \Big|_{t=0} = 0$ ($i = \overline{0, N}$).

Стандартним чином [1] легко показується, що $\Pi_i(\xi, t)$ ($i = \overline{0, N}$) – розв'язки задач (7), (8) для звичайних диференціальних рівнянь (t – параметр), є функціями примежового шару.

2. Нехай $a(x, t) < 0$ в D .

Асимптотику розв'язку задачі (1) – (3) будемо у вигляді

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i u_i(x, t) + \varepsilon \sum_{i=0}^N \varepsilon^i Q_i(\eta, t) + R_N(x, t, \varepsilon), \quad (9)$$

де $u_i(x, t)$ ($i = \overline{0, N}$) – функції регулярної частини асимптотики, $Q_i(\eta, t)$ ($i = \overline{0, N}$) – функції примежового шару в околі границі $x = l$ області D , $\eta = (l-x)/\varepsilon$ – регуляризуюче перетворення, $R_N(x, t, \varepsilon)$ – залишковий член асимптотики.

Функції регулярної частини асимптотики знаходяться як розв'язки гіперболічних рівнянь другого порядку (5) з граничними та початковими умовами

$$u_i(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u_i(0, t)}{\partial x} = 0, \quad u_i(x, 0) = 0. \quad (i = \overline{0, N}) \quad (10)$$

Функції примежового шару в околі границі $x = l$ області D є розв'язками задач

$$-\frac{\partial^3 Q_i}{\partial \eta^3} + a(l, t) \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \eta^2} = q_i(\eta, t), \quad (i = \overline{0, N}) \quad (11)$$

$$Q_i(0, t) = -u_i(l, t), \quad Q_i(\eta, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \quad (i = \overline{0, N}) \quad (12)$$

де $q_0(\eta, t) \equiv 0$, а $q_i(\eta, t)$ ($i = \overline{1, N}$) легко виписуються у явному вигляді і, що важливо, залежать від $Q_j(\eta, t)$ ($j < i$) та їх похідних.

Так само очевидно, що функції, які входять у (9), будуються рекурентно у такій послідовності: $u_0(x, t)$, $Q_0(\eta, t)$, $u_1(x, t)$ і т.д.

Зауважимо, що умови узгодженості 3) як і раніше забезпечують виконання звичайних умов узгодженості в кутовій точках $(0, 0)$ області D , що забезпечує існування класичних розв'язків задач (5), (10), які так само можуть бути знайдені методом характеристик [3], а також виконанням співвідношень $Q_i(\eta, t) \Big|_{t=0} = 0$ ($i = \overline{0, N}$).

Так само, як і в попередньому випадку, показується, що функції $Q_i(\eta, t)$ ($i = \overline{0, N}$) є функціями примежового шару.

3. Залишковий член асимптотики, як у першому, так і в другому випадках, визначається стандартним чином і є розв'язком задачі аналогічної до вихідної задачі (1)–(3) з деякою правою частиною (виписується явним чином) і деякими, взагалі кажучи, неоднорідними граничними умовами (2) та нульовою початковою умовою (3).

Методом послідовних наближень аналогічно [2] встановлена оцінка

$$|R_N(x, t, \varepsilon)| \leq c\varepsilon^{N+1}, \quad (13)$$

де константа c не залежить від ε , що і доводить асимптотичну коректність розвинень (4) та (9).

Література.

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. – Успехи мат. наук, 1957, 122, №5, с. 3-12.
2. Джурев А.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент:Фап, 1979. – 238с.
3. Кирилич В.М. Основні крайові задачі для гіперболічних рівнянь і систем на прямій. – Київ, 1993 – 72 с.

Doudzianiy I. M., Tsimbal V. N.

A certain problem for singular perturbed equation of third order

Asymptotic decomposition of solution of certain problem for singular perturbed equation in partial derivatives of third order was built, which is not falling into the usual categorization. Method of building - a method of frontier layer. Literature - 3 names

Стаття надійшла до редколегії 5.11.1998

М.В.Жук

Застосування методу Канторовича для систем диференціальних рівнянь у випадку крайових умов мішаної задачі

Розглянемо застосування методу Канторовича для систем диференціальних рівнянь

$$Lu \equiv - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(P) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + R(P)u = f(P), \quad (1)$$

при умовах

$$N(u) = \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \right]_{\Gamma} = 0 \quad (2)$$

де $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^m A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i)$, ν – зовнішня нормаль до Γ .

Систему (1) розглядаємо в області D простору $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, обмеженої достатньо гладкою поверхнею Γ , яка включає дві гіперплощини $x_1 = a$ і $x_1 = b$, $a < b$. $P(x_1, \dots, x_m)$, $Q(x_2, \dots, x_m)$ – точки відповідно m і $m-1$ -вимірних просторів.

У системі (1)-(2) $u(P)$, $f(P)$ – s -компонентні вектор-функції; $A_{ij}(P)$, $R(P)$ – матриці s -го порядку, які для простоти вважатимемо неперервними, а $A_{ij}(P)$ – неперервно диференційованими.

Відносно заданої функції $f(P)$ припускаємо, що вона належить дійсному гільбертовому простору $U = L_2(D)$ із нормою

$$\|f\|^2 = \int_D f^2(P) dP = \int_D \sum_{k=1}^s f_k^2(P) dP.$$

Крім того, припускаємо, що матриці A_{ij} задовольняють умови

$$A_{ij}(P) = A_{ji}(P)$$

і, які б не були s -компонентні вектори $t_1, t_2, \dots, t_m$ виконується нерівність

$$\sum_{i,j=1}^m A_{ij} t_i t_j \geq \mu_0 \sum_{k=1}^m \|t_k\|^2, \quad (3)$$

$\mu_0 = \text{const} > 0$. Відносно матриць R і σ припускаємо, що вони задовольняють умовам

$$(Ru, u) \geq \alpha_0 \|u\|^2, \quad (4)$$

$$\int_{\Gamma} \sigma u \cdot u dS \geq \beta_0 \int_{\Gamma} u^2 dS \quad (5)$$

при довільній функції $u \in H$, $\alpha_0, \beta_0 = \text{const}$.

За область визначення $D(L)$ оператора L приймаємо множину s -компонентних вектор-функцій $u(P)$, які двічі неперервно диференційовані в області $\bar{D} = D \cup \Gamma$ і які задовольняють крайові умови (2).

Введемо допоміжний оператор T , який визначається формулами

$$Tu = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (6)$$

$$\left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(v, x_i) + u \right]_{\Gamma} = 0 \quad (7)$$

Оператор T розглядаємо як оператор, що діє в $H = L_2(D)$.

За область визначення $D(T)$ оператора T приймаємо множину s -компонентних вектор-функцій, які двічі неперервно диференційовані в $\bar{D}$ і які задовольняють крайові умови (7).

Оператор T додатно визначений. Дійсно, він симетричний і, враховуючи нерівність Фрідрікса для довільного $u \in D(T)$

$$\int_D u^2 dP \leq c \left\{ \int_D \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dP + \int_{\Gamma} u^2 dS \right\},$$

$c = \text{const} > 0$, отримуємо

$$\begin{aligned} (Tu, u) &= \int_D \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dP - \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(v, x_i) u dS = \\ &= \int_D \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dP + \int_{\Gamma} u^2 dS \geq \frac{1}{c} \int_D u^2 dP = \gamma^2 \|u\|^2 \end{aligned} \quad (8)$$

де $\gamma = \frac{1}{\sqrt{c}} > 0$.

Позначимо через $H_\sigma \subset H$ – енергетичний простір оператора T , тобто замикання $D(T)$ в метриці

$$[u, v]_\sigma = (Tu, v) = \int_D \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dP + \int_\Gamma u v dS$$

$$|u|_\sigma^2 = [u, u]_\sigma.$$

Нерівність (8) в результаті граничного переходу для довільного $u \in H_\sigma$ дає

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma} |u|_\sigma \quad (9)$$

Крім того, припускаємо, що для задачі (1)-(2) константи χ_0, α_0, γ такі, що для константи

$$\eta_0 = \begin{cases} \chi_0 + \frac{\alpha_0}{\gamma^2}, & \text{якщо } \alpha_0 \leq 0 \\ \chi_0, & \text{якщо } \alpha_0 \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

де $\chi_0 = \min(\mu_0, \beta_0)$, виконується умова $\eta_0 > 0$.

Для довільних $u, v \in H_\sigma$ формально введемо білінійну форму

$$L(u, v) = \int_D \left[\sum_{i,j=1}^m A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + R(P) u \cdot v \right] dP + \int_\Gamma \sigma(s) u \cdot v dS \quad (11)$$

Тоді для довільного $u \in H_\sigma$ виконується

$$L(u, u) \geq \eta_0 |u|_\sigma^2, \quad (12)$$

де η_0 визначається співвідношенням (10).

Дійсно, для довільного $u \in H_\sigma$, використовуючи нерівності (3), (4) і (5), маємо

$$\begin{aligned} L(u, u) &= \int_D \left[\sum_{i,j=1}^m A_{i,j}(p) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} + R(p) u \cdot u \right] dP + \\ &+ \int_\Gamma \sigma u \cdot u dS \geq \mu_0 \int_D \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dP + \alpha_0 \|u\|^2 + \\ &+ \beta_0 \int_\Gamma u^2 dS \geq \min\{\mu_0, \alpha_0\} |u|_\sigma^2 + \alpha_0 \|u\|^2 \end{aligned} \quad (13)$$

Якщо $\alpha_0 \leq 0$, то, використовуючи нерівність (9), із (13) отримуємо

$$L(u, u) \geq x_0 |u|_\sigma^2 + \frac{\alpha_0}{\gamma_0} |u|_\sigma^2 = \eta_0 |u|_\sigma^2$$

Якщо $\alpha_0 \geq 0$, то із (13) маємо

$$L(u, u) \geq x_0 |u|_\sigma^2 + \alpha_0 \|u\|^2 \geq x_0 |u|_\sigma^2 = \eta_0 |u|_\sigma^2.$$

Отже, нерівність (12) виконується.

Узагальненим розв'язком задачі (1)-(2) називається функція $u \in H_\sigma$, для якої виконується тотожність

$$L(u, v) = \int_D f v dP \quad (14)$$

при довільній $v \in H_\sigma$. Відомо, що виконання умови (12) забезпечує існування та єдиність узагальненого розв'язку [1].

Задачу (1)-(2) розв'язуємо методом Канторовича, згідно з яким наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s C_{kl}(x_1) \varphi_{kl}(P), \quad (15)$$

де $\varphi_{kl}(P)$ – попередньо вибрані функції

$$\varphi_{kl}(P) = (0, \dots, 0, \varphi_k(P), 0, \dots, 0), \\ k = 1, 2, 3, \dots, \quad l = 1, 2, \dots, s,$$

причому $\varphi_k(P)$ займає l -те місце. Вважаємо, що функції $\varphi_k(P)$ неперервні разом з другими похідними. Ці функції вибираємо таким чином, щоб система функцій

$$\{\chi_\rho(x_1) \varphi_{kl}(P)\} \subset H_\sigma, \quad \rho, k=1, 2, 3, \dots; \quad l=1, 2, \dots, s,$$

була повною системою лінійно незалежних функцій в просторі H_σ .

Невідомі коефіцієнти $C_{kl}(x_1)$ визначаємо із відповідної для задачі (1)-(2) системи методу Канторовича [2].

Для прикладу запишемо цю систему у вигляді, коли $m=3$, а область D визначається наступним чином

$$D: \{a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d, g(x_1, x_2) \leq x_3 \leq h(x_1, x_2)\}, \\ a < b, \quad c < d, \quad g(x_1, x_2) < h(x_1, x_2)$$

Тоді система методу Канторовича приймає вигляд

$$\begin{aligned}
& \int_c^d \int_{g(x_1, x_2)}^{h(x_1, x_2)} (Lu_n - f) \varphi_{kl} dx_2 dx_3 + \int_{g(x_1, c)}^{h(x_1, c)} N(u_n) \varphi_{kl} \Big|_{x_2=c} dx_3 + \\
& + \int_{g(x_1, d)}^{h(x_1, d)} N(u_n) \varphi_{kl} \Big|_{x_2=d} dx_3 + \\
& + \int_c^d N(u_n) \varphi_{kl} \Big|_{x_3=g(x_1, x_2)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2} dx_2 + \\
& + \int_c^d N(u_n) \varphi_{kl} \Big|_{x_3=h(x_1, x_2)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2} dx_2 = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
& \int_c^d \int_{g(a, x_2)}^{h(a, x_2)} N(u_n) \varphi_{kl} \Big|_{x_1=a} dx_2 dx_3 = 0, \\
& \int_c^d \int_{g(b, x_2)}^{h(b, x_2)} N(u_n) \varphi_{kl} \Big|_{x_1=b} dx_2 dx_3 = 0,
\end{aligned} \tag{17}$$

Система (16) зводиться до лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно $C_{kl}(x_1)$, $k = 1, 2, \dots, n$, $l = 1, 2, \dots, s$.

Не обмежуючи загальності, для конкретності надалі будемо вважати, що система методу Канторовича має вигляд (16)-(17).

Введемо поняття узагальненого розв'язку системи методу Канторовича (16)-(17).

Позначимо через $H_n \subset H$ простір функцій виду

$v_n(p) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s C_{kl}(x_1) \varphi_{kl}(P)$. Нехай для деякої функції $u_n \in H_n \cap H_\sigma$ справедлива тотожність

$$L(u_n, v_n) = \int_D f v_n dP \tag{18}$$

при довільній функції $v_n \in H_n \cap H_\sigma$. Тоді функція u_n називається узагальненим розв'язком системи методу Канторовича.

Покажемо тепер, що узагальнений розв'язок системи методу Канторовича існує. Для цього застосуємо до вихідної задачі (1)-(2) метод Бубнова-Гальоркіна, згідно якого наближений розв'язок $u'_n(p)$ шукається у вигляді

$$u_n^t(P) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s \sum_{\rho=1}^t C_{kl}^\rho \chi_\rho(x_1) \varphi_{kl}(P) \quad (19)$$

а невідомі коефіцієнти C_{kl}^ρ визначаються із системи

$$L(u_n^t, \chi_\rho \varphi_{kl}) = \int_D f \chi_\rho \varphi_{kl} dP \quad (20)$$

$$k = 1, 2, \dots, n; \quad l = 1, 2, \dots, s; \quad \rho = 1, 2, \dots, t,$$

яке зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно C_{kl}^ρ .

Позначимо через $H_n^t \subset H_\sigma$ простір функцій виду

$$v_n^t(P) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s \sum_{\rho=1}^t b_{kl}^\rho \chi_\rho(x_1) \varphi_{kl}(P), \text{ де } b_{kl}^\rho - \text{довільні числа. Тоді на ос-}$$

нові системи (20) для довільного елемента $v_n^t(P) \in H_n^t$ маємо

$$L(u_n^t, v_n^t) = \int_D f v_n^t dP \quad (21)$$

Система (21) має єдиний розв'язок, так як в силу нерівності (12) отримуємо

$$L(u_n^t, v_n^t) \geq \eta_0 |u_n^t|_\sigma^2, \quad (22)$$

а звідси випливає, що детермінант системи (20) відмінний від нуля.

Покажемо тепер, що послідовність розв'язків $\{u_n^t\}$ при $t \rightarrow \infty$ слабо збігається в просторі H_σ до узагальненого розв'язку системи методу Канторовича.

Вставимо спочатку обмеженість послідовності u_n^t в H_σ . Використовуючи нерівність (22) і співвідношення (21) при $v_n^t = u_n^t$, отримуємо

$$|u_n^t|_\sigma^2 \leq \frac{1}{\eta_0} L(u_n^t, v_n^t) = \frac{1}{\eta_0} \int_D f u_n^t dP \leq \frac{1}{\eta_0} \|f\| \|u_n^t\|.$$

Звідси, враховуючи нерівність (9), маємо

$$|u_n^t|_\sigma \leq \frac{1}{\eta_0 \gamma} \|f\|.$$

Із останньої нерівності випливає, що послідовність $\{u_n^t\}$ слабо компактна в $H_n \cap H_\sigma$, а враховуючи співвідношення (9) і в $H_n \cap H$.

Із послідовності $\{u_n^t\}$ можна виділити послідовність $\{u_n^{t_2}\}$, яка при $t_\tau \rightarrow \infty$ слабо збігається в просторі $H_n \cap H_\sigma$. Не обмежуючи

загальності, можемо вважати, що вся послідовність $\{u'_n\}$ слабо збігається в H_σ до u_n . Звідси випливає, що послідовності $\{u_n\}, \left\{\frac{\partial u'_n}{\partial x_i}\right\}, i = 1, 2, \dots, m$ слабо збігаються в просторі H відповідно до $u_n, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, m$, крім того, послідовність $\{u'_n\}$ слабо збігається в просторі сумованих з квадратом функцій по межі Γ області D , тобто

$$\int_{\Gamma} u'_n v dS \rightarrow \int_{\Gamma} u_n v dS$$

при $t \rightarrow \infty$ для довільної v сумованої з квадратом по межі Γ області D .

Оскільки для довільного елемента

$v_n(P) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s a_{kl}(x_1) \varphi_{kl}(P) \in H_n \cap H_\sigma$ можна побудувати послідовність

$v'_n(P) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s \sum_{\rho=1}^t a_{kl}^\rho \chi_\rho(x_1) \varphi_{kl}(P) \in H'_n \cap H_\sigma$, де a_{kl}^ρ визначається із

системи

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s \sum_{\rho=1}^t a_{kl}^\rho \left[\chi_\rho(x_1) \varphi_{kl}(P), \chi_\tau(x_1) \varphi_{rl}(P) \right]_\sigma = \\ = \left[V_n(P), \chi_\tau(x_1) \varphi_{rl}(P) \right]_\sigma, \end{aligned} \quad (23)$$

$$r = 1, 2, \dots, n, \quad \tau = 1, 2, \dots, t$$

таку, що $|v_n - v'_n|_\sigma \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, то зафіксувавши $v_n \in H_n \cap H_\sigma$ беремо

у (21) $v_n^t \in H'_n$, коефіцієнти a_{kl}^ρ якого визначається із (23).

Тепер у співвідношенні (21) перейдемо до границі при $t \rightarrow \infty$. При цьому отримуємо тотожність (18).

Єдиність розв'язку забезпечує виконання умови (12).

Дійсно, нехай $u_n(P)$ і $w_n(P)$ два узагальнені розв'язки системи методу Канторовича. Для них, враховуючи тотожність (18) при $v_n = u_n - w_n$, отримуємо

$$\begin{aligned} L(u_n, u_n - w_n) &= \int_D f(u_n - w_n) dP \\ L(w_n, u_n - w_n) &= \int_D f(u_n - w_n) dP \end{aligned}$$

Віднімаючи із першої рівності другу та враховуючи співвідношення (12), маємо

$$0 = L(u_n - w_n, u_n - w_n) \geq \eta_0 |u_n - w_n|_\sigma^2.$$

Звідси випливає, що $u_n = w_n$. Таким чином, система методу Канторовича має єдиний узагальнений розв'язок $u_n \in H_n \cap H_\sigma$.

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема. При умовах задачі, що забезпечують виконання умови (12), для довільної функції $f(P) \in H$ задача (1)-(2) має єдиний узагальнений розв'язок $u(P) \in H_\sigma$; при довільному n система методу Канторовича (16)-(17) має єдиний узагальнений розв'язок $u_n(P) \in H_n \cap H_\sigma$.

Література.

1. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимаций в гильбертовом пространстве М. 1974. 2. Власова З. А. О методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 53, 1959.

M.V. Zhuk

The appliance of Kantorovich's method for systems of differential equations in case of mixed boundary conditions

Kantorovich's method is applied to solution for systems of differential equations in case of mixed boundary conditions. The existanse of unique solution is proved.

Стаття надійшла до редколегії 2.12.1998

УДК 519.6:517.925

Ю. С. Козаревська, Г.А. Шинкаренко, О.Г. Шинкаренко

Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: локалізовані найменші квадрати

1. Постановка задачі. Для спрощення наступного викладу далі обмежимося розглядом наступної крайової задачі мігрування пасивної субстанції у нестисливому середовищі

© Ю. С. Козаревська, Г.А. Шинкаренко, О.Г. Шинкаренко 1998.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано вектор } \mathbf{w} = \{w_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^n, \quad \mu = \text{const} > 0, \\ \sigma = \text{const} \geq 0, \quad f = f(\mathbf{x}); \\ \text{знайти розподіл концентрації субстанції } u = u(\mathbf{x}) \\ \text{такий, що} \\ Lu := \mathbf{w} \cdot \nabla u - \mu \Delta u + \sigma u = f \quad \text{в } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{на } \Gamma. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Тут Ω – обмежена зв'язна область точок $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^n$ евклідового простору R^n з неперервною за Ліпшицем межею Γ ; $\mathbf{w} = \{w_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^n$ –вектор швидкості руху точок нестисливого середовища,

$$\nabla \cdot \mathbf{w} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} w_i = 0 \quad \text{в } \Omega; \quad (1.2)$$

$f = f(\mathbf{x})$ –інтенсивність джерел субстанції, розподілених в Ω ; σ та μ –коефіцієнти біохімічного розпаду та дифузії відповідно. Нижче ми будемо припускати справедливості таких включень

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in H^{-1}(\Omega), \\ \mathbf{w} \in W := \left\{ \mathbf{z} \in H(\text{div}; \Omega) \cap L^\infty(\Omega)^n \mid \nabla \cdot \mathbf{z} = 0 \quad \text{в } \Omega \right\}. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Ввівши простір допустимих функцій

$$V := H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma\} \quad (1.4)$$

сформулюємо відповідну до (1.1) варіаційну задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \mathbf{w} \in W, \quad f \in H^{-1}(\Omega), \\ \mu = \text{const} > 0, \quad \sigma = \text{const} \geq 0; \\ \text{знайти } u \in V \text{ такий, що} \\ c(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V, \end{array} \right. \quad (1.5)$$

де $(\cdot, \cdot)$ –скалярний добуток з простору $H := L^2(\Omega)$;

$$\left\{ \begin{array}{l} c(u, v) := (Lu, v) = b(\mathbf{w}; u, v) + a(u, v) \\ b(\mathbf{w}; u, v) := (\mathbf{w} \cdot \nabla u, v) = -(\mathbf{w} \cdot \nabla v, u) \\ a(u, v) := \mu(\nabla u, \nabla v) + \sigma(u, v). \end{array} \quad \forall u, v \in V \right. \quad (1.6)$$

2. Аналіз апроксимацій Гальоркіна. Нехай $T_h := \{K\}$ – деяка декомпозиція області Ω на скінченні елементи K і $h_K := \text{diam } K$, $h := \max_{K \in T_h} h_K$. Будемо припускати, що при $h \rightarrow 0$ триангуляції $\{T_h\}$ по-

роджують послідовність просторів апроксимацій $\{V_h\} \subset V$, які вживаються для відшукування наближених розв'язків $\{u_h\}$ задачі (1.5) за схемою Гальоркіна:

$$\begin{cases} \text{задано } h = \text{const} > 0; \\ \text{знайти } u_h \in V_h \text{ такий, що} \\ c(u_h, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h. \end{cases} \quad (2.1)$$

Отже схема Гальоркіна здійснює декомпозицію розв'язку $u \in V$ задачі (1.5) вигляду

$$u = u_h + \varepsilon_h \quad (2.2)$$

з наступним нехтуванням похибки апроксимації

$$\varepsilon_h = u - u_h \in E = V \setminus V_h. \quad (2.3)$$

Легко бачити, що остання задовольняє рівняння

$$c(\varepsilon_h, v) = 0 \quad \forall v \in V_h \quad \forall h > 0. \quad (2.4)$$

Із врахуванням цього факту та декомпозиції (2.2) варіаційну задачу (1.5) можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} \text{знайти пару } \{u_h, \varepsilon_h\} \in V_h \times E \text{ таку, що} \\ c(u_h, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h \\ c(u_h, e) + c(\varepsilon_h, e) = (f, e) \quad \forall e \in E. \end{cases} \quad (2.5)$$

Наведена нами декомпозиція (2.5) задачі (1.5) показує, що схема Гальоркіна систематично ігнорує наявність другого рівняння системи (2.5). Разом з цим згадане рівняння заслуговує на увагу якщо не для відшукування похибки апроксимації Гальоркіна, то щонайменше для визначення її характеристик та відповідних оцінок.

Дійсно, якщо апроксимація Гальоркіна $u_h \in V_h$ знайдена з першого із рівнянь (2.5), то задача

$$\begin{cases} \text{знайти похибку } \varepsilon_h \in E \text{ таку, що} \\ c(\varepsilon_h, e) = (f, e) - c(u_h, e) \quad \forall e \in E \end{cases} \quad (2.6)$$

володіє такими самими якісними характеристиками, що й вихідна варіаційна задача (1.5). Наступна теорема цілком повно характеризує вплив коефіцієнтів конвективного перенесення і дифузії та вибраних просторів апроксимацій на значення похибки. Більш точно, має місце

Теорема 2.1 про оцінки похибки схеми Гальоркіна.

Нехай $u \in V$ – розв'язок варіаційної задачі мігрування (1.5) і $u_h \in V_h$ – його апроксимація Гальоркіна, яка визначається задачею (2.1). Наділимо простір V нормою

$$|v|_V \equiv |\nabla v|_{0,\Omega} := \left\{ \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right\}^{1/2} \quad \forall v \in V.$$

Тоді мають місце наступні оцінки похибки схеми Гальоркіна.

$$(i) \quad |u - u_h|_V \leq \inf_{v \in V_h} |u - v|_V + \frac{\|w\|_{\infty} + \sigma \operatorname{diam} \Omega}{\mu} \inf_{v \in V_h} |u - v|_{0,\Omega} \quad \forall h > 0; \quad (2.7)$$

$$(ii) \quad |u - u_h|_V \leq \frac{\operatorname{diam} \Omega}{\mu} |Lu_h - f|_{0,\Omega} \quad \forall h > 0, \quad (2.8)$$

$$|u - u_h|_{0,\Omega} \leq \frac{\operatorname{diam}^2 \Omega}{\mu + \sigma \operatorname{diam}^2 \Omega} |Lu_h - f|_{0,\Omega} \quad \forall h > 0. \quad (2.9)$$

Доведення.

(i) З огляду на рівняння (2.4) дістаємо, що

$$c(\varepsilon_h, \varepsilon_h) = c(\varepsilon_h, u - v) \quad \forall v \in V_h. \quad (2.10)$$

Звідси безпосередні оцінки на основі нерівності Буняковського-Шварца та означень (1.6) приводять до нерівності

$$\begin{aligned} \sigma |\varepsilon_h|_{0,\Omega}^2 + \mu |\varepsilon_h|_V^2 &\leq c(\varepsilon_h, \varepsilon_h) = c(\varepsilon_h, u - v) \leq \\ &\leq \|w\|_{\infty} |\varepsilon_h|_V |u - v|_{0,\Omega} + \mu |\varepsilon_h|_V |u - v|_V + \\ &+ \sigma |\varepsilon_h|_{0,\Omega} |u - v|_{0,\Omega} \quad \forall v \in V_h. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Врахування нерівності Пуанкаре-Фрідрікса

$$|v|_{0,\Omega} \leq \operatorname{diam} \Omega |v|_V \quad \forall v \in V \quad (2.12)$$

дозволяє привести оцінку (2.11) до вигляду (2.7).

(ii) Зауважимо, що визначення (1.6) дозволяють переписати рівняння (2.6) для відшукування похибки схеми Гальоркіна у вигляді

$$c(\varepsilon_h, e) = -(Lu_h - f, e) \quad \forall e \in E. \quad (2.13)$$

Прирівнявши в ньому $e := \varepsilon_h$, знаходимо, що

$$\sigma |\varepsilon_h|_{0,\Omega}^2 + \mu |\varepsilon_h|_V^2 \leq |Lu_h - f|_{0,\Omega} |\varepsilon_h|_{0,\Omega}.$$

Застосовуючи тепер до другого доданку в лівій частині нерівність Пуанкаре-Фрідрікса (2.12), приходимо до оцінок (2.9) та (2.8). $\square$

Наслідок 2.1 про оцінки швидкості збіжності апроксимацій Гальоркіна.

Нехай послідовність просторів апроксимацій $V_h \subset V$ володіє наступною властивістю повноти

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{для довільного } v \in V \cap H^p(\Omega), \quad p \geq 1, \\ \text{знайдеться } v_h \in V_h \text{ такий, що} \\ \|v - v_h\|_{m,\Omega} \leq Ch^{p+1-m} |v|_{p+1,\Omega}, \quad 0 \leq m \leq p, \\ \text{де } C = \text{const} > 0 \text{ не залежить від величин,} \\ \text{що нас цікавлять.} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Тоді послідовність апроксимацій Гальоркіна $u_h \in V_h$ збігається відносно норми $|\cdot|_V$ до розв'язку задачі (1.5) і при цьому має місце така оцінка швидкості збіжності

$$|u - u_h|_V \leq Ch^p \left\{ 1 + \left[\frac{\|w\|_\infty h}{\mu} + \frac{\sigma h \operatorname{diam} \Omega}{\mu} \right] \right\} |u|_{p+1,\Omega}. \quad (2.15)$$

Доведення цього факту ґрунтується на безпосередньому використанні (2.14) до оцінки (2.7) $\square$

Безрозмірне число (відоме під назвою сіткового числа Пекле), яке виникає в правій частині нерівності (2.15),

$$Pe_h := \frac{\|w\|_\infty h}{\mu} \quad (2.16)$$

виступає зручним критерієм оцінки співвідношення механізмів конвективного перенесення і дифузії субстанції в процесі мігрування.

Як показує (2.15), при $Pe_h \rightarrow \infty$ (значному переважанні конвекції над дифузією) можна очікувати нестачу точності апроксимацій Гальоркіна навіть при достатньо малих значеннях h ; в дійсності нефізична поведінка апроксимацій Гальоркіна стає незначною лише при

$$Pe_h \leq 1, \quad (2.17)$$

що може виконуватись на дуже густих сітках скінченних елементів, див. напр. [2].

Поряд з цим оцінки похибок (2.8) та (2.9) явно не залежать від числа Пекле і засвідчують, що їх норми пропорційні нормі нев'язки

$$\rho_h := Lu_h - f \in H^{-1}(\Omega). \quad (2.18)$$

Таким чином, здійснений тут аналіз схеми Гальоркіна показує, що рівень її похибки можна зменшити вибором просторів апроксимацій V_h , здатних мінімізувати нев'язку ρ_h рівняння задачі міграції (1.1) її апроксимацією u_h .

3. Регуляризація схеми Гальоркіна: локалізовані найменші квадрати. З огляду на одержані оцінки (2.8) та (2.9) похибки схеми

Гальоркіна, нижче пропонується чисельна схема, яка підміняє варіаційну задачу (2.1) збуреною задачею:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } T_h = \{K\} \text{ та послідовність параметрів} \\ \tau = \{\tau_K\} \subset R; \\ \text{знайти } u_{ht} \in V_h \text{ такий, що} \\ c(u_{ht}, v) + s(\tau; u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h, \\ \text{де} \\ s(\tau; u, v) := \sum_{K \in T_h} \tau_K (Lu - f, Lv)_K \quad \forall u, v \in V_h, \forall \tau_K \geq 0. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Тут і далі використовується позначення $(u, v)_K := \int_K uv dx$.

Збурюючий доданок $s(\tau; u, v)$ утворює лінійну комбінацію варіаційних рівнянь методу найменших квадратів для мінімізації нев'язок

$$\rho_{ht} := Lu_{ht} - f \quad (3.2)$$

на кожному скінченному елементі K триангуляції T_h . Відповідно коефіцієнти цієї лінійної комбінації можна розглядати як штрафні множники за невиконання апроксимацією u_{ht} рівняння задачі (1.1) на скінченному елементі K . З іншого боку, вибір коефіцієнтів τ_K повинен здійснюватися в такий спосіб, щоб залишати схемі (3.1) достатньо можливостей для належного відтворення апроксимацією u_{ht} структури розв'язку варіаційної задачі (1.5). Тому, в цілому, схему (3.1) можна розглядати як певну регуляризацию задачі (2.1) для відшукування апроксимації Гальоркіна за допомогою збалансованого штрафування нев'язки (3.2) на елементах триангуляції T_h .

Зауваження 3.1. Метод найменших квадратів випробовувався авторами [2] для певної постпроцесорної обробки апроксимацій Гальоркіна з метою подолання їх нефізичної поведінки за умов домінуючої конвекції. Додаткове для такого підходу розв'язування задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \varepsilon = \text{const} > 0 \text{ та } u_h \in V_h, \text{ знайти } u_\varepsilon \in V_h \text{ такий, що} \\ (u_\varepsilon, v)_\Omega + \varepsilon (u_\varepsilon, \nabla v)_\Omega = (u_h, v)_\Omega \end{array} \right. \quad (3.3)$$

дає можливість за рахунок належного вибору ε дістати наближення $u_\varepsilon \in V_h$ до розв'язку $u \in V$ задачі (1.5), яке звільняється від паразитичних осциляцій апроксимації Гальоркіна $u_h \in V_h$. $\square$

Важливо відзначити, що регуляризована схема Гальоркіна (3.1) містить як часткові випадки добре відомі стабілізуючі схеми для варіа-

ційної задачі (1.5). Так, наприклад, добре відома SUPG-схема Брукса, Х'юза [8] відрізняється від (3.1) лише визначенням збурюючого члена

$$s_h(\tau; u, v) := \sum_K \tau_K (Lu - f, L^*v)_K \quad \forall u, v \in V, \quad (3.4)$$

де L^* – спряжений до L оператор

$$L^* := -w \cdot \nabla u - \mu \Delta u + \sigma u. \quad (3.5)$$

Параметри τ_K вибираються в залежності від h_K . Якщо простір V_h складається з кусково лінійних на T_h функцій, то збурюючі доданки (3.1) і (3.4) співпадають. Це саме зауваження стосується протипотокової схеми Дугласа-Вонга [3,4], беззалишкових бульбашкових функцій [5,7].

Накінець, зауважимо, що регуляризована схема (3.1) допускає природну реалізацію p -версії методу скінченних елементів, що надзвичайно важливо при якісному моделюванні примежевих шарів та інших сингулярностей.

4. Результати чисельних експериментів: крайова задача з примежевим шаром.

Для вивчення можливостей різних схем локалізованих найменших квадратів (ЛНК) були проаналізовані наближені розв'язки наступної одновимірної стаціонарної задачі мігрування домішки [2]

$$\begin{cases} -\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + w \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3wx^2, & w = 10^4, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

точний розв'язок якої має вигляд:

$$\varphi(x) = x^3 + \frac{3x^2}{w} + \frac{6x}{w^2} - \left[1 + \frac{3}{w} + \frac{6}{w^2} \right] \frac{(e^{wx} - 1)}{(e^w - 1)}. \quad (4.2)$$

Наближені розв'язки задачі (4.1) будувались на рівномірних сітках скінченних елементів з використанням:

- кусково лінійних (ЛА) та квадратичних апроксимацій (КА), які вимагали знаходження значень наближеного розв'язку у вузлах сітки;
- кусково кубічних апроксимацій Ерміта (ЕНДА), які вимагали знаходження вузлових значень розв'язку та його перших похідних на кінцях кожного скінченного елемента, гарантуючи при цьому відшукання в цілому неперервно-диференційованого наближення.
- кусково кубічних апроксимацій Ерміта (ЕНА), які вимагали знаходження вузлових значень розв'язку та його перших похідних на кінцях кожного скінченного елемента, гарантуючи при цьому лише неперервність наближеного розв'язку.

Розв'язок задачі (4.1) володіє яскраво вираженим примежевим шаром в околі точки $x=1$, де його похідні першого та другого порядків набувають відповідно значень

$$\frac{d}{dx}\varphi(1) \approx -w, \quad \frac{d^2}{dx^2}\varphi(1) \approx -w^2 - 3w. \quad (4.3)$$

Тому всі апроксимації стандартної схеми МСЕ на рідких сітках (з 10-20 елементів) характеризувались нефізичною поведінкою, фрагменти якої показано на рис. 1-4. Для усунення цих недоліків стандартні схеми МСЕ доповнювались доданками стабілізуючої схеми Дугласа-Вонга або доданками схеми локалізованих найменших квадратів (3.1). При використанні останньої параметр регуляризації τ_K визначався наступним чином:

$$\tau_K := \frac{h_K}{a\|w\|_{\infty,K}} \gamma(Pe_K), \quad (4.4)$$

$$\gamma(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z < 1, \\ 1, & 1 \leq z < +\infty, \end{cases} \quad (4.5)$$

стала a вибиралась за таким критерієм $a:=1.440$ для лінійних апроксимацій; $a:=3.625$ для квадратичних і $a:=4.700$ для кубічних апроксимацій. Нижче на рис. 1-8 наведено порівняння точного розв'язку (4.2) з наближеними розв'язками схем локалізованих найменших квадратів (ЛНК), стабілізації Дугласа-Вонга (Д.-В.) та стандартного методу скінченних елементів (МСЕ) для задачі (4.1), одержаних на рівномірній сітці із 10 скінченних елементів.

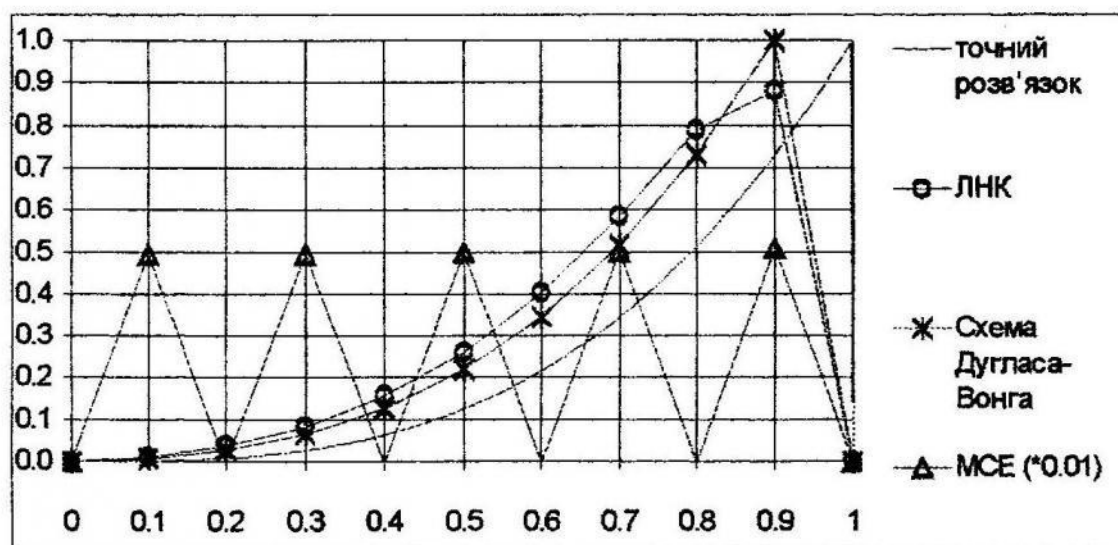


Рис.1. Порівняння схем з лінійними апроксимаціями.

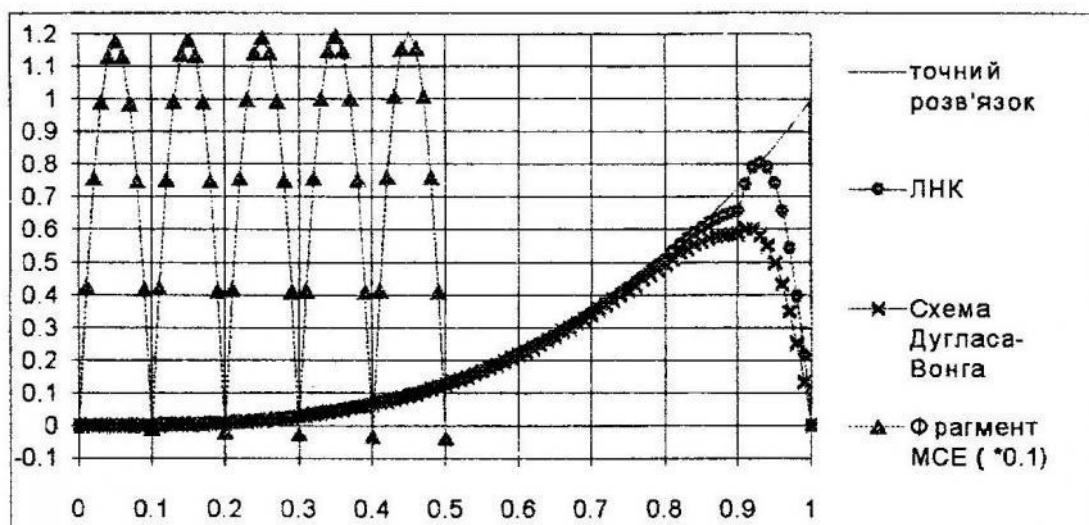


Рис.2. Порівняння схем з квадратичними апроксимаціями.

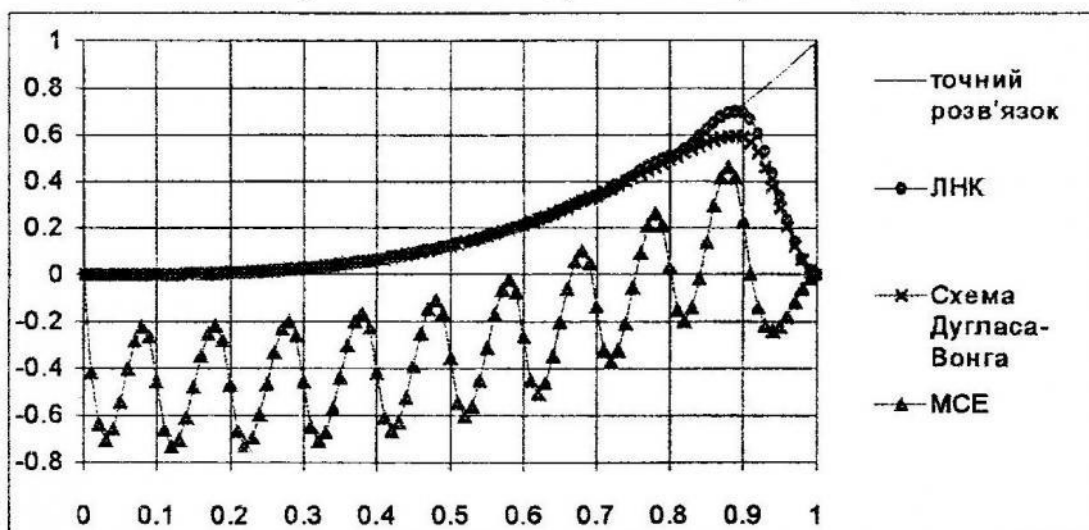


Рис.3. Порівняння схем з ермітовими неперервно-диференційованими апроксимаціями.

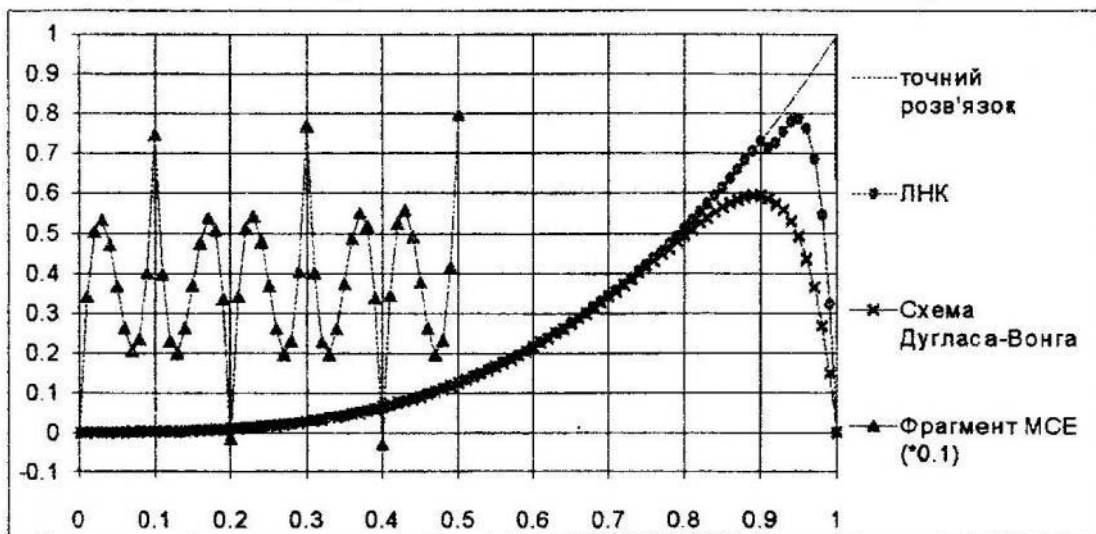


Рис.4. Порівняння схем з ермітовими неперервними апроксимаціями.

Як видно з рис. 1-4, схема локалізованих найменших квадратів дає дещо кращі наближення до точного розв'язку, ніж схема Дугласа-Вонга. Найкраще цей метод працює при застосуванні кусково-кубічних неперервних ермітових апроксимацій.

Наступна таблиця демонструє характер зменшення максимальних похибок розв'язків згаданих схем у вузлах сітки в залежності від кусково-визначених поліноміальних апроксимацій.

Схема	ЛА	КА	ЕНДА	ЕНА
ЛНК	0,152235	0,072486	0,033927	0.000457
Дугласа-Вонга	0,270757	0,143243	0,139189	0,135443

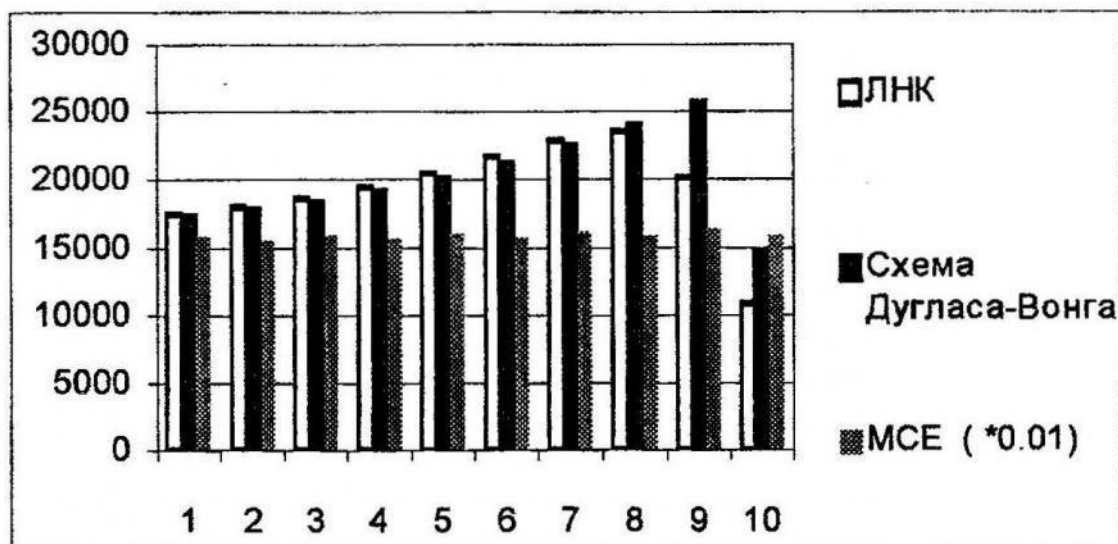


Рис. 5. Розподіл нев'язок схем для лінійних апроксимацій.

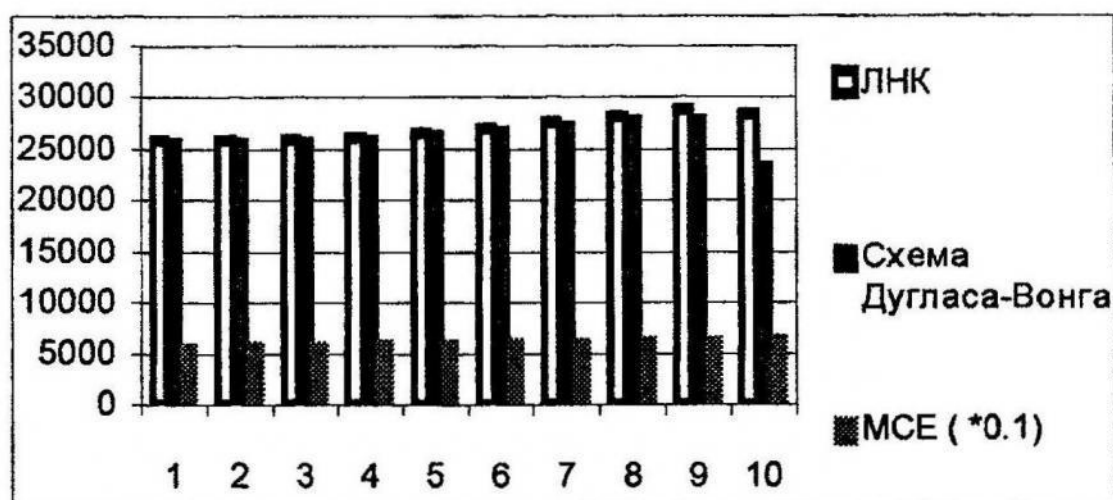


Рис. 6. Розподіл нев'язок схем для квадратичних апроксимацій.

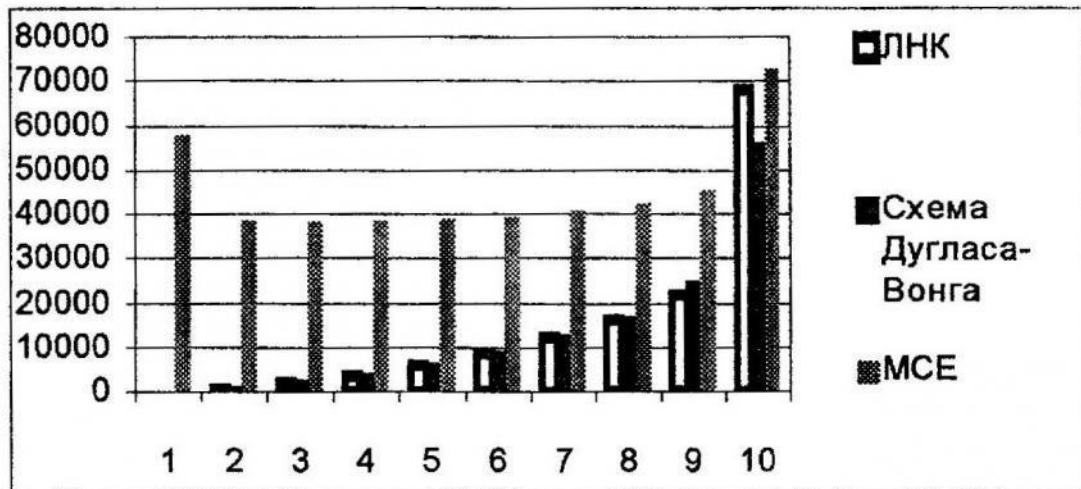


Рис.7. Розподіл нев'язок схем для ермітових неперервно-диференційованих апроксимацій.

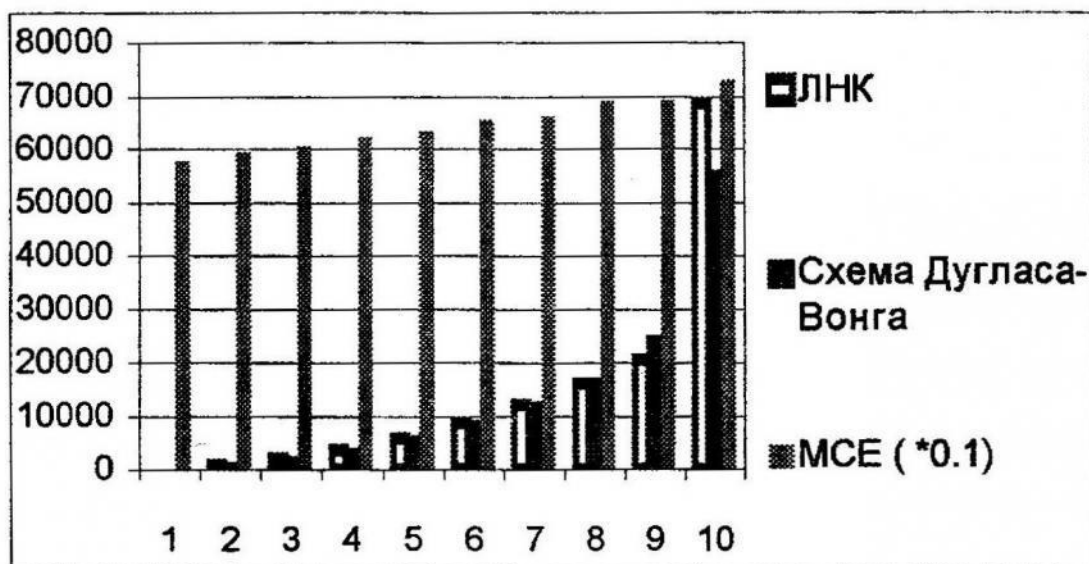


Рис.8. Розподіл нев'язок схем для ермітових неперервних апроксимацій.

На рис.5-8 зображено розподіли значень середньоквадратичної норми нев'язок вихідного рівняння на скінченних елементах сітки, обчислені для наведених вище наближених розв'язків. Добре видно, що підвищення порядку поліноміальної апроксимації на одиницю в стандартній схемі MCE зменшує на порядок значення нев'язок і робить їх величинами одного порядку з нев'язками схем ЛНК та Дугласа-Вонга лише для кубічних апроксимацій. На відміну від стандартної схеми MCE, яка рівномірно розподіляє нев'язки для всіх вжитих апроксимацій, схеми ЛНК та Дугласа-Вонга з кубічними ермітовими апроксимаціями характеризуються майже однаковим розподілом нев'язок, здатним ідентифікувати скінченні елементи примежевого шару.

Висновки та заключні зауваження. В цій праці показано, що практично вживані норми похибок апроксимації Гальоркіна варіаційної задачі (1.5) пропорційні середньоквадратичній нормі нев'язки вихідного рівняння міграції. При цьому побудовані оцінки (2.7)-(2.9) цілком повно відображають вплив коефіцієнтів рівняння на рівень можливих похибок.

З огляду на цей факт тут запропоновано регуляризовану схему Гальоркіна (3.1) з використанням апроксимацій МСЕ та збалансованого штрафування нев'язки на скінченних елементах розрахункової сітки. Відзначимо, що рівняння схеми (3.1), названої нами схемою локалізованих найменших квадратів (ЛНК), можна подати у вигляді

$$\sum_{K \in T_h} (Lu_{h\tau} - f, v + \tau_K Lv) = 0 \quad \forall v \in V_h. \quad (5.1)$$

Запис рівняння схеми (3.1) у вигляді (5.1) показує, що вона належить до класу проекційних схем Петрова-Гальоркіна.

Наведені нами числові результати свідчать, що схема ЛНК здатна конкурувати з відомими протипотоковими і стабілізованими схемами МСЕ і допускає природну реалізацію його p -версій.

Література

1. Зубов В.М., Терлецька С.Ю., Шинкаренко Г.А. Розв'язуваність та апроксимація узагальнених розв'язків початково-крайових задач міграції атмосферних домішок // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип. 41. с.62-70.
2. Козаревська Ю.С., Шинкаренко Г.А., Шинкаренко О.Г. Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: метод найменших квадратів // Волинський математичний вісник. 1997. Вип. 4 с. 67-70.
3. Козаревська Ю.С., Шинкаренко Г.А. Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: стабілізуюча схема Дугласа-Ванга // Волинський математичний вісник. 1998. Вип. 5 с. 66-70.
4. Козаревська Ю.С., Шинкаренко Г.А. Чисельне розв'язування задач міграції домішок з великими числами Пекле. // Сучасні проблеми математики: Матеріали міжнародної наук. конф. - Київ: Ін-т матем. НАН України. 1998. Ч. 1. с. 269-271.
5. Савула Я.Г., Шинкаренко О.Г. Стабілізація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: протипотокова схема // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1997. Вип. 46. с.3-9.
6. Baiocchi F., Marini D., Russo A. Virtual Bubbles and Galerkin-Least-Squares Type Methods (Ga.L.S.) // Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 1993 v. 105. p. 125-141.
7. Brezzi F., Marini D., Russo A. Pseudo-Residual-Free Bubbles and Stabilized Methods // Comput. Methods in Applied Sciences '96. Wiley. 1996. P. 3-8.
8. Brooks A.N., Hughes T.J.R. Streamline Upwind Petrov/Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations // Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 1982, vol. 32. No. 1-3. p. 199-259.
9. Vijayaraghavan K., Surana K.S. P-Version Least-Squares Finite

Element Formulation of a System of Convection-Reaction Nonlinear Equations – Fixed Bed O-xylene Oxidation //Comput.&Struct. 1997. vol. 62. No.3. p. 539-554.

Y.S. Kozarevska, G.A. Shynkarenko, O.G. Shynkarenko

Regularization of numerical solutions of variational problems of solute migration: localized least squares

Present paper introduces a regularized Galerkin scheme for the solution of variational problems of solute transport in the incompressible medium. The scheme brings in a sum of additional terms to the initial variational equation, each of them denotes balanced penalizing of corresponding residual norm of the migration equation on each finite element of triangulation. The results of numerical treatment of boundary layer problem show that Localized Least Squares Approach eliminates non-physical behavior of the various order finite element solutions and is able to compete successfully with Stabilizing Douglas-Wang Approach.

Стаття надійшла до редколегії 1.12.1998

УДК 519.6 : 517.925

О. М. Козяк, Г. А. Шинкаренко, О. Г. Шинкаренко

Чисельне розв'язування узагальнених задач оптимального розміщення джерела пасивної субстанції

1. Основні припущення та позначення.

Нехай в деякій області Ω_0 точок $x = \{x_i\}_{i=1}^n$ евклідового простору R^n з неперервною за Ліпшицем межею Γ розташовано M діючих точкових джерел пасивної домішки, інтенсивність яких визначається функцією

$$f = f(x) := \sum_{j=1}^M Q_j \delta(x^j; x),$$

де Q_j – інтенсивність джерела, розміщеного в точці $x^j \in \Omega_0$;

$\delta(x^j; x) := \begin{cases} 1, & x = x^j \\ 0, & x \neq x^j \end{cases}$ – функція Дірака. Нехай область Ω_0 містить N підобластей $\Omega_k \subset \Omega_0$, $k = 1, 2, \dots, N$, які надалі називатимемо екологічно

важливими зонами. Для підтримання життєдіяльності зон Ω_k , $k = 0, 1, \dots, N$, повинні виконуватись умови

$$J_{\Omega_k} = J_{\Omega_k}(f) = \int_{\Omega_k} g(f) dx \leq C_k, \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

де $C_k = \text{const} > 0$ – гранично допустиме екологічне навантаження на зону Ω_k , густина якого визначається деякою функцією $g(f)$.

2. Постановка узагальненої задачі оптимального розміщення джерела пасивної субстанції.

Сформулюємо тепер узагальнену задачу оптимального розміщення нового джерела домішки в області Ω_0 , яка враховує і специфічні умови для кожної екологічно важливої зони, і небезпеку забруднення області Ω_0 в цілому:

виділити область $D \subset \Omega_0$ точок $x^0 = \{x_i^0\}_{i=1}^n$ можливого розміщення нового джерела пасивної домішки із заданою інтенсивністю $f_0(x) = Q_0 \delta(x^j; x)$ таку, щоб

$$J_{\Omega_k}(f + f_0) = \int_{\Omega_k} g(f + f_0) dx \leq C_k \quad \forall x^0 \in D, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (1)$$

і розподіл концентрації домішки $u = u(x)$ визначався крайовою задачею

$$\begin{cases} \operatorname{div} q + \sigma u = f(x) + f(x^0), \\ q_i - u w_i + \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \quad \text{в } \Omega_0, \\ u = 0 \quad \text{на } \Gamma_u, \quad \text{mes}(\Gamma_u) > 0, \\ \sum_{i=1}^n (q_i - u w_i) v_i = \alpha(u - u_c) \quad \text{на } \Gamma_q, \quad \Gamma_q = \Gamma \setminus \Gamma_u. \end{cases} \quad (2)$$

Тут $\mu = \{\mu_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ – матриця заданих коефіцієнтів дифузії з властивостями симетрії та додатньої визначеності; $w = \{w_i(x)\}_{i=1}^n$ – вектор швидкості перенесення домішки, що задовольняє умову нестисливості

$\sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0$ в Ω_0 ; $\sigma = \sigma(x) \geq 0$ – коефіцієнт біохімічного розпаду суб-

станції; $v = \{v_i\}_{i=1}^n$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ ;

$\alpha = \alpha(x) \geq 0$ – коефіцієнт взаємодії з контактуючим середовищем;
 $u_c = u_c(x)$ – інтенсивність джерел субстанції, розподілених на межі Γ_q .

3. Алгоритм розв'язування задачі оптимального розміщення.

Для оптимального розміщення нового джерела домішки потужністю Q_0 в області Ω_0 знайдемо залежність рівня забрудненості екологічно важливих зон Ω_k та області Ω_0 від його координати [1, 2, 3]. В даному випадку під екологічним навантаженням на деяку область будемо розуміти інтегральну кількість субстанції, що знаходиться в ній:

$$J_{\Omega_k} = \int_{\Omega_k} p_k u dx, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (3)$$

де $p_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_k \\ 0, & x \notin \Omega_k \end{cases}$. Екологічне навантаження (3) може бути виражене також через $\psi_k(x)$ – розв'язок задачі, спряженої до (2), з правою частиною $p_k(x)$ [1, 2, 3]:

$$J_{\Omega_k} = \int_{\Omega_k} (f + f_0) \psi_k dx + \int_{\Gamma_q} \alpha u_c \psi_k d\gamma, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (4)$$

Такий спосіб обчислення функціоналу J_{Ω_k} дозволяє уникнути багаторазового розв'язування задачі (2) з різними правими частинами. Для знаходження значень J_{Ω_k} у різних точках області Ω_0 достатньо один раз обчислити розв'язок спряженої задачі $\psi_k(x)$.

Зауважимо, що для розв'язування варіаційних прямої та спряженої до неї задач можуть бути використані одні й ті самі проекційно-сіткові схеми [2].

4. Чисельний приклад.

Нехай процес двовимірної стаціонарної міграції домішок описується рівняннями (2) в області $\Omega_0 = (0,30) \times (0,30)$, що містить екологічно важливі зони $\Omega_1 = (15,30) \times (0,10)$ та $\Omega_2 = (20,30) \times (25,30)$ (рис. 1). Покладемо $w = (2,0)^T$, $\mu_{ij} = \text{const} = \mu = 10^{-6}$, $\sigma = 0$, $\Gamma_u \equiv \Gamma$, $C_1 = 0.5$, $C_2 = 0.2$, $C_0 = 2.5$, $Q_0 = 0.05$, $M = 3$, $x^1 = (10,5)$, $Q_1 = 0.04$, $x^2 = (5,25)$, $Q_2 = 0.04$, $x^3 = (25,15)$, $Q_3 = 0.4$.

Розподіл концентрації домішки в області Ω_0 до розміщення в ній нового джерела домішки зображено на рис. 3.

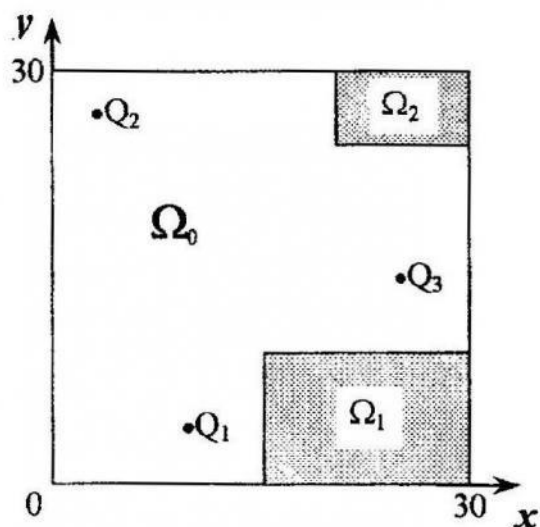


Рис. 1

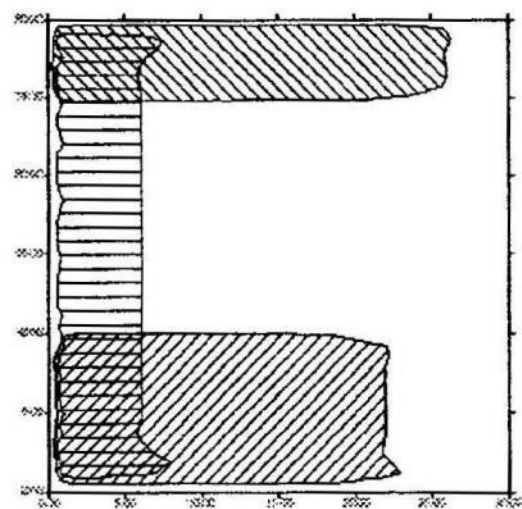


Рис. 2

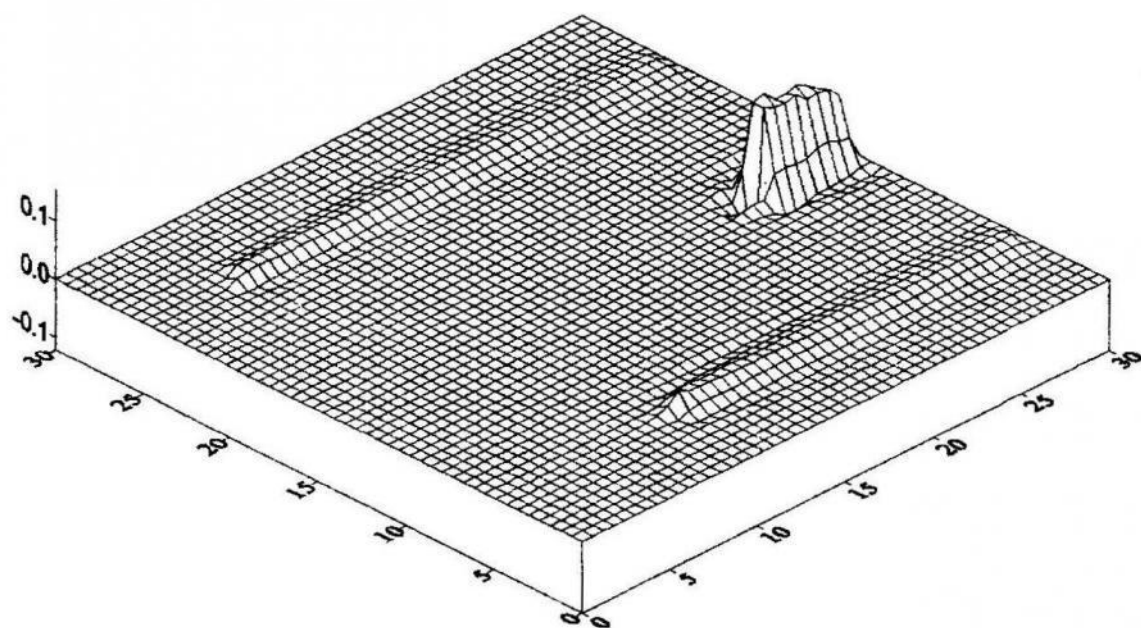


Рис. 3

Навантаження на зони Ω_1 , Ω_2 та Ω_0 являють собою функції від координати нового джерела і виражаються через розв'язки відповідних спряжених задач:

$$J_{\Omega_k}(x) = Q_0 \psi_k(x) + \sum_{i=1}^3 Q_i \psi_k(x^i), \quad k = 0, 1, 2.$$

Проекції перетинів графіків функцій навантажень J_{Ω_k} , $k = 0, 1, 2$, з відповідними площинами рівня $z = C_k$ на площину

Оху зображені на рис. 2 як заштриховані області. Розміщення нового джерела домішки інтенсивністю Q_0 в таких областях призведе до того, що екологічні навантаження на деякі зони перевищать гранично допустимі. Точки, які не належать заштрихованим областям, є точками шуканої області D .

Всі чисельні розв'язки отримані з використанням звичайних кусково-лінійних апроксимацій МСЕ, доповненого схемою Дугласа-Ванга [4], на рівномірних сітках і добре узгоджуються з розв'язками, отриманими за допомогою протипотокової схеми МСЕ з використанням функцій-бульбашок [5].

Література.

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
2. Козаревська Ю.С., Кузик О.М., Шинкаренко Г.А. Чисельне дослідження процесів мігрування та оптимальне розміщення джерел пасивних домішок у нестисливому середовищі. // Львів. ун-т. - Львів, 1998. - 28с. - Деп. в ДНТБ України 13.04.98 №187 Ук98.
3. Кузик О.М., Шинкаренко Г.А. Оптимальне розміщення джерел пасивної субстанції, мігруючої у нестисливому середовищі. // Вісн. держ. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. - № 337. - Т. 2, (1998) - С. 224 - 227.
4. Ali Khelifa, et. al. A Douglas-Wang finite element approach for transient advection-diffusion problems // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1993. vol. 110 p. 113-129.
5. Савула Я.Г., Шинкаренко О.Г. Стабілізація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: протипотокова схема // Вісн. Львів. у-ту сер. мех.-мат. вип. 46, (1997) с. 3 - 9.

O. M. Kozyak, G. A. Shynkarenko, O. G. Shynkarenko

Numerical solution of generalized problem of optimal location of source of passive substance

Present paper is dedicated to forecast of consequences of location of additional point-wise source of passive substance in a certain region with active sources and defined tolerated loads on ecologically important zones. A scheme of solution of generalized problem of optimal location of such source, which employs solution of conjugate boundary problems, is considered. A numerical example obtained with Douglas-Wang upwind scheme is presented.

Стаття надійшла до редколегії 30.11.1998

Достатні умови оптимального за швидкістю керування нагріванням термочутливих тіл

В даній роботі узагальнено результати досліджень, отримані В.М.Вігаком, А.В.Костенком і М.Б.Вітером [1,2,4,5]. Ними були сформульовані і доведені достатні умови оптимальності за швидкістю керування нестационарними температурними режимами в неоднорідних тілах. Нижче цей результат узагальнено на випадок неоднорідних термочутливих тіл і сформульовані умови, достатні для мінімізації часу їх нагрівання.

Розглянемо термочутливе пружне тіло, яке займає зв'язну область D з границею Γ тривимірного евклідового простору R^3 . Температурне поле тіла задовольняє крайову задачу теплопровідності [6,7]

$$LT(\mathbf{x}, \tau) + u_1(\mathbf{x}, \tau) = 0, \quad (\mathbf{x}, \tau) \in G_\theta = D \times (\tau_0, \theta]; \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = g(\mathbf{x}, \tau, T, u_2), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in S_\theta = \Gamma \times (\tau_0, \theta]; \quad (2)$$

$$T(\mathbf{x}, \tau_0) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{D} = D \cup \Gamma. \quad (3)$$

Тут $L = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(\mathbf{x}, \tau, T) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b(\mathbf{x}, \tau, T, T_x) - \frac{\partial}{\partial \tau}$ – параболічний оператор;

$\mathbf{n} = (n^1, n^2, n^3)$ – внутрішня нормаль до граничної поверхні Γ тіла; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – точка області $\bar{D}$; τ – час; $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}$ – внутрішня нормальна похідна.

У випадку відсутності об'ємних сил напружено-деформований стан в розглядуваному тілі описується системою рівнянь квазістатичної незв'язаної задачі термопружності [2,3].

Процес керування температурним режимом тіла відбувається за допомогою внутрішніх $u_1(\mathbf{x}, \tau)$, $\mathbf{x} \in D$ і зовнішніх $u_2(\mathbf{x}, \tau)$, $\mathbf{x} \in \Gamma$ джерел тепла.

Необхідно визначити такі функції керування u_i ($i = 1, 2$), які при обмеженнях на параметри температурного поля чи термонапруженого стану дозволять за найкоротший час

$$\tau_* = \min \tau \quad (4)$$

нагріти тіло від початкової температури (3) до кінцевої, яка визначається рівністю

$$\mathbf{R}T = T_*, \quad (5)$$

де $\mathbf{R}$ – деякий функціонал, що діє із $C(\bar{G}) \rightarrow C[\tau_0, \theta]$; $T_* = \text{const}$ – задана температура; $\bar{G} = \bar{D} \times (\tau_0, \tau)$; C – простір неперервних функцій по координатах x_i ($i = \overline{1,3}$) і часу τ . При цьому функції керування u_i ($i = 1,2$) не можуть перевищувати деяких гранично допустимих неперервних функцій $\omega_1 \in C(G)$ та $\omega_2 \in C(S)$:

$$u_1 \leq \omega_1, \quad (\mathbf{x}, \tau) \in G_\theta; \quad (6)$$

$$u_2 \leq \omega_2, \quad (\mathbf{x}, \tau) \in S_\theta. \quad (7)$$

Умови (6), (7) є природними і пов'язані зі скінченною потужністю внутрішніх і зовнішніх джерел тепла.

Основні обмеження при інтенсивному нагріванні тіл накладаються на параметри температурного поля або термонапруження. Це викликано оплавленням, повзучістю, температурним розширенням тіла в небажаному напрямі, зниженням міцності та ін. Для математичного формулювання цих обмежень припустимо, що їх можна представити нерівностями вигляду

$$\mathbf{F}_i T(\mathbf{x}, \tau) \leq \mathbf{N}_i(\tau, T), \quad \mathbf{x} \in \bar{D}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (8)$$

де $\mathbf{F}_i$ – інтегральний або інтегродиференціальний оператор. Для деяких теплових параметрів, а саме максимальної або мінімальної температури тіла, градієнта температурного поля, перепаду температур, швидкості зміни температури лінійність операторних залежностей (8) є очевидною.

Отже, потрібно знайти функції керування u_i ($i = 1,2$), які при обмеженнях (6)–(8) за мінімальний час τ_* змінять температурне поле тіла, що описується граничною задачею (1), (2) від початкового стану (3) до кінцевого (4).

Природним є припущення, що розглядуваний процес керований. Останнє, зокрема, має місце в тому випадку, коли задача (1)–(3) є коректною. Існування і єдиність розв'язку задачі теплопровідності при $u_i = \omega_i$ ($i = 1,2$) забезпечуються наступними достатніми умовами, що накладаються на коефіцієнти оператора $\mathbf{L}$, функції $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x}, \tau, T, u_2)$ та вигляд області D [6,7].

УМОВА 1. Коефіцієнти a_{ij} , b – обмежені та неперервні, мають неперервні похідні першого порядку.

УМОВА 2. Область D строго сферична зсередини [7].

УМОВА 3. Функції $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x}, \tau, y, z)$ – неперервні від своїх аргументів. Крім того, функція $g(\mathbf{x}, \tau, y, z)$:

а) монотонно не спадає від y , тобто для всіх y_1, y_2 таких, що $y_1 < y_2$ виконується умова

$$g(\mathbf{x}, \tau, y_1, z) \leq g(\mathbf{x}, \tau, y_2, z), \quad (9)$$

причому для кожного моменту часу τ' існує хоча б одна точка $\mathbf{x}'$, $(\mathbf{x}', \tau') \in S_\tau$, $S_\tau = \Gamma \times (\tau_0, \tau]$ в якій нерівність (9) є строгою;

б) монотонно спадає по z , тобто для всіх значень z_1, z_2 з умови $z_1 < z_2$ випливає нерівність

$$g(\mathbf{x}, \tau, y, z_1) > g(\mathbf{x}, \tau, y, z_2). \quad (10)$$

Позначимо через T_q розв'язок задачі (1)–(3) при $u_i = q_i$ ($i = 1, 2$), а через U_θ – множину допустимих керувань.

ОЗНАЧЕННЯ. Вектор-функція $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ належить множині допустимих керувань U_θ , якщо на множині G_θ при $u_1 = q_1$ задовольняється обмеження (6) і на множині S_θ при $u_2 = q_2$ задовольняється обмеження (7), а відповідний температурний режим T_q задовольняє обмеження

$$F_i T_q \leq N_i(\mathbf{x}, \tau, T_q), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \overline{G}_\theta, \quad i = \overline{1, m}. \quad (11)$$

Для доведення достатніх умов оптимальності за швидкодією для задачі керування (1)–(8) необхідно накласти додаткові умови на оператори і функції, що моделюють цю задачу.

УМОВА 4. Якщо вектор-функції $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in U_\theta$, то з умови $T_p \geq T_r$ слідує $\mathbf{R}T_p \geq \mathbf{R}T_r$ для $\tau \in [\tau_0, \theta]$.

УМОВА 5. Для довільної вектор-функції $\mathbf{p} \in U_\theta$ $\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \mathbf{R}T_p = d_f < T_*$, де d_f – деяка константа, що залежить від функції $f(\mathbf{x})$.

УМОВА 6. Якщо додатний максимум функції $T(\mathbf{x}, \tau)$ на G_θ досягається в точці $(\mathbf{x}_{\max}, \tau_{\max}) \in \overline{G}_\theta$, то $F_i T|_{(\mathbf{x}_{\max}, \tau_{\max})} \geq 0$.

УМОВА 7. Задані функції N_i ($i = \overline{1, m}$) неперервні в області визначення своїх аргументів і монотонно спадають по T , тобто для всіх $T_1 < T_2$ повинна виконуватись нерівність

$$N_i(\mathbf{x}, \tau, T_1) > N_i(\mathbf{x}, \tau, T_2), \quad i = \overline{1, m}.$$

Сформулюємо та доведемо тепер теорему про достатні умови оптимальності за швидкістю для задачі керування (1)–(8).

ТЕОРЕМА. Нехай виконуються умови 4–7. Тоді, якщо існує вектор-функція $\mathbf{p} \in U_\theta$, для якої при $u_i = p_i$ ($i = 1, 2$) виконуються рівності

$$(p_1 - \omega_1) \prod_{i=1}^m (F_i T_p - N_i) = 0, \quad (\mathbf{x}, \tau) \in G_\theta; \quad (12)$$

$$(p_2 - \omega_2) \prod_{i=1}^m (F_i T_p - N_i) = 0, \quad (\mathbf{x}, \tau) \in S_\theta, \quad (13)$$

то $\mathbf{p}$ – оптимальне за швидкістю керування для задачі (1)–(8).

Доведення опирається на лему.

ЛЕМА. Нехай існує вектор-функція $\mathbf{p} \in U_\theta$, що забезпечує виконання рівностей (12), (13) при $\tau \in [\tau_0, \theta]$. Тоді для довільної іншої функції з цього ж простору $\mathbf{r} \in U_\theta$ справедлива нерівність

$$T_r \leq T_p \text{ на } \overline{G}_\theta. \quad (14)$$

Доведення. Припустимо протилежне. Нехай існує вектор-функція $\mathbf{q} \in U_\theta$, для якої $T_q > T_p$ в точці $(\mathbf{x}_*, \tau_*) \in \overline{G}_\theta$. Розглянемо функцію $v = T_q - T_p$, яка є розв'язком наступної крайової задачі

$$LT_q - LT_p = p_1 - q_1, \quad (\mathbf{x}, \tau) \in G_\theta; \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = g(\mathbf{x}, \tau, T_q, q_2) - g(\mathbf{x}, \tau, T_p, p_2), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in S_\theta; \quad (16)$$

$$v(\mathbf{x}, \tau_0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \overline{D}. \quad (17)$$

Оскільки виконується умова 1, то різницю двох квазілінійних операторів у рівнянні (14) можна представити у вигляді лінійного оператора для функції $v > 0$. Справді, використовуючи метод, запропонований в [6] можна показати, що

$$\begin{aligned} LT_q - LT_p &= a_{ij}(T_q) \frac{\partial^2 T_q}{\partial x_i \partial x_j} - a_{ij}(T_p) \frac{\partial^2 T_p}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(T_q) \frac{\partial T_q}{\partial x_i} - \\ &- b_i(T_p) \frac{\partial T_p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial \tau} (T_q - T_p) = a_{ij}(T_q) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(T_q) \frac{\partial v}{\partial x_i} - \\ &- \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 T_p}{\partial x_i \partial x_j} \int_0^1 \frac{d}{dt} a_{ij}(tT_q + (1-t)T_p) dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial T_p}{\partial x_i} \int_0^1 \frac{d}{dt} b_i(t T_q + (1-t) T_p) dt = a_{ij}(T_q) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \\
& + b_i(T_q) \frac{\partial v}{\partial x_i} + v \left[\frac{\partial^2 T_p}{\partial x_i \partial x_j} \int_0^1 a'_{ij}(z) \Big|_{z=t T_q + (1-t) T_p} dt + \right. \\
& \left. + \frac{\partial T_p}{\partial x_i} \int_0^1 b'_i(z) \Big|_{z=t T_q + (1-t) T_p} dt \right] - \frac{\partial v}{\partial \tau} = L^* v.
\end{aligned}$$

Таким чином, крайова задача (15)–(17) зводиться до наступної

$$L^* v = p_1 - q_1, \quad (x, \tau) \in G_\theta; \quad (18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = g(x, \tau, T_q, q_2) - g(x, \tau, T_p, p_2), \quad (x, \tau) \in S_\theta; \quad (19)$$

$$v(x, \tau_0) = 0, \quad x \in \bar{D}, \quad (20)$$

де L^* – лінійний оператор.

Оскільки $v \in C(\bar{G})$ і $v(x_*, \tau_*) > 0$, то існує точка $(x_{max}, \tau_{max}) \in \bar{G}_\theta$, $\tau_{max} > 0$, в якій функція v досягає додатного максимуму. Згідно умов, які накладаються на вектор-функцію p , в кожній точці простору G_θ повинна виконуватись одна з рівностей

$$F_i T_p = N_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (21)$$

або

$$p_1 = \omega_1, \quad (22)$$

а в кожній точці S_θ – одна з рівностей

$$F_i T_p = N_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (23)$$

або

$$p_2 = \omega_2. \quad (24)$$

Нехай область $B_{F_j} \subset \bar{G}_\theta$ включає множину всіх точок, в яких виконуються j -ті рівності (21), (23), а $B_\omega = \bar{G}_\theta \setminus \bigcup_{j=1}^m B_{F_j}$. Тоді для довільної точки $(x, \tau) \in B_\omega$

$$F_i T_p \Big|_{(x, \tau)} < N_i(x, \tau, T_p), \quad i = \overline{1, m} \quad (25)$$

і виконуються рівності (22), (24). Покажемо, що точка (x_{max}, τ_{max})

максимуму функції $v(\mathbf{x}, \tau)$ не може належати ні одній із підмножин B_{F_j} , B_ω , що і доведе лему.

Припустимо, що $(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}) \in B_{F_j}$ ($1 \leq j \leq m$). Тоді $\mathbf{F}_j v = \mathbf{F}_j T_p - \mathbf{N}_j(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}, T_p) < \mathbf{F}_j T_q - \mathbf{N}_j(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}, T_q) \leq 0$, оскільки згідно припущення $T_p(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}) < T_q(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max})$ і функція $\mathbf{N}_j$ задовольняє умову 7. Але отримана нерівність суперечить умові 6. Звідси випливає, що точка $(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max})$ належить області B_ω .

Нехай $B_\omega^1 = B_\omega \cap D \times (\tau_0, \theta)$, а $B_\omega^2 = B_\omega \cap S_\theta$. Можна показати, що B_ω^1 – відкрита множина [7] і $B_\omega^2 \subset B_\omega^1$. Припустимо, що $(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}) \in B_\omega^1$. Оскільки B_ω^1 – відкрита множина, то знайдеться така зв'язна область $E \subset B_\omega^1$, яка містить точку $(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max})$ і $\bar{E} \not\subset B_\omega^1$. Поверхня області B_ω^1 складається з чотирьох частин: $C_1 \subset \bigcup_{i=1}^m B_{F_i}$; $C_2 \subset B_\omega^2$; C_3 , яка належить гіперплощині $\tau = \tau_0$ і C_4 , що належить гіперплощині $\tau = \theta$. Причому, $C_1 \cup C_2 \neq \emptyset$.

Оскільки $\mathbf{L}^* v = p_1 - q_1 \geq 0$ для $(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}) \in E$, то з принципу додатного сильного максимуму [6,7] $v(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}) = M > 0$ при $(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}) \in \bar{E}$. Якщо C_1 – непорожня множина, то функція v досягає додатного максимуму в області $\bigcup_{i=1}^m B_{F_i}$, що суперечить вже доведеному. Якщо C_3 – непорожня множина, то $v(\mathbf{x}, \tau_0) = M > 0$, що суперечить рівності (20). Отже, $(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}) \in C_2 \subset B_\omega^2$. Оскільки $T_p(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}) < T_q(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max})$ і $q_2(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}) \leq p_2(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}) = \omega_2$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} &= g(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}, T_q, q_2) - g(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}, T_p, p_2) = \\ &= g(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}, T_q, q_2) - g(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}, T_p, q_2) + \\ &= g(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}, T_p, q_2) - g(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}, T_p, p_2) > 0. \end{aligned}$$

Але це суперечить лемі 1, яка сформульована і доведена в [5]. Остання стверджує наступне. Нехай виконується умова 2 і додатний максимум $M > 0$ функції $T(\mathbf{x}, \tau)$ на $\bar{G}$ досягається в точці $(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max}) \in S$. Тоді, якщо існує такий окіл $E \subset G$ точки $(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max})$, в якому $L^* T \geq 0$ і $T(\mathbf{x}, \tau) \neq \text{const}$, то $\left. \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right|_{(\mathbf{x}_{max}, \tau_{max})} < 0$.

Отже, наша лема доведена. На її основі доведемо твердження теореми. Нехай існує вектор-функція $\mathbf{p} \in U_\theta$, яка задовольняє рівності (12), (13). Згідно з лемою для довільної функції $\mathbf{r} \in U_\theta$ виконується нерівність $T_p \geq T_r$ на $\bar{G}$. З умови 4 маємо

$$RT_p \geq RT_r, \quad \tau \in [\tau_0, \theta]. \quad (26)$$

Нехай $\tau_* = \sup \xi$ таких, що $RT_p < T_*$ при $\tau \in [\tau_0, \xi]$. Тоді при $\tau = \theta$ з рівності (26), умови 5 і співвідношення (4) отримуємо

$$RT_p|_{\tau=\tau_0} < T_* \leq RT_p|_{\tau=\theta}.$$

Отже, $\tau_* \in [\tau_0, \theta]$, а оскільки $RT_p \in C[\tau_0, \theta]$, то $RT_p|_{\tau=\tau_*} = T_*$. Із визначення τ_* випливає, що $RT_p < T_*$ при $\tau \in [\tau_0, \tau_*)$. Тому для довільної вектор-функції $\mathbf{r} \in U_\theta$ рівність (5) не може виконуватись при $\tau \in [\tau_0, \tau_*)$. Отже, $\mathbf{p}$ – оптимальне за швидкодією керування задачі (1)–(8).

Якщо існує $\tau \in (\tau_0, \theta]$, при якому $RT_p \geq T_*$, то процес, який описується крайовою задачею (1)–(3), керований. Якщо ж функція $\mathbf{p} \in U_\theta$ задовольняє умови теореми, то із нерівності $RT_p < T_*$ при $\tau \in [\tau_0, \theta]$, де θ – як завгодно велике, випливає, що розглядуваний процес не керований.

В [2] доведено, що існує не більше, як одна вектор-функція $\mathbf{p} \in U_\theta$, яка задовольняє рівності (12), (13) при $\tau \in [\tau_0, \theta]$.

Таким чином, для термочутливих пружних тіл доведені теореми, які дозволяють поетапно, опираючись на метод обернених задач теплопровідності й термопружності [1,2] будувати оптимальне за швидкодією керування їх нагріванням.

Література.

1. Вигак В.М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. – Киев: Наук. думка: 1979. – 360 с.
2. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка: 1988. – 312 с.
3. Вігак В.М. Розв'язки задач теорії пружності та термопружності в напруженнях//Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – 1995. – Вип. 9. – С. 34–122.
4. Вигак В.М., Костенко А.В. Достаточные условия оптимальности по быстродействию управления процессами диффузионного типа//Мат. физика. – 1982. – Вып. 31. – С. 67–71.
5. Костенко А.В., Витер М.Б. Достаточные условия оптимальности по быстродействию нагрева твердых тел внутренними источниками тепла//Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – Вып. 25. – С. 56–60.
6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М: Наука, 1967. – 736 с.
7. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М: Мир, 1968. – 427 с.

Kostenko A.V., Zasadna Ch.O.

Sufficient conditions of optimal control respect to speed of heating a thermosensitive solids

The problem of optimization respect to speed heating of thermosensitive elastic solids under the restriction imposed on the control function and temperature field or thermostressed state parameters is considered. The conditions which is sufficient for minimization of heating time are formulated. The theorems which allows to construct the optimal control in the sense of rapidity by heating of thermosensitive elastic bodies at every stage using methods of inverse heat conductivity and thermoelasticity problem is proved.

Стаття надійшла до редколегії 29.09.1998

УДК 539.3:519.6

Кревс В.В., Савула Я.Г.

Про ієрархічну модель теплопровідності тонкого шару

Проблеми математичного моделювання процесу розподілу тепла у тонких включеннях або покриттях розглядалися багатьма дослідниками [1,5-8]. У даній праці пропонується загальний підхід до побудови математичної моделі теплопровідності у "тонких" середови-

шах шляхом побудови ієрархії математичних моделей пониженої вимірності. Знаходиться загальна форма математичної моделі, яка не залежить від конкретного розподілу температури за товщиною покриття. Досліджується симетричність та додатна визначеність отриманих білінійних форм. Виводяться апіорні оцінки похибки.

1. Позначення та геометрія. У наступному вектори позначаються малими жирними літерами вектори, а матриці – великими жирними літерами. Нехай

$$\partial_i^j = \frac{\partial^j}{\partial \alpha_i^j}, i = 1, 2, 3, j \in Z, \quad (1)$$

де $\partial_i^0 = I$, $\partial_i = \partial_i^1$.

Розглянемо однозв'язну область $\Omega^* \in R^3$ з ліпшицевою границею $\partial\Omega^* = \Gamma^+ \cup \Gamma^- \cup \Gamma^s$ (поверхні Γ^+ та Γ^- обмежують відповідно зверху та знизу область Ω^* , а Γ^s є бічною поверхнею Ω^*). Припустимо, що область Ω^* віднесено до криволінійної ортогональної системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, пов'язаної з серединною поверхнею Ω ($\alpha_i = \text{const}, i = 1, 2$ – напрямки головних кривин Ω , $\alpha_3 = \text{const}$ – напрямком нормалі до Ω). Тоді Ω^* описується радіус-вектором:

$$\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{r}_0(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \mathbf{e}_3(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2) \in D, \alpha_3 \in \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right], \quad (2)$$

де $\mathbf{r}_0(\alpha_1, \alpha_2)$ – радіус-вектор Ω , $\mathbf{e}_3(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|}$ – вектор зовнішньої одиничної нормалі до Ω , $\mathbf{e}_i(\alpha_1, \alpha_2) = \partial_i \mathbf{r}_0(\alpha_1, \alpha_2)$, $i = 1, 2$, $d > 0$ – товщина шару, $D \in R^2$ – однозв'язна область з ліпшицевою границею ∂D ,

$$\partial D = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \bar{D} : \alpha_1 = \alpha_1(\eta), \alpha_2 = \alpha_2(\eta), \eta \in I \subset R\}. \quad (3)$$

Відомо [4], що коефіцієнти Ламе системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ мають наступний вигляд:

$$H_i = A_i(1 + k_i \alpha_3), i = 1, 2, H_3 = 1, \quad (4)$$

де $A_i = \sqrt{\mathbf{e}_i^2}$, $i = 1, 2$, а k_i , $i = 1, 2$ є головними кривинами серединної поверхні Ω . Очевидно, що

$$\Gamma^\pm = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in D, \alpha_3 = \pm \frac{d}{2}\}, \quad (5)$$

$$\Gamma^s = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in \partial D, \alpha_3 \in \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right]\}, \quad (6)$$

а елемент об'єму $d\Omega^* = H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$.

2. Постановка задачі. Запишемо рівняння теплопровідності шару у системі координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$:

$$-\frac{1}{H_1 H_2} \left(\partial_1 \left(\lambda \frac{H_2}{H_1} \partial_1 T \right) + \partial_2 \left(\lambda \frac{H_1}{H_2} \partial_2 T \right) + \partial_3 (\lambda H_1 H_2 \partial_3 T) \right) = q \text{ в } \Omega^* \quad (7)$$

Припустимо, що на лицьовій поверхні Γ^+ відбувається теплообмін за Ньютоном, а на лицьовій поверхні Γ^- та бічній поверхні Γ^s задано потоки q_n^- та q_n^s відповідно.

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = a(T - T_c^+) \text{ на } \Gamma^+, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q_n^- \text{ на } \Gamma^-, \quad (8)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q_n^s \text{ на } \Gamma^s. \quad (9)$$

Припускаємо, що $\lambda \in L^\infty(\Omega)$, $q \in H^{-1}(\Omega^*)$, $a \in L^\infty(\Gamma^+)$, $T_c^+ \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^+)$, $q_n^- \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^-)$, $q_n^s \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^s)$. Тоді варіаційна постановка задачі (7) з граничними умовами (8)-(9) має наступний вигляд:

Знайти $T \in V = H^1(\Omega^*)$, що задовольняє рівняння:

$$A(T, S) = L(S), \quad \forall S \in V, \quad (10)$$

де

$$A(T, S) = \int_{\Omega^*} \lambda \sum_{i=1}^3 \frac{1}{H_i^2} \partial_i T \partial_i S d\Omega^* + \int_{\Gamma^+} a T S d\sigma, \quad (11)$$

$$L(S) = \int_{\Omega^*} q S d\Omega^* + \int_{\Gamma^+} a T_c^+ S d\sigma - \int_{\Gamma^s} q_n^s S d\sigma - \int_{\Gamma^-} q_n^- S d\sigma. \quad (12)$$

Очевидно, що лінійна форма $L(\cdot): V \rightarrow R$ є обмеженою у просторі V , тобто $L \in V'$, а білінійна форма $A(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow R$ є симетричною у просторі V та V -еліптичною. Тому за теоремою Лакса-Мільграма існує єдиний розв'язок задачі (10).

3. Ієрархічна модель пониженої вимірності. Нехай $M \in \mathbb{Z}^+$.

Визначимо простір V^M :

$$V^M = \left\{ T^M \in V \mid T^M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{t}^T(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{P}\left(\frac{2\alpha_3}{d}\right) \right\} \quad (13)$$

Тут $\mathbf{t} = [t_0(\alpha_1, \alpha_2), \dots, t_M(\alpha_1, \alpha_2)]^T$ – варіації температури на серединній поверхні Ω , а $\mathbf{P} = [P_0(\xi), \dots, P_M(\xi)]^T$ – вектор лінійно незалежних на відрізьку $[-1, 1]$ неперервних функцій, наприклад, вектор лінійно неза-

лежних поліномів степеня M . Очевидно, що V^M є замкненим підпростором V .

Визначення. Розв'язком пониженої вимірності T^M ієрархічної моделі порядку m називається ортогональна проєкція розв'язку T варіаційної задачі (11) на простір V^M відносно енергетичного скалярного добутку $A(\cdot, \cdot)$, тобто $A(T - T^M, S) = 0$, $\forall S \in V^M$.

В результаті підстановки $T^M \in V^M$ у рівняння (10) та явного інтегрування за α_3 у кожному інтегралі ми отримуємо наступну варіаційну задачу пониженої вимірності для знаходження $T^M = \mathbf{t}^T \mathbf{P}$.

Знайти $\mathbf{t} \in \tilde{V} = [H^1(D)]^{M+1}$, що задовольняє рівняння

$$A^M(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = L^M(\mathbf{s}), \forall \mathbf{s} \in \tilde{V}, \quad (14)$$

де

$$A^M(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \int_D (\partial_1 \mathbf{s}^T \mathbf{B}_1 \partial_1 \mathbf{t} + \partial_2 \mathbf{s}^T \mathbf{B}_2 \partial_2 \mathbf{t} + \mathbf{s}^T \mathbf{B}_3 \mathbf{t}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (15)$$

$$L^M(\mathbf{s}) = \int_D \mathbf{s}^T (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \int_{\partial D} \mathbf{s}^T \mathbf{f}_3 d\Gamma, \quad (16)$$

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{A_i^2} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \lambda \frac{1 + k_{3-i} \alpha_3}{1 + k_i \alpha_3} \mathbf{P}\left(\frac{2\alpha_3}{d}\right) \mathbf{P}^T\left(\frac{2\alpha_3}{d}\right) d\alpha_3, \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_3 = & \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \lambda (1 + k_1 \alpha_3) (1 + k_2 \alpha_3) \partial_3 \mathbf{P}\left(\frac{2\alpha_3}{d}\right) \partial_3 \mathbf{P}^T\left(\frac{2\alpha_3}{d}\right) d\alpha_3 \\ & + a \mathbf{P}(1) \mathbf{P}^T(1) (1 + k_1 \frac{d}{2}) (1 + k_2 \frac{d}{2}), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\mathbf{f}_1 = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} q (1 + k_1 \alpha_3) (1 + k_2 \alpha_3) \mathbf{P}\left(\frac{2\alpha_3}{d}\right) d\alpha_3, \quad (20)$$

$$\mathbf{f}_2 = a T_c^+ (1 + k_1 \frac{d}{2}) (1 + k_2 \frac{d}{2}) \mathbf{P}(+1) - q_n^- (1 - k_1 \frac{d}{2}) (1 - k_2 \frac{d}{2}) \mathbf{P}(-1), \quad (21)$$

$$\mathbf{f}_3 = - \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} q_n \mathbf{P}\left(\frac{2\alpha_3}{d}\right) \sqrt{\frac{H_1^2 n_2^2 + H_2^2 n_1^2}{A_1^2 n_2^2 + A_2^2 n_1^2}} d\alpha_3, \quad n_1 = \frac{d\alpha_2}{d\eta}, \quad n_2 = -\frac{d\alpha_1}{d\eta}. \quad (22)$$

а $d\Gamma = \sqrt{A_1^2 n_2^2 + A_2^2 n_1^2} d\eta$ – елемент дуги ∂D .

Очевидно, що матриці $\mathbf{B}_i, i = \overline{1, 3}$ є симетричними та додатно-визначеними. Тоді мають місце наступні оцінки:

$$\mu_1 \|s\|_{1,D}^2 \leq A^M(s, s), \quad A^M(t, s) \leq \mu_2 \|t\|_{1,D} \|s\|_{1,D}, \quad (23)$$

$$|L^M(s)| \leq \mu_3 \|s\|_{1,D}, \quad \forall t, s \in \tilde{V}, \quad (24)$$

$$\mu_1 = \min_{i=1,3} \left(\|\lambda_{\min}(\mathbf{B}_i A_1 A_2)\|_{\infty, D} \right) > 0, \quad \mu_2 = \max_{i=1,3} \left(\|\lambda_{\max}(\mathbf{B}_i A_1 A_2)\|_{\infty, D} \right) > 0,$$

$$\mu_3 = \|(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) A_1 A_2\|_{0,D} + \|\mathbf{f}_3\|_{-\frac{1}{2}, \partial D}.$$

Теорема 1. Розв'язок $t \in \tilde{V}$ варіаційної задачі (14) існує та є єдиним.

Доведення. Випливає з наступних тотожностей:

$$A^M(t, s) \equiv A(T, S), \quad L^M(s) \equiv L(S), \quad \forall T = \mathbf{t}^T \mathbf{P} \in V^M, \quad S = \mathbf{s}^T \mathbf{P} \in V^M,$$

та існування і єдиності ортогональної проекції на підпростір гільбертового простору. Теорема доведена.

4. Априорна оцінка похибки ієрархічної моделі.

Розглянемо n -вимірний паралелепіпед

$$\Omega = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : -\frac{d_i}{2} \leq \alpha_i \leq \frac{d_i}{2}, i = \overline{1, n} \right\}. \quad (25)$$

Відомо [2], що функцію $u \in H^{2s}(\Omega)$ включно з похідними порядку $2s$ можна розвинути в ряд Фур'є

$$u(\alpha) = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}}(\alpha), \quad (26)$$

де $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$, $Q_{\mathbf{k}}(\alpha) = \prod_{i=1}^n P_{k_i} \left(\frac{2\alpha_i}{d_i} \right)$, $a_{\mathbf{k}} = (u, Q_{\mathbf{k}})_{0,\Omega} \|Q_{\mathbf{k}}\|_{0,\Omega}^{-2}$, $P_l(\xi)$ – поліном Лежандра l -го порядку. Визначимо оператор $L_i : H^2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, такий що

$$u \in H^2(\Omega) \rightarrow L_i u \stackrel{\text{def}}{=} \partial_i \left(\left(1 - \left(\frac{2\alpha_i}{d_i} \right)^2 \right) \partial_i u \right) \in L_2(\Omega),$$

та його степінь $L_i^0 \equiv I$, $L_i^{n+1} \equiv L_i(L_i^n)$, $n \geq 0$. Можна показати справедливості наступної теореми.

Теорема 2. Нехай функція $u \in H^{2s}(\Omega)$, $s > 0$, а мультиіндекс $\mathbf{N}$ задовольняє умові

$$\exists j \in \overline{1, n}, \forall i \in \overline{1, n} : \frac{\left(\frac{d_i}{2} \right)^2}{N_i(N_i + 1)} \leq \frac{\left(\frac{d_j}{2} \right)^2}{N_j(N_j + 1)} \quad (27)$$

Тоді відхилення функції u від її $\mathbf{N}$ -ї часткової суми Фур'є

$u_{\mathbf{N}}(\alpha) = \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{N}} a_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}}(\alpha)$ оцінюється наступним чином:

$$\|u - u_N\|_{r,\Omega} \leq C \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^{2s-r}}{(N_j(N_j+1))^{\frac{r}{2}}} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|L_i^s u\|_{0,\Omega}^2}, \quad (28)$$

де $C = C(n, s) > 0$, $r = \overline{0, 1}$.

Справедлива наступна теорема, яка встановлює априорну оцінку похибки ієрархічної моделі.

Теорема 3. Припустимо, що 1) область D є прямокутною; 2) $\Lambda = \max(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) < \infty$, $\Lambda_i = \sup_{\Omega} \left(\lambda \frac{H_i H_2}{H_i^2} \right)$, $i = \overline{1, 3}$; 3) розв'язок T задачі (10)-(12) належить простору $H^{2s}(D \times [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}])$. Тоді справедлива наступна оцінка:

$$\|T - T^M\|_A \leq \tilde{C}_1 \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^{2s-1}}{(M(M+1))^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|L_i^s T\|_{0,D \times [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]}^2}, \quad (29)$$

де T^M є розв'язком задачі (14)-(16).

Доведення. Розглянемо наступний інтерполянт довільної функції $T \in H^{2s}(D \times [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}])$:

$$\tilde{T}^M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{m=0}^M t_m(\alpha_1, \alpha_2) P_m\left(\frac{2\alpha_3}{d}\right), \quad (30)$$

$$t_m(\alpha_1, \alpha_2) = \left\| P_m\left(\frac{2\alpha_3}{d}\right) \right\|_{0, D \times [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]}^{-2} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} T(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) P_m\left(\frac{2\alpha_3}{d}\right) d\zeta, \quad (31)$$

За теоремою Фубіні [2] функції $t_m \in L_2(D)$. Для визначеності припустимо, що $D = [-\frac{d_1}{2}, \frac{d_1}{2}] \times [-\frac{d_2}{2}, \frac{d_2}{2}]$. Розвинемо t_m в ряд Фур'є:

$$t_m(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{k,n=0}^{\infty} a_{knm} P_k\left(\frac{2\alpha_1}{d_1}\right) P_n\left(\frac{2\alpha_2}{d_2}\right), \quad (32)$$

де

$$a_{knm} = \left\| P_k\left(\frac{2\alpha_1}{d_1}\right) P_n\left(\frac{2\alpha_2}{d_2}\right) \right\|_{0,D}^{-2} \int_D t_m(\xi, \eta) P_k\left(\frac{2\alpha_1}{d_1}\right) P_n\left(\frac{2\alpha_2}{d_2}\right) d\xi d\eta, \quad (33)$$

і підставимо (31) в (33). В результаті отримаємо

$$a_{knm} = \left\| Q_{knm} \right\|_{0,D \times [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]}^{-2} (T, Q_{knm})_{0,D \times [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]}. \quad (34)$$

Тоді з (30), (32) отримуємо

$$T - \tilde{T}^M = T - \sum_{m=0}^M \sum_{k,n=0}^{\infty} a_{knm} Q_{knm}. \quad (35)$$

З теореми 2 випливає, що має місце наступна оцінка

$$\left\| T - \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^K \sum_{n=0}^N a_{kmn} Q_{kmn} \right\|_{r, D \times [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]} \leq C \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^{2s-r}}{(M(M+1))^{s-\frac{r}{2}}} \sqrt{\sum_{i=1}^3 \|L_i^s T\|_{0, D \times [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]}^2}, \quad (36)$$

якщо виконуються нерівності

$$\frac{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2}{K(K+1)} \leq \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2}{M(M+1)}, \quad \frac{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2}{N(N+1)} \leq \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2}{M(M+1)}.$$

В результаті з (35), (36) отримуємо:

$$\begin{aligned} \|T - \tilde{T}^M\|_{r, \Omega} &= \lim_{K, N \rightarrow \infty} \left\| T - \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^K \sum_{n=0}^N a_{kmn} Q_{kmn} \right\|_{r, D \times [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]} \\ &\leq C \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^{2s-r}}{(M(M+1))^{s-\frac{r}{2}}} \sqrt{\sum_{i=1}^3 \|L_i^s T\|_{0, \Omega}^2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Розглянемо білінійну форму $A(T, T)$, визначену в (11). З умов теореми та обмеженості оператора сліду функції впливають наступні оцінки

$$A(T, T) \leq \Lambda \|T\|_{1, D \times [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]}^2 + C_1 \|T\|_{1, D \times [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]}^2 \leq (\Lambda + C_1) \|T\|_{1, D \times [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]}^2, \quad \forall T \in V \quad (38)$$

Враховуючи (39), (40) і той факт, що розв'язок T^M є найкращим наближенням T в нормі $\|\cdot\|_A$, отримуємо

$$\|T - T^M\|_A \leq \|T - \tilde{T}^M\|_A \leq \tilde{C}_1 \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^{2s-1}}{(M(M+1))^{s-\frac{1}{2}}} \sqrt{\sum_{i=1}^3 \|L_i^s T\|_{0, \Omega}^2} \quad (39)$$

Теорема доведена.

5. Апроксимація за товщиною прошарку. Зауважимо, що рівняння (14)-(16) дають загальний вигляд побудованої ієрархічної математичної моделі теплопровідності тонкого прошарку, який не залежить від вигляду (13) конкретного розподілу температури за товщиною тонкого покриття – математична модель повністю задається матрицями $B_i, i = \overline{1,3}$ та векторами $f_i, i = \overline{1,3}$. Для широкого класу (необов'язково поліноміальних) функцій $P_i(\xi), i = \overline{0, M}$ ці матриці та вектори можливо обчислити в аналітичній формі, використовуючи пакет *Mathematica* 3.0 [12]. Однак такий підхід має той недолік, що при зміні функцій $P_i(\xi), i = \overline{0, M}$ необхідно повторно обчислювати ці матриці та вектори, що приводить до певних незручностей при програмній реалізації.

Спробуємо перетворити вирази (17)-(22) таким чином, щоб спростити програмну реалізацію. Оскільки $-1 < k_i \frac{d}{2} < 1$, то

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_i &= \frac{1}{A_i^2} \frac{d}{2} \int_{-1}^1 \lambda \frac{1+k_{3-i} \frac{d}{2} \xi}{1+k_i \frac{d}{2} \xi} \mathbf{P}(\xi) \mathbf{P}^T(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{A_i^2} \frac{d}{2} \int_{-1}^1 \lambda \left(1+k_{3-i} \frac{d}{2} \xi\right) \sum_{l=0}^{\infty} \left(-k_i \frac{d}{2} \xi\right)^l \mathbf{P}(\xi) \mathbf{P}^T(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{A_i^2} \frac{d}{2} \lambda \left(\mathbf{G}_0^0 + (k_{3-i} - k_i) \sum_{l=1}^{\infty} (-k_i)^{l-1} \left(\frac{d}{2}\right)^l \mathbf{G}_l^0 \right), \quad i=1,2, \quad (40)
\end{aligned}$$

де $\mathbf{G}_l^k = \int_{-1}^1 \xi^l \frac{d^k \mathbf{P}(\xi)}{d\xi^k} \frac{d^k \mathbf{P}^T(\xi)}{d\xi^k} d\xi$, $k, l \geq 0$. Застосовуючи аналогічні перетворення та тотожності

$$\begin{aligned}
H_1^2 n_2^2 + H_2^2 n_1^2 &= (A_1^2 n_2^2 + A_2^2 n_1^2) (1 + 2b_1 \alpha_3 + b_2 \alpha_3^2), \\
b_1 &= \frac{k_1 A_1^2 n_2^2 + k_2 A_2^2 n_1^2}{A_1^2 n_2^2 + A_2^2 n_1^2}, \quad b_2 = \frac{k_1^2 A_1^2 n_2^2 + k_2^2 A_2^2 n_1^2}{A_1^2 n_2^2 + A_2^2 n_1^2}, \quad \sqrt{1 + 2b_1 \xi + b_2 \xi^2} = \sum_{l=0}^{\infty} r_l \xi^l,
\end{aligned}$$

отримаємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_3 &= \lambda \left(\frac{2}{d} \mathbf{G}_0^1 + (k_1 + k_2) \mathbf{G}_1^1 + k_1 k_2 \frac{d}{2} \mathbf{G}_2^1 \right) \\
&\quad + a \mathbf{P}(1) \mathbf{P}^T(1) \left(1 + (k_1 + k_2) \frac{d}{2} + k_1 k_2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right), \quad (41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 &= \frac{d}{2} \left(\int_{-1}^1 q(\alpha_1, \alpha_2, \frac{d}{2} \xi) \mathbf{P}(\xi) d\xi + (k_1 + k_2) \frac{d}{2} \int_{-1}^1 q(\alpha_1, \alpha_2, \frac{d}{2} \xi) \xi \mathbf{P}(\xi) d\xi \right. \\
&\quad \left. + k_1 k_2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 \int_{-1}^1 q(\alpha_1, \alpha_2, \frac{d}{2} \xi) \xi^2 \mathbf{P}(\xi) d\xi \right), \quad (42)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_3 = \frac{d}{2} a \sum_{l=0}^{\infty} r_l \left(\frac{d}{2}\right)^l \int_{-1}^1 q_n(\alpha_1, \alpha_2, \frac{d}{2} \xi) \xi^l \mathbf{P}(\xi) d\xi. \quad (43)$$

Для довільних $k, l \geq 0$ матриці $\mathbf{G}_l^k$ та вектори виду $\int_{-1}^1 f(\xi) \xi^l \mathbf{P}(\xi) d\xi$

легко обчислити з використанням чисельного інтегрування або аналітичного інтегрування [12]. Програма потім може зчитати ці матриці з файлу, що унезалежнює програму від конкретного виду функцій $P_i(\xi)$, $i = \overline{0, M}$. Більш того, формули (21), (40)-(43) дають явний розклад лінійної форми $L^M(\mathbf{s})$ та білінійної форми $A^M(\mathbf{t}, \mathbf{s})$ за степенями товщини прошарку d .

Нехай $\gamma = \max_{i=1,2} (|k_i| \frac{d}{2}) < 1$. Для $N \geq 1$ введемо білінійну форму

$A^{M,N}(\cdot, \cdot): \tilde{V} \times \tilde{V} \rightarrow R$ та лінійну форму $L^{M,N}(\cdot): \tilde{V} \rightarrow R$ так, щоб виконувались рівності

$$\begin{aligned} A^M(\mathbf{t}, \mathbf{s}) &= A^{M,N}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) + O(\gamma^{N+1}), \forall \mathbf{t}, \mathbf{s} \in \tilde{V}, \\ L^M(\mathbf{s}) &= L^{M,N}(\mathbf{s}) + O(\gamma^{N+1}), \forall \mathbf{s} \in \tilde{V}, \end{aligned}$$

і сформулюємо наступну варіаційну задачу:

Знайти $\mathbf{t}^N \in \tilde{V}$, що задовольняє рівняння

$$A^{M,N}(\mathbf{t}^N, \mathbf{s}) = L^{M,N}(\mathbf{s}), \forall \mathbf{s} \in \tilde{V}, \quad (44)$$

де

$$L^{M,N}(\mathbf{s}) = \int_D \mathbf{s}^T (\mathbf{f}_1^N + \mathbf{f}_2^N) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \int_{\partial D} \mathbf{s}^T \mathbf{f}_3^N d\Gamma, \quad (45)$$

$$A^{M,N}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \int_D (\partial_1 \mathbf{s}^T \mathbf{B}_1^N \partial_1 \mathbf{t} + \partial_2 \mathbf{s}^T \mathbf{B}_2^N \partial_2 \mathbf{t} + \mathbf{s}^T \mathbf{B}_3^N \mathbf{t}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (46)$$

$$\mathbf{f}_1^N = \begin{cases} \frac{d}{2} \int_{-1}^1 q(\alpha_1, \alpha_1, \frac{d}{2} \xi) P(\xi) d\xi, N=1 \\ \mathbf{f}_1^1 + (k_1 + k_2) \left(\frac{d}{2}\right)^2 \int_{-1}^1 q(\alpha_1, \alpha_1, \frac{d}{2} \xi) \xi P(\xi) d\xi, N=2 \\ \mathbf{f}_1, N \geq 3 \end{cases} \quad (47)$$

$$\mathbf{f}_2^N = \begin{cases} (aT_c^+ \mathbf{P}(1) - q_n^- \mathbf{P}(-1)) + (k_1 + k_2) \frac{d}{2} (T_c^+ \mathbf{P}(1) + q_n^- \mathbf{P}(-1)), N=1 \\ \mathbf{f}_2, N \geq 2 \end{cases}, \quad (48)$$

$$\mathbf{f}_3^N = -\frac{d}{2} a \sum_{l=0}^{N-1} r_l \left(\frac{d}{2}\right)^l \int_{-1}^1 q_n^s(\alpha_1, \alpha_2, \frac{d}{2} \xi) \xi^l \mathbf{P}(\xi) d\xi, \quad (49)$$

$$\mathbf{B}_i^N = \begin{cases} \frac{1}{A_i^2} \frac{d}{2} \lambda \mathbf{G}_0^0, N=1 \\ \frac{1}{A_i^2} \frac{d}{2} \lambda \left(\mathbf{G}_0^0 + (k_{3-i} - k_i) \sum_{l=1}^{N-1} (-k_i)^{l-1} \left(\frac{d}{2}\right)^l \mathbf{G}_l^0 \right), N > 1 \end{cases}, i=1,2, \quad (50)$$

$$\mathbf{B}_3^N = \begin{cases} \lambda \frac{2}{d} G_0^1 + (\lambda(k_1 + k_2) G_1^1 + a \mathbf{P}(1) \mathbf{P}^T(1)) \\ + (\lambda k_1 k_2 G_2^1 + a \mathbf{P}(1) \mathbf{P}^T(1) (k_1 + k_2)) \frac{d}{2}, N=1, \\ \mathbf{B}_3, N > 1 \end{cases} \quad (51)$$

Теорема 4. Розв'язок $\mathbf{t}^N \in \tilde{V}$ варіаційної задачі (44) існує та є єдиним, якщо виконується одна з наступних умов:

□ $N=1$, матриця $\mathbf{B}_3^1$ є додатно визначеною;

□ $N \geq 2$.

Доведення. Очевидно, що лінійна форма $L^{M,N}(\cdot): \tilde{V} \rightarrow R$ є обмеженою. Якщо ми покажемо, що білінійна форма $A^{M,N}(\cdot, \cdot): \tilde{V} \times \tilde{V} \rightarrow R$ є $\tilde{V}$ -еліптичною, то за теоремою Лакса-Мільграма існуватиме єдиний розв'язок задачі (44). Матриці $\mathbf{B}_i^N, i = \overline{1,3}$ є симетричними. Нескладно показати, що

$$\mathbf{B}_i^N = \int_{-1}^1 f_i(\xi) \mathbf{P}(\xi) \mathbf{P}^T(\xi) d\xi, \quad N \geq 1, \quad i = \overline{1,2}, \quad (52)$$

причому з огляду на те, що $-1 < k_i \frac{d}{2} < 1$, функції $f_i(\xi), i = \overline{1,2}$ є додатними на відрізку $[-1,1]$. Тобто матриці $\mathbf{B}_1^N, \mathbf{B}_2^N$ є матрицями Грама для функцій $P_i(\xi), i = \overline{0,M}$, а тому є додатно визначеними для всіх $N \geq 1$.

Легко бачити, що

$$\mathbf{s}^T \mathbf{B}_3^N \mathbf{s} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} f_3(\xi) \left(\partial_3 \left(\mathbf{s}^T \mathbf{P} \left(\frac{2\alpha_3}{d} \right) \right) \right)^2 d\xi + f_4^N \left(\mathbf{s}^T \mathbf{P}(1) \right)^2,$$

де $f_3(\xi) > 0, -1 \leq \xi \leq 1, f_4^N > 0, \forall N \geq 2$, а про знак f_4^1 ми нічого сказати не можемо. Тому при $N \geq 2$ матриця $\mathbf{B}_3^N$ є завжди додатно визначеною, а при $N=1$ матриця $\mathbf{B}_3^N$ є додатно визначеною за умовою теореми. Тоді

$$A^{M,N}(\mathbf{s}, \mathbf{s}) \geq \mu_4 \|\mathbf{s}\|_{1,D}^2, \quad \forall \mathbf{s} \in \tilde{V}, \quad (53)$$

$$A^{M,N}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) \leq \mu_5 \|\mathbf{t}\|_{1,D} \|\mathbf{s}\|_{1,D}, \quad \forall \mathbf{t}, \mathbf{s} \in \tilde{V}, \quad (54)$$

$$\mu_4 = \min_{i=1,3} \left(\left\| \lambda_{\min} \left(\mathbf{B}_i^N A_1 A_2 \right) \right\|_{\infty, D} \right) > 0, \quad \mu_5 = \max_{i=1,3} \left(\left\| \lambda_{\max} \left(\mathbf{B}_i^N A_1 A_2 \right) \right\|_{\infty, D} \right) > 0$$

Теорема доведена.

6. Апріорна оцінка похибки апроксимації за товщиною про шарку. Введемо позначення

$$\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_i^N = \gamma^{N+1} \mathbf{p}_i, \quad i = \overline{1,3}, \quad \mathbf{B}_i - \mathbf{B}_i^N = \left(\frac{d}{2} \right)^{N+1} \mathbf{H}_i,$$

де $\mathbf{p}_i \in [L_2(D)]^{M+1}, i = 1,2, \quad \mathbf{p}_3 \in [H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)]^{M+1}, \quad \mathbf{H}_i \in [L_2(D)]^{(M+1) \times (M+1)},$
 $i = \overline{1,3},$

$$\mu_6 = \|(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)A_1A_2\|_{0,D} + \|\mathbf{p}_3\|_{-\frac{1}{2},\partial D}, \quad \mu_7 = \|(\mathbf{f}_1^N + \mathbf{f}_2^N)A_1A_2\|_{0,D} + \|\mathbf{f}_3^N\|_{-\frac{1}{2},\partial D}$$

$$\mu_8 = \max_{i=1,3} \|\lambda_{\max}(\mathbf{H}_i A_1 A_2)\|_{\infty,D}.$$

Теорема 5. Нехай $\mathbf{t}, \mathbf{t}^N \in \tilde{V}$ є розв'язками задач (14) та (44) відповідно. Тоді справедлива наступна оцінка

$$\|\mathbf{t} - \mathbf{t}^N\|_{1,D} \leq \tilde{C}_2 \gamma^{N+1}, \quad \tilde{C}_2 > 0, \quad (55)$$

якщо $\gamma^{N+1} \frac{\mu_8}{\mu_4} < 1$.

Доведення. Нехай $\mathbf{t}, \mathbf{t}^N \in \tilde{V}$ є розв'язками задач (14) та (44) відповідно. За нерівністю трикутника

$$\|\mathbf{t} - \mathbf{t}^N\|_{1,D} \leq \|\mathbf{t} - \tilde{\mathbf{t}}\|_{1,D} + \|\tilde{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^N\|_{1,D}, \quad (56)$$

де $\tilde{\mathbf{t}} \in \tilde{V}$ є розв'язком наступної варіаційної задачі:

$$\begin{aligned} &\text{Знайти } \tilde{\mathbf{t}} \in \tilde{V}, \text{ що задовольняє рівняння} \\ &A^M(\tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{s}) = L^{M,N}(\mathbf{s}), \quad \forall \mathbf{s} \in \tilde{V}, \end{aligned} \quad (57)$$

Оцінимо спочатку перший доданок в (56). Тоді, використовуючи додатну визначеність білінійної форми $A^M(\cdot, \cdot)$ та неперервність лінійних форм $L^M(\cdot)$ та $L^{M,N}(\cdot)$, отримаємо

$$\begin{aligned} \mu_1 \|\mathbf{t} - \tilde{\mathbf{t}}\|_{1,D}^2 &\leq A^M(\mathbf{t} - \tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{t} - \tilde{\mathbf{t}}) = L^M(\mathbf{t} - \tilde{\mathbf{t}}) - L^{M,N}(\mathbf{t} - \tilde{\mathbf{t}}) \\ &= \gamma^{N+1} \left(\int_D (\mathbf{t} - \tilde{\mathbf{t}})^T (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \int_{\partial D} (\mathbf{t} - \tilde{\mathbf{t}})^T \mathbf{p}_3 d\Gamma \right) \\ &\leq \gamma^{N+1} \mu_6 \|\mathbf{t} - \tilde{\mathbf{t}}\|_{1,D}, \end{aligned}$$

а отже

$$\|\mathbf{t} - \tilde{\mathbf{t}}\|_{1,D} \leq \gamma^{N+1} \frac{\mu_6}{\mu_1}. \quad (58)$$

Оцінимо другий доданок в (56). Білінійні форми $A^M(\cdot, \cdot)$ та $A^{M,N}(\cdot, \cdot)$ визначають неперервні оператори $B^M : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$ та $B^{M,N} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$ відповідно:

$$A^{M,N}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = (B^{M,N} \mathbf{t}, \mathbf{s})_{1,D}, \quad A^M(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = (B^M \mathbf{t}, \mathbf{s})_{1,D}, \quad \forall \mathbf{t}, \mathbf{s} \in \tilde{V},$$

З огляду на теорему про апроксимацію оберненого обмеженого оператора [3] випливає, що

$$\|\tilde{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^N\|_{1,D} \leq \frac{\rho}{1-\rho} \|(B^{M,N})^{-1}\| \mu_7, \quad (59)$$

якщо $\rho = \|(B^{M,N})^{-1}(B^{M,N} - B^M)\| < 1$. Оцінимо величину ρ . З додатної визначеності білінійної форми $A^{M,N}(\cdot, \cdot)$ випливає, що

$$\|(B^{M,N})^{-1}\| \leq \mu_4^{-1}. \quad (60)$$

$$\begin{aligned} |((B^M - B^{M,N})\mathbf{t}, \mathbf{s})_{1,D}| &= |A^M(\mathbf{t}, \mathbf{s}) - A^{M,N}(\mathbf{t}, \mathbf{s})| = \\ &= \gamma^{N+1} \left| \int_D (\partial_1 \mathbf{s}^T \mathbf{H}_1 \partial_1 \mathbf{t} + \partial_2 \mathbf{s}^T \mathbf{H}_2 \partial_2 \mathbf{t} + \mathbf{s}^T \mathbf{H}_3 \mathbf{t}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \right| \\ &\leq \gamma^{N+1} \mu_8 \|\mathbf{t}\|_{1,D} \|\mathbf{s}\|_{1,D}. \end{aligned} \quad (61)$$

З огляду на (60), (61) маємо

$$\rho = \|(B^{M,N})^{-1}(B^{M,N} - B^M)\| \leq \|(B^{M,N})^{-1}\| \|B^{M,N} - B^M\| \leq \gamma^{N+1} \frac{\mu_8}{\mu_4},$$

та

$$\|\tilde{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^N\|_{1,D} \leq \gamma^{N+1} \frac{\mu_7 \mu_8}{(1-\rho) \mu_4^2}. \quad (62)$$

Остаточно, якщо $\rho < 1$, то з (58), (62) отримуємо

$$\|\mathbf{t} - \mathbf{t}^N\|_{1,D} \leq \gamma^{N+1} \left(\frac{\mu_6}{\mu_1} + \frac{\mu_7 \mu_8}{(1-\rho) \mu_4^2} \right) \quad (63)$$

Теорема доведена.

7. Дискретизація Гальоркіна. Для побудови наближених розв'язків задачі (44) виберемо послідовність скінченно-елементних підпросторів $\{\tilde{V}_h\}$ з простору $\tilde{V}$ [9] таким чином, що

$$\begin{cases} \dim \tilde{V}_h \rightarrow \infty \text{ при } h \rightarrow 0, \\ \bigcup_{h>0} \tilde{V}_h \text{ щільно вкладена в } \tilde{V}. \end{cases} \quad (64)$$

Апроксимація Гальоркіна $\mathbf{t}_h^N$ з простору $\tilde{V}_h$ розв'язку $\mathbf{t}^N \in \tilde{V}$ задачі (44) визначається наступною варіаційною задачею.

Знайти $\mathbf{t}_h^N \in \tilde{V}_h$, що задовольняє рівняння

$$A^{M,N}(\mathbf{t}_h^N, \mathbf{s}) = L^{M,N}(\mathbf{s}), \forall \mathbf{s} \in \tilde{V}_h \quad (65)$$

Відомо [10], що

$$\|\mathbf{t}^N - \mathbf{t}_h^N\|_{1,D} \leq \tilde{C}_3 \frac{h^{\min(p, 2s)}}{p^{2s-1}} \|\mathbf{t}^N\|_{2s,D}. \quad (66)$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 6. Нехай виконуються умови теорем 1-5. Тоді справедлива наступна апріорна оцінка похибки наближеного розв'язку $T_h^{M,N} = (\mathbf{t}_h^N)^T \mathbf{P}$ ієрархічної моделі:

$$\begin{aligned} \|T - T_h^{M,N}\|_A &\leq \tilde{C}_1 \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^{2s-1}}{(M(M+1))^{s-\frac{1}{2}}} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|L_i^s T\|_{0,D \times [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]}^2} \\ &+ \mu_2 \tilde{C}_2 \gamma^{N+1} + \mu_2 \tilde{C}_3 \frac{h^{\min(p, 2s)}}{p^{2s-1}} \|\mathbf{t}^N\|_{2s,D}. \end{aligned} \quad (67)$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що

$$\|T\|_A^2 = A(T, T) = A^M(\mathbf{t}, \mathbf{t}) \leq \mu_2 \|\mathbf{t}\|_{1,D}^2, \quad \forall T = \mathbf{t}^T \mathbf{P} \in V^M. \quad (68)$$

За нерівністю трикутника

$$\|T - T_h^{M,N}\|_A \leq \|T - T^M\|_A + \|T^M - T^{M,N}\|_A + \|T^{M,N} - T_h^{M,N}\|_A, \quad (69)$$

де $T \in H^{2s}(D \times [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}])$ є розв'язком задачі (10), $T^M = \mathbf{t}^T \mathbf{P} \in V^M$ відповідає розв'язку задачі (14), $T^{M,N} = (\mathbf{t}^N)^T \mathbf{P} \in V^M$ відповідає розв'язку задачі (44), а $T_h^{M,N} = (\mathbf{t}_h^N)^T \mathbf{P} \in V^M$ відповідає розв'язку задачі (65). Твердження теореми випливає з (66), (67) та результатів теорем 3, 5. Теорему доведено.

Література.

1. Кит Г.С., Кривцун М.Т. Плоские задачи термоупругости для тела с трещинами. К.: Наук. думка. 1983. 273с.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. II. М.: Наука. 1991. 544с.
3. Остудін Б.А., Шинкаренко Г.А. Методи функціонального аналізу в обчислювальній математиці. Функціональні простори. К.: НМК ВО, 1992. 152с.
4. Пелех Б.П. Обобщенная теория оболочек. Л.: Вища школа, 1978. 159с.
5. Савула Я.Г., Кревс В.В. Про застосування методу декомпозиції області до задачі теплопровідності для тіла з тонким покриттям. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1996. Вип. 44. С.3-10.
6. Савула Я.Г. Математична модель теплоперенесення через тривимірне тіло з тонким плоским покриттям. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип. 42. С.3-7.
7. Савула Я.Г., Сипа І.М., Струтинський І.В. Математичні моделі теплопровідності для тіл з тонкими покриттями і включеннями. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992. Вип.37. С.39-45.
8. Флейшман Н.П. Математичні моделі теплового спряження середовищ із тонкими чужорідними прошарками

або покриттями. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип.39. С.30-34. 9. Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К.: НМК ВО, 1991. 87с. 10. Brenner S.C., Scott L.R. The mathematical theory of finite element methods, Springer-Verlag New-York, Inc. 1994. 350p. 11. Rektorys K. Variational methods in mathematics, science and engineering. Prague. 1980. 589p. 12. Wolfram S. Mathematica: A system for doing mathematics by computer. Second Edition. Addison-Wesley. 1991. 500p.

Kreys V.V., Savula Y.G.

On a hierarchical model of heat conduction of a thin layer

The problem of mathematical modelling of heat conduction in thin media was considered by many researchers [1,5-8]. In this paper we propose a general approach to construction of dimensionally reduced mathematical model of heat conduction in thin media. A general form of the mathematical model is derived, which is independent of the concrete temperature distribution by thickness of the thin layer. Symmetry and positive definiteness of the obtained bilinear forms are investigated. An a priori error estimate is obtained.

Стаття надійшла до редколегії 1.12.1998

УДК 539.3

М.В. Марчук, М.М. Хом'як

Варіаційний підхід в задачі про неідеальний міжшаровий контакт

Модель шаруватого середовища часто використовується при розрахунках сучасних, в тому числі композиційних матеріалів. Найбільш адекватний підхід вимагає дискретного розгляду шарів і врахування специфіки міжшарової взаємодії, що допускає наявність зон типу розшарувань, проковзування тощо. Дана робота стосується деяких аспектів варіаційної постановки статичної задачі як основи змішаного МСЕ [12] в переміщеннях шарів і контактних напруженнях, оскільки відомо, що точність визначення останніх має вирішальний вплив на оцінку крайових ефектів і процесів міжшарового руйнування [4,10]. Розглядається функціонал Лагранжа для шаруватої структури в рамках моделі стрибка і зв'язок з постановкою у варіаційних нерівностях, що дозволяє із загальних позицій досліджувати як ідеальний, так і неідеальний контакт. Приведено приклад розрахунку.

1. Основні позначення та співвідношення. Розглянемо структуру, що складається з N тонких шарів постійної товщини $2h = 2 \sum_{j=1}^N h^{(j)}$

і займає обмежену область $\bigcup_{j=1}^N \Omega^{(j)} = \Omega \subset R^3$, причому область шару $\Omega^{(j)} = S^{(j)} \times [-h^{(j)}; +h^{(j)}]$ віднесена до криволінійної ортогональної системи координат $(\alpha^{(j)}, \beta^{(j)})$ на серединній поверхні $S^{(j)}$, а товщина $z^{(j)} \in [-h^{(j)}; +h^{(j)}]$ відраховується вздовж нормалі до $S^{(j)}$, додатній напрям якої визначає також порядок нумерації шарів. Область шару має неперервну за Ліпшицем границю $\partial\Omega^{(j)} = S_+^{(j)} \cup S_-^{(j)} \cup L^{(j)}$, що складена з лицьових поверхонь $S_{\pm}^{(j)} (z = \pm h^{(j)})$ і лінійчатої поверхні на торці $L^{(j)} = \Gamma^{(j)} \times [-h^{(j)}; +h^{(j)}]$, утвореної нормаллю, біжучою вздовж контура $\Gamma^{(j)}$ серединної поверхні (теж неперервного за Ліпшицем). У рамках моделі стрибка міжшаровий контакт моделюємо фізичною поверхнею нульової товщини $S^{(j,j+1)} = S_+^{(j)} \cap S_-^{(j+1)}$, причому в загальному випадку $S^{(j,j+1)} \subseteq S_+^{(j)}$, $S^{(j,j+1)} \subseteq S_-^{(j+1)}$.

Напружено-деформований стан (НДС) окремого шару описується вектором компонент переміщень $u^{(j)} = (u_{\alpha}, u_{\beta}, u_z)^T$, деформації $\varepsilon^{(j)} = (\varepsilon_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{\beta\beta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha z}, \varepsilon_{\beta z})^T$ і напружень $\sigma^{(j)} = (\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha z}, \sigma_{\beta z})^T$ в області $\Omega^{(j)}$, що зумовлені дією силових навантажень $\sigma_{\pm}^{(j)}$ на лицьових поверхнях $S_{\pm}^{(j)}$ (в їх ролі можуть бути зовнішні або контактні напруження)

$$\sigma^{(j)} \Big|_{z=\pm h} = (\sigma_{zz}^{(j)}, \sigma_{\alpha z}^{(j)}, \sigma_{\beta z}^{(j)})^T = \sigma_{\pm} \text{ на } S_{\pm}^{(j)} \quad (1.1)$$

при таких головних і природних граничних умовах на торцях $L^{(j)}$:

$$\mathbf{G}_u^{(j)} u^{(j)} = U_0^{(j)} \text{ на } \Gamma_u^{(j)} \times [-h^{(j)}, +h^{(j)}], \quad (1.2)$$

$$\mathbf{G}_{\sigma}^{(j)} \sigma^{(j)} = N_0^{(j)} \text{ на } \Gamma_{\sigma}^{(j)} \times [-h^{(j)}, +h^{(j)}], \Gamma^{(j)} = \Gamma_u^{(j)} \cup \Gamma_{\sigma}^{(j)}. \quad (1.3)$$

Крім умов (1.1)–(1.3), крайова задача лінійної теорії пружності для шару містить (однорідну–у випадку відсутності об'ємних навантажень) систему диференціальних рівнянь рівноваги “в переміщеннях”, 2-го порядку кожне,

$$A_u^{(j)} u^{(j)} = 0 \text{ в } \Omega^{(j)}. \quad (1.4)$$

Геометричні співвідношення й закон пружності запишемо у виді

$$\varepsilon^{(j)} = C^{(j)} u^{(j)}, \sigma^{(j)} = D^{(j)} \varepsilon^{(j)} \quad (1.5)$$

де $C^{(j)}$ – матриця диференціальних операторів не вище першого порядку, а матриця пружних констант $D^{(j)}$ (обмежимося однорідним або кусково-однорідним матеріалом) залежить від його анізотропії, при цьому для реальних матеріалів виконуються умови симетрії та еліптичності

$$D^{(j)} = \{d_{ik}^{(j)}\}_{i,k=1}^3, d_{ik}^{(j)} = d_{ki}^{(j)}, d_{ik}^{(j)} \xi_i \xi_k \geq c_1 \xi_i \xi_i, c_1 > 0, \forall \xi_i. \quad (1.6)$$

Функціонал повної енергії задачі (1.1)–(1.5) запишемо так:

$$J(u^{(j)}) = a^{(j)}(u^{(j)}, u^{(j)}) - 2(f^{(j)}, u^{(j)}), \quad (1.7)$$

$$(f^{(j)}, u^{(j)}) = \iint_{S_+^{(j)}} \sigma_+^{(j)} u_+^{(j)} dS + \iint_{S_-^{(j)}} \sigma_-^{(j)} u_-^{(j)} dS + (f_\Gamma^{(j)}, u^{(j)}). \quad (1.8)$$

де $(f_\Gamma^{(j)}, u^{(j)}) = \int_{-h^{(j)}}^{+h^{(j)}} dz^{(j)} \int_{\Gamma_\sigma^{(j)}} N_0^{(j)} u^{(j)} d\Gamma_\sigma^{(j)}$ – вплив навантаження на торцях,

$a^{(j)}(u^{(j)}, u^{(j)}) = 1/2 \int \{\varepsilon^{(j)}\}^T D^{(j)} \varepsilon^{(j)} d\Omega^{(j)}$ – квадратична форма енергії деформації, яка є неперервною та симетричною, крім того,

$$a^{(j)}(v^{(j)}, v^{(j)}) \geq \gamma_j^2 \|v^{(j)}\|^2, \gamma_j^2 > 0, \forall v^{(j)} \in \ker V^{(j)}. \quad (1.9)$$

Тут норма розглядається на просторі Соболева $V^{(j)} = (H^1(\Omega^{(j)}))^3$, $H^1(\Omega^{(j)}) = W_2^1(\Omega^{(j)})$, що вміщає підпростір $\ker V^{(j)} = V^{(j)} \setminus Q$, де Q – фактор-простір жорстких переміщень тіла з нульовою енергією. Нерівність (1.9) для криволінійного шару в припущенні достатньої гладкості функцій, які описують його геометрію, можна довести на основі нерівності типу нерівності Корна і є наслідком коерцитивності системи операторів, ототожнених з компонентами деформацій $\varepsilon^{(j)}$, відносно простору інтегрованих з квадратом функцій $U^{(j)}(\Omega^{(j)}) = (L_2(\Omega^{(j)}))^3$ [5, 7]. Щодо лінійної частини прийнято стандартне припущення

$$\sigma_\pm^{(j)} \in (L_2(S_\pm^{(j)}))^3, N_0^{(j)} \in (L_2(\Gamma_\sigma^{(j)} \times [-h^{(j)}; h^{(j)}]))^3.$$

Уточнимо підпростір $\ker V^{(j)}$ стосовно задачі про міжшаровий контакт. Як стверджує перша теорема про сліди [5], на границі області $\partial\Omega^{(j)}$ можна визначити неперервне лінійне відображення (оператор сліду)

$$u^{(j)} \in V(\Omega^{(j)}) \rightarrow \text{tr } u^{(j)} \in (L^2(\partial\Omega^{(j)}))^3. \quad (1.10)$$

З використанням поняття сліду введемо множину кінематично допустимих вектор-функцій (к.д.ф.) для функціонала (1.7)

$$K^{(j)} = \{u^{(j)} \in H^1(\Omega^{(j)}), \text{tr} u^{(j)} = (G_u^{(j)})^{-1} U_0^{(j)} \in \Gamma_u^{(j)} \times [-h^{(j)}; h^{(j)}]\}, \quad (1.11)$$

яка буде підпростором у випадку однорідних умов (1.2)

$$\ker V^{(j)} = \{u^{(j)} \in H^1(\Omega^{(j)}), \text{tr} u^{(j)} = 0 \in \Gamma_u^{(j)} \times [-h^{(j)}; h^{(j)}]\}. \quad (1.12)$$

Відомо, що розв'язок задачі мінімізації функціонала (1.7) на к.д.ф. виду (1.11) або (1.12) існує і єдиний [5]. Оскільки підпростір володіє властивістю лінійності, то для реалізації чисельних методів мінімізації, наприклад, на базі МСЕ, більш зручним є к.д.ф. виду (1.12). Розв'язок задачі з неоднорідними умовами (1.2) легко будується як сума деякого $u_0^{(j)} \in V^{(j)}$, що задовільняє (1.2) та розв'язку задачі мінімізації функціонала (1.7) на $\ker V^{(j)}$ з модифікованою лінійною частиною

$$(f^{*(j)}, u^{(j)}) = (f^{(j)}, u^{(j)} + u_0^{(j)}) - a^{(j)}(u^{(j)}, u_0^{(j)}). \quad (1.13)$$

Зауважимо, що для контактних задач важливе значення також мають граничні умови в переміщеннях на поверхнях контакту, для яких підпростір $\ker V^{(j)}$ вводиться аналогічно і справедлива теорема про існування і єдиність.

Нарешті, умови неідеального міжшарового контакту запишемо у вигляді

$$u_-^{(j+1)} - u_+^{(j)} = \Phi^{(j,j+1)}, \quad (1.14)$$

$$\sigma_+^{(j)} = -\sigma_-^{(j+1)} = \sigma^{(j,j+1)}, \quad (1.15)$$

$$\sigma^{(j,j+1)} \Phi^{(j,j+1)} \geq 0 \text{ на } S^{(j,j+1)}, \quad (1.16)$$

де $u_{\pm}^{(j)}$ – переміщення лицьових поверхонь шарів (в сенсі визначення сліду (1.10)), $\Phi^{(j,j+1)}$ – вектор стрибка переміщень при переході через контактну поверхню, $\sigma^{(j,j+1)}$ – вектор контактних напружень. Математична модель пошкодження міжшарового контакту, як правило, записується у вигляді обмежень (типу нерівностей) на допустимі значення для $\Phi^{(j,j+1)}$ і $\sigma^{(j,j+1)}$, що утворюють випуклу множину. Наприклад, нерівність (1.16) постулює дисипативний характер міжшарових пошкоджень. Стрибок $\Phi^{(j,j+1)} \neq 0$, в загальному, невідомий (визначається в процесі розв'язування) і характеризує зони неідеального контакту.

В силу зробленого вище зауваження, для пари шарів можна гарантувати існування та єдиність розв'язку як тільки площа міжшарового контакту $S^{(j,j+1)}$ має додатню міру і виключені переміщення як жорсткого цілого хоча б для одного з шарів [6]. Застосовуючи такий підхід рекурсивно, поширюємо результат на структуру в цілому при заданих головних граничних умовах на торцях тільки ок-

ремних шарів, або хоча б одного з них. При цьому умови на окремі компоненти вектора переміщень можуть бути задані на різних шарах.

2.Варіаційна постановка і принцип двоїстості. Для структури в цілому, яка складається з N шарів введемо простори $V = V^{(1)}(\Omega^{(1)}) \otimes \dots \otimes V^{(N)}(\Omega^{(N)})$ і $U = U(S^{(1,2)}) \otimes \dots \otimes U(S^{(N-1,N)})$, що є прямим добутком відповідних просторів для окремих шарів і контактних поверхонь, і об'єднані вектори $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(N)})^T \in V$, $\sigma = (\sigma^{(1,2)}, \dots, \sigma^{(N-1,N)})^T \in U$. Визначимо множину к.д.ф. (переміщень)

$$K = \left\{ u \in V \mid u^{(j)} \in K^{(j)}, \Phi^{(j,j+1)} = u_-^{(j+1)} - u_+^{(j)}, j = 1, \dots, N-1 \right\} \quad (2.1)$$

Очевидно, що K задає множину функцій зі скінченними розривами на контактних поверхнях (майже всюди). З теореми про кускове склеювання [2] випливає, що існує єдина узагальнена функція переміщень $u \in K$, звуження якої на кожному з шарів співпадає з $u^{(j)} \in K^{(j)}$. Зауважимо, що опис множини K носить формальний характер (в припущенні фіксованих стрибків переміщень), оскільки стрибки $\Phi^{(j,j+1)}$ наперед невідомі і визначаються разом з переміщеннями $u_{\pm}^{(j)}$ і контактними напруженнями $\sigma^{(j,j+1)}$ в залежності від моделі контакту (наприклад, проковзування або розшарування). У випадку ідеального контакту, $\Phi^{(j,j+1)} = 0$, отримуємо

$$K_0 = \left\{ u \in V \mid u_-^{(j+1)} = u_+^{(j)}, j = 1, \dots, N-1 \right\} \quad (2.2)$$

Відповідно до можливості описаної вище заміни $u^{(j)} \in K^{(j)}$ на $u^{(j)} \in \ker V^{(j)}$ з врахуванням модифікації (1.13), можна припускати, що у визначеннях (2.1) і (2.2) маємо $u^{(j)} \in \ker V^{(j)}$. Тоді важливо відмітити, що $\ker V = K_0$ – підпростір V , і тому він є більш “зручним” для застосування МСЕ, ніж K . Таким чином, показано базову роль задачі про ідеальний контакт.

Енергія N -шарової структури формально може бути записана як сума складових виду (1.7):

$$J(u) = \sum_{j=1}^N J(u^{(j)}) = \sum_{j=1}^N \left\{ a^{(j)}(u^{(j)}, u^{(j)}) - (f_{\Gamma}^{(j)}, u^{(j)}) \right\} - \sum_{j=1}^N \left\{ (\sigma_+^{(j)}, u_+^{(j)}) + (\sigma_-^{(j)}, u_-^{(j)}) \right\} \quad (2.3)$$

де $(\sigma_{\pm}^{(j)}, u_{\pm}^{(j)}) = \iint_{S_{\pm}^{(j)}} (\sigma_{\pm}^{(j)})^T u_{\pm}^{(j)} dS$ – скалярний добуток в просторі

$U(S_{\pm}^{(j)}) = (L_2(S_{\pm}^{(j)}))^3$. При виконанні умов міжшарового контакту (1.15) для дійсних переміщень $u \in K$ маємо

$$J(u) = \inf J(v), \forall v \in K, \quad (2.4)$$

$$J(u) = \sum_{j=1}^N \{a^{(j)}(u^{(j)}, u^{(j)}) - (f_{\Gamma}^{(j)}, u^{(j)})\} - \sum_{j=1}^{N-1} (\sigma^{(j,j+1)}, u_+^{(j+1)} - u_-^{(j)}). \quad (2.5)$$

Другу суму в (2.5) можемо опустити, оскільки вона не впливає на мінімум функціонала $J(u)$ для $u \in K$ ($\Phi^{(j,j+1)}$ – вважаються фіксовані, а $\sigma^{(j,j+1)}$ функціонально незалежні від $u^{(j)}$). З іншого боку, $J(u)$ – квадратичний випуклий функціонал відносно переміщень $u^{(j)}$, і задача мінімізації (2.4) еквівалентна системі варіаційних нерівностей (в загальному, переміщення шару обмежені переміщеннями іншого шару, інакше матимемо рівність) [5, 6, 11]

$$a^{(j)}(v^{(j)}, v^{(j)} - u^{(j)}) \geq (f_{\Gamma}^{(j)}, v^{(j)} - u^{(j)}) \forall v^{(j)} \in \ker V^{(j)}, j = 1, \dots, N, \quad (2.6)$$

що по вигляду співпадає із задачею про ідеальний контакт. Трудність задачі (2.4) або (2.6) полягає в задоволенні додаткових обмежень на переміщення u , що накладають умови неідеального міжшарового контакту, тобто належності до множини K , $u \in K$.

Використовуючи техніку множників Лагранжа, введемо функціонал

$$J^L(\sigma, u) = \sum_{j=1}^N \left\{ a^{(j)}(u^{(j)}, u^{(j)}) - \int_{-h^{(j)}}^{+h^{(j)}} dz^{(j)} \int_{\Gamma_0^{(j)}} N_0^{(j)} u^{(j)} d\Gamma_{\sigma}^{(j)} \right\} - \sum_{j=1}^{N-1} (\sigma^{(j,j+1)}, u_+^{(j+1)} - u_-^{(j)} + \Phi^{(j,j+1)}) (u, \sigma) \in V \times U \quad (2.7)$$

Більш точно, функціонал (2.7) розглядаємо на підпросторі $\ker V = K_0$, тобто при фіксованих $\Phi^{(j,j+1)}$ можна вважати, що шукані переміщення $u \in \ker V$ задовільняють умовам ідеального контакту, а вплив пошкоджень враховує додатковий вклад в лінійну частину функціонала виду як у другій сумі в (2.5).

При фіксованих σ переміщення $u \in K_0 \subset V$, такі, що звуження u на області окремого шару відповідають дійсним переміщенням – розв'язку задачі (2.4) (але задовільняють інші умови контакту), є також розв'язком задачі

$$\inf J^L(v, \sigma) = J^L(u, \sigma) = J(u), \forall v \in K_0 \quad (2.8)$$

Тому задачі (2.4) і (2.8) еквівалентні в тому сенсі, що дають один і той же розв'язок для переміщень окремих шарів. Порівнюючи (2.7) і (2.3),

легко бачити, що формально введені при побудові J^L множники Лагранжа для умов контакту справді мають фізичний зміст контактних напружень згідно побудови функціонала J . Перевага J^L над J зв'язана з підпростором K_0 .

Теорема (двоїстості). Розв'язок (2.8)–дійсні переміщення u і контактні напруження σ – є сідловою точкою функціонала (2.7):

$$J^L(u, s) \leq J^L(u, \sigma) \leq J^L(v, \sigma) \forall v \in K_0 \subset V, \forall s \in U, \quad (2.9)$$

і навпаки, якщо сідлова точка J^L досягається на $(u, \sigma) \in K_0 \otimes U$,

$$\sup_{s \in U} \inf_{v \in K_0} J^L(v, s) = \inf_{v \in K_0} \sup_{s \in U} J^L(v, s) = J(u, \sigma) \quad (2.10)$$

то (u, σ) відповідають дійсному НДС окремих шарів структури

Схема доведення аналогічна як для функціонала з обмеженнями [5]. Для спрощення записів розглянемо характерну 2-шарову структуру. На основі (2.8) при довільних фіксованих σ випливає права з нерівностей (2.9). Оскільки $\sup(-s, \Phi^{(1,2)})_U = 0$ при $u \in K_0$, $\Phi^{(1,2)} = 0$, яким відповідають дійсні напруження $s = \sigma^{(1,2)}$ або $s = 0, \Phi^{(1,2)} \neq 0$ (розшарування, контакту немає), то задача (2.8) еквівалентна

$$\inf_{v \in K_0} \sup_{s \in U} J^L(v, s) = J^L(u, \sigma),$$

Враховуючи $\supinf \leq \infsup$, звідси отримуємо

$$\sup_{s \in U} \inf_{v \in K_0} J^L(v, s) \leq J^L(u, \sigma), \quad (2.11)$$

тобто виконується ліва з нерівностей (2.9), а отже, й умови сідлової точки для (σ, u) . Лишилося показати, що в (2.11) насправді має місце рівність. Оскільки $\inf_{x \in X} J(x) \leq J(x_0), x_0 \in X$, то

$$\inf_{v \in K_0} J^L(v, s) = J^{*L}(s) \leq \inf_{v \in K_0} J^L(v, \sigma) = J^L(u, \sigma),$$

тобто

$$\sup J^{*L}(s) \leq J^L(u, \sigma), s \in U \quad (2.12)$$

З іншого боку, обчислимо спочатку внутрішній $\inf$. Запишемо:

$$J^L(v, s) = J_1^L(v) + J_2^L(s, v),$$

$$\text{де} \quad J_1^L(v) = \sum_{j=1}^2 \{a^{(j)}(v^{(j)}, v^{(j)}) - 2(f_\Gamma^{(j)}, v^{(j)})\} - (\sigma_-^{(1)}, v_-^{(1)})_U - (\sigma_+^{(2)}, v_+^{(2)})_U,$$

$$J_2^L(s, v) = -(s, v_+^{(1)} - v_-^{(2)} + \Phi^{(1,2)})_U. \text{ Для першого функціонала}$$

$$\inf_{v \in K_0} J_1^L(v) = J_1^L(u) - (\sigma, u_+^{(1)} - u_-^{(2)}) = J_1^L(u)$$

при ідеальному контакті $u \in K_0$. Тоді $J_2^L(s, v) = -(s, \Phi^{(1,2)})$ у випадку $v = u \in K_0$, і видно, що $\inf_{s \in U} J_2^L(s, v) = -\infty$. Але в сумі отримуємо

$$\begin{aligned} \inf_{v \in K_0} J_1^L(v) + \inf_{s \in U} J_2^L(s, v) &= J_1^L(u) - (\sigma, u_+^{(1)} - u_-^{(2)}) - (s, \Phi) = \\ &= \begin{cases} J_1^L(u) - (\sigma, u_+^{(1)} - u_-^{(2)} + \Phi) = J^L(\sigma, u), s = \sigma, \\ -\infty, s \neq \sigma. \end{cases} \end{aligned}$$

Тому $\sup_{s \in U} \inf_{v \in K_0} J^L(s, v) \geq J^L(u, \sigma)$, що разом з (2.12) завершує доведення теореми.

3. Особливості $\{m, n\}$ -апроксимації для тонких шарів. Розкладаючи всі параметри НДС в ряди по поліномах Лежандра від координати, зв'язаної з товщиною, отримують двовірні співвідношення уточненої теорії шару (в порівнянні із застосуванням класичної теорії оболонок). Перевага $\{m, n\}$ -апроксимації [9] – в можливості точного задоволення умов у напруженнях на лицьових поверхнях $z^{(j)} / h^{(j)} = \pm 1$, що важливо для контактних задач. Вибір конкретних m і n визначається ефектами деформування, характерними для шару, наприклад, $m=1$ дозволяє враховувати зсуви, а $n=0, 1, 2$ – відповідно не враховувати чи враховувати деформації стиснення. Таким чином, $\{1, 0\}$ -апроксимація узагальнює теорію оболонок, що базуються на зсувній моделі С.П.Тимошенка, а $\{1, 2\}$ -апроксимація – додатково забезпечує квадратичний закон розподілу прогинів і кубічний розподіл напружень σ_{zz} по товщині шару.

Постановка крайової задачі містить систему диференціальних рівнянь (2-го порядку кожне) рівноваги шарів “в переміщеннях”

$$L_u^{(j)} u^{(j)} - \tilde{D}_-^{(j)} \sigma_-^{(j)} + \tilde{D}_+^{(j)} \sigma_+^{(j)} = 0 \text{ на } S^{(j)} \quad (3.1)$$

з відповідними аналогами граничних умов (1.2)-(1.3) та умов контакту (1.14)-(1.15) або навантажень на зовнішніх лицьових поверхнях шарів.

Переміщення на поверхнях $S_{\pm}^{(j)}$ матимуть вид [11]

$$u_{\pm}^{(j)} = B_{\pm}^{(j)} u^{(j)} + C_1^{\pm(j)} \sigma^{(j-1, j)} + C_2^{\pm(j)} \sigma^{(j, j+1)}. \quad (3.2)$$

де $B_{\pm}^{(j)}$ – диференціальні оператори не вище першого порядку, $C_{1,2}^{\pm(j)}$ – діагональні матриці констант, що залежать від модулів пружності і товщини шару. Приймаючи (3.2) за визначення сліду переміщень

$u^{(j)} \in (W_2^1(S^{(j)}))^{k_{(m,n)}}$ на лицьових поверхнях (більш точно, тут і далі $u^{(j)}$ – це $k_{(m,n)}$ компонентів розкладу в ряди по поліномах Лежандра), аналогічно (1.10) можна стверджувати, що $u_{\pm}^{(j)} \in (L_2(S_{\pm}^{(j)}))^3$. В рамках $\{m,n\}$ -апроксимації функціонал (2.7) набуде виду [11]

$$\begin{aligned} J_{(m,n)}^L = & \sum_{j=1}^N (A_j u^{(j)}, u^{(j)})_I - \sum_{j=1}^N (u^{(j)}, \tilde{D}_+^{(j)} \sigma^{(j,j+1)})_I + \sum_{j=1}^N (u^{(j+1)}, \tilde{D}_-^{(j+1)} \sigma^{(j,j+1)})_I + \\ & + \sum_{j=1}^N (\sigma^{(j,j+1)}, B_-^{(j+1)} u^{(j+1)})_{II} - \sum_{j=1}^N (\sigma^{(j,j+1)}, B_+^{(j)} u^{(j)})_{II} - \\ & - \sum_{j=2}^{N-1} (\sigma^{(j,j+1)}, C_-^{(j,j+1)} \sigma^{(j-1,j)})_{II} - \sum_{j=1}^{N-1} (\sigma^{(j,j+1)}, C_+^{(j,j+1)} \sigma^{(j,j+1)})_{II} \\ & - \sum_{j=2}^{N-1} (\sigma^{(j-1,j+1)}, C_+^{(j,j+1)} \sigma^{(j,j+1)})_{II} - l(u) \end{aligned} \quad (3.3)$$

де $(\cdot, \cdot)$ – визначає інтегрування по поверхні, нижній індекс “I” відноситься до відповідної серединної поверхні шару, а індекс “II” – до контактної поверхні; $l(u)$ – лінійна частина, що враховує навантаження на торцях. У випадку тонких шарів різницею між інтегруванням типу I і II по сусідніх поверхнях можна знехтувати. Враховуючи це, для $\{m,n\}$ -апроксимації оператори типу D і B , а також C симетричні:

$$\begin{aligned} [\tilde{D}_-^{(j+1)}]^T &= B_-^{(j+1)}, [\tilde{D}_+^{(j)}]^T = B_+^{(j)}, j = 1, \dots, N, \\ (C_1^{+(j)} = C_-^{(j,j+1)}) &= (C_2^{-(j+1)} = C_+^{(j-1,j)}), j = 1, \dots, N-1, \\ „_{2}^{(j,j+1)} &= „_{2}^{+(j)} - „_{1}^{-(j+1)}, j = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (3.4)$$

де $C^{(j,j+1)}$ – симетрична (і навіть діагональна) матриця з усіма додатніми коефіцієнтами на діагоналі, що є особливістю моделей шару в рамках $\{m,n\}$ -апроксимації [11]. Для конкретних $\{m,n\}$ -апроксимацій властивість додатньої визначеності квадратичної форми енергії деформації шару $a^{(j)}(u^{(j)}, u^{(j)}) = (A_j u^{(j)}, u^{(j)})$ можна довести як і в уточнених теоріях оболонок і пластин [1,7,8]. В припущенні, що умови (1.9) виконані і слід визначений згідно (3.2) для шаруватої структури в рамках $\{m,n\}$ -апроксимації справедливий результат, аналогічний як в пп. 1-2 (існування та єдиність розв'язку, теорема двоїстості). В цьому сенсі можна говорити про еквівалентність просторової задачі та її $\{m,n\}$ -апроксимації, а остання в обчислювальному аспекті має і ту перевагу, що матриці типу C ненульові.

В блочному вигляді функціонал (3.3) можна представити як

$$J_{(m,n)}^L(u, \sigma) = \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & \tilde{D} \\ \tilde{D}^T & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} f_A \\ f_C \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

що дозволяє записати систему варіаційних нерівностей:

$$\begin{aligned} a(u, v - u) + (\tilde{D}\sigma, v - u) &\geq (f_A, v - u) \quad \forall v \in K_0, \\ (\tilde{D}^T u, \sigma - s) - (C\sigma, \sigma - s) &\geq (f_C, \sigma - s) \quad \forall s \in \Lambda \subset U, \end{aligned} \quad (3.6)$$

Відмітимо симетричність даної постановки, яка виявляється в тому, що кожен з функціоналів $J_{(m,n)}^L(u) = J_{(m,n)}^L(u, \sigma_{fix})$ і $J_{(m,n)}^L(\sigma) = -J_{(m,n)}^L(u_{fix}, \sigma)$ є квадратичним і випуклим. Випукла множина Λ визначає нелінійний характер міжшарової взаємодії, наприклад, для зон пластичного проковзування

$$\Lambda = \{\sigma | F(\sigma) \leq 0\} \quad (3.7)$$

де $F(\sigma) = 0$ – випукла функція текучості. Загальну теорію чисельного дослідження задачі на екстремум функціонала (3.5) можна знайти в [3].

4. Приклад розрахунку. При дискретному розгляді шарів в рамках $\{m, n\}$ -апроксимації дослідимо згин навантаженням $\sigma_{zz}^+ = \text{const}$ шарнірно-опертої тришарової пластини ($l = 10$ см – довжина і $2h = 2$ см – сумарна товщина) в умовах плоскої деформації з врахуванням прикрайових зон пластичного проковзування на міжшарових поверхнях (рис.1). Матеріал шарів для простоти вважався ізотропним з модулем Юнга $E = 10^4$ МПа і коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,3$.

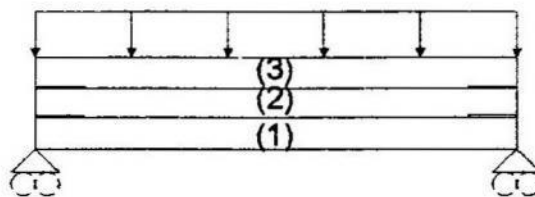


Рис. 1. Схема навантаження тришарової пластини.

Чисельні результати (рис.2) отримані для ідентичних шарів при $h^{(j)} = h/N, h/l = 0,1$ і параметра навантаження $\sigma_{zz}^+/E = -0,01$. Зауважимо, що в даній задачі дотичні контактні напруження між першим і другим, а також між другим і третім шаром практично співпадають, як і для ідеального контакту. Внаслідок “зрізання” недопустимих дотичних напружень зона пластичності “зростає” майже вдвічі. При цьому нормальні міжшарові напруження в зоні пластичного проковзування між

другим і третім шаром зазнають розгрузки, але незначно зростають перед границею зони. Навпаки, для контактної поверхні між першим і другим шаром нормальні напруження зростають в пластичній зоні, з розгрузкою перед зоною. Розподіл стрибків дотичних переміщень в зоні пластичності—лінійний, крім невеликих прикорайових зон, на яких можуть зароджуватися розшарування, якщо досягнуто максимуму пластичних деформацій, які характеризуються стрибком дотичних переміщень.

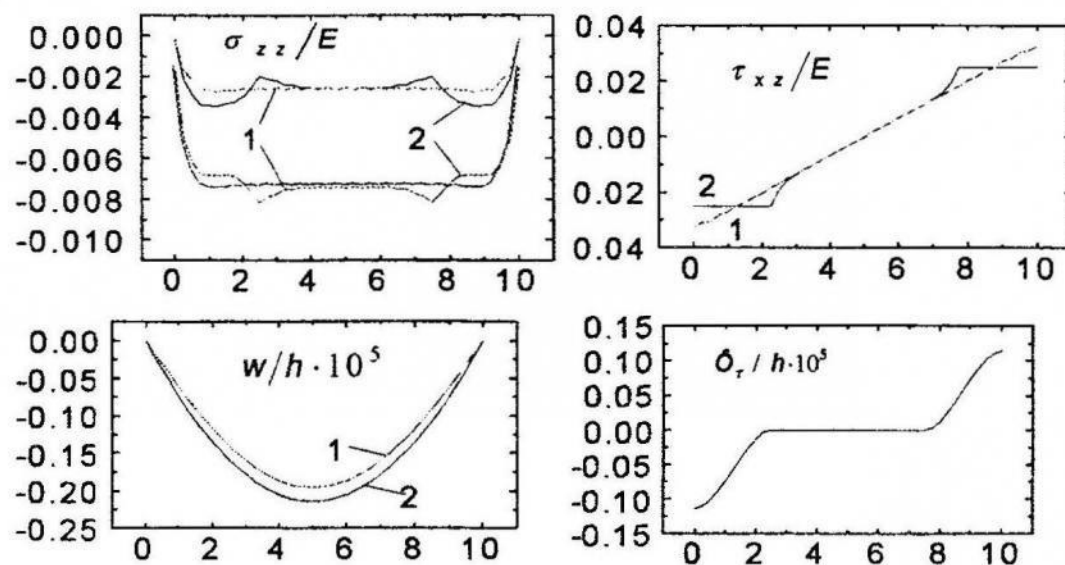


Рис. 2. Нормальні і дотичні міжшарові напруження (вверху), прогини і стрибки переміщень (внизу), 1-ідеальний контакт, 2-із зонами пластичного проковзування.

Література.

1. Вагін В.С., Іванова Н.В., Шинкаренко Г.А. Аналіз зсувних оболонок: постановка і коректність варіаційних задач динаміки//Математичні Студії.—1998.—10, №2.—С. 188–198.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1988. —512 с.
3. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств.— М.: Мир, 1979.—574 с.
4. Гузь А.Н., Коханенко Ю.В. Краевые эффекты в композитах//Прикл. механика.—1995.—31, №3.—С. 3–23.
5. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике.— М.: Наука, 1980.—384 с.
6. Кравчук А.С. Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // Прикл. математика и механика.—1978.—42, №3.—С. 466–473.
7. Литвинов В.Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике.—М.: Наука, 1987.—368 с.
8. Марчук М. В. Решение задач уточненной теории слоистых анизотропных пластин методом конечных элементов. Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук:01.02.04/Ин-т прикл. проблем механики и математики АН

физ.-мат. наук:01.02.04/Ин-т прикл. проблем механики и математики АН Украины.—Львов, 1984.—19 с. 9. Пелех Б.Л., Лазько В.А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений.—Киев: Наук. думка, 1982.—296 с. 10. Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями.—Киев: Наук. думка, 1988.—280 с. 11. Пелех Б.Л., Хомяк Н.Н. Контактная проблема для слоистых композитов при нелинейных межфазных взаимодействиях // Механика композит. материалов.—1993.—№1.—С.105—111. 12. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач.—М.: Мир, 1980.—512 с.

Marchuk M.V., Khomyak M.M.

The variational approach in the nonideal interlayered contact problem

The variational statement of the nonideal contact problem between thin elastic layers are proposed. A dual nature of the sandwich-type structure energy functional with constraints on the interphases is studied. Using layer models within the framework $\{m,n\}$ -approximation a symmetric system of variational inequations is obtained. An example of calculation is presented and analyzed.

Стаття надійшла до редколегії 30.11.1998

УДК 519.6

Ю.П.Оліярник

Приклад функції наповнення для побудови тунельних алгоритмів глобальної мінімізації

1. Постановка задачі. Основні означення.

Розглянемо задачу глобальної оптимізації

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X \subset R^n, \quad (1)$$

де $f(x) \in C^2(X)$, X — компактна множина; R^n — евклідовий простір.

Нехай $x^* \in X$ — деяка ізольована точка локального мінімуму задачі (1). Розглянемо множини :

$$\begin{aligned} A(f; x^*) &= \{x \in X : f(x) \geq f(x^*)\} \setminus \{x^*\}; \quad B(f; x^*) = \{x \in X : f(x) < f(x^*)\} \\ B_\varepsilon(f; x^*) &= \{x \in X : f(x) \leq f(x^*) - \varepsilon\}; \quad H(y) = \{h \in R^n | y + \alpha h \in X, \alpha > 0\}, \end{aligned}$$

де $\varepsilon > 0$ – точність розв'язку задачі (1) по значенню функції мети, $y \in X$.

Назвемо точку $y \in \text{int } X$ квазістаціонарною [1] для функції $f(x)$, якщо $f'(y; x^* - y) \cdot f'(y; y - x^*) \geq 0$. (2)

Позначимо $Y(f) = \overline{X}(f) \setminus \{x^*\}$, де $\overline{X}(f)$ – множина квазістаціонарних точок функції $f(x)$ на множині X . Функцію $F(x)$ будемо називати функцією наповнення для $f(x)$ в точці x^* на множині X , якщо [1]:

$$1) F(x) \text{ неперервна на } X \setminus B_\varepsilon(f; x^*); \quad (3)$$

$$2) Y(F) \subset B(f; x^*); \quad (4)$$

$$3) Y(F) \neq \emptyset \text{ при } B_\varepsilon(f; x^*) \neq \emptyset; \quad (5)$$

$$4) x^* \text{ – екстремальна точка для функції } F(x) \text{ на множині } X. \quad (6)$$

2. Приклад функції наповнення. Розглянемо функцію

$$R(x, x^*, \alpha) = 1/\alpha \cdot (1/(1 + \|x - x^*\|^2)) - \alpha \cdot \exp((f(x^*) - f(x) - \varepsilon)/\alpha), \quad (7)$$

де $\alpha > 0$ – деякий параметр.

Теорема. Якщо x^* – внутрішня точка множини X , то існує $\alpha_0 > 0$ таке, що функція (7) є функцією наповнення для цільової функції $f(x)$ задачі (1) для довільного α з інтервалу $(0; \alpha_0)$.

Доведення. В рамках умови теореми перевіримо виконання умов (3) – (6).

Виконання умови (3) очевидне, оскільки функція (7) є композицією $f(x)$ і ще декількох функцій з класу C^∞ . Легко бачити, що для $x \in \partial B_\varepsilon(f, x^*)$ $R(x, x^*, \alpha) \rightarrow +\infty$ при $\alpha \rightarrow +0$. Для $x \in \text{int } B_\varepsilon(f, x^*)$ $R(x, x^*, \alpha) \rightarrow -\infty$ при $\alpha \rightarrow +0$. Отже, існує стала $\alpha_1 > 0$ така, що функція $R(x, x^*, \alpha)$ для довільного $\alpha \in (0, \alpha_1)$ має екстремальні точки на множині $B_\varepsilon(f; x^*)$, що доводить (5). Для доведення (6) розглянемо наступні розклади:

$$1 - e^t = -t - t^2/2 - o(t^2), \quad t \in R,$$

$$f(y) - f(y + \Delta) = -\langle f'(y); \Delta \rangle - \frac{\langle f''(y)\Delta; \Delta \rangle}{2} + o(\|\Delta\|^2),$$

$$1 - \exp\left(\frac{f(y) - f(y + \Delta)}{\alpha}\right) = \frac{\langle f'(y); \Delta \rangle}{\alpha} + \frac{\langle f''(y)\Delta; \Delta \rangle}{2\alpha} - \frac{\langle f'(y); \Delta \rangle^2}{2\alpha} + o(\|\Delta\|^2),$$

де

$$y \in X, \quad y + \Delta \in H(y), \quad o(\|\Delta\|^2)/\|\Delta\|^2 \rightarrow 0, \quad \|\Delta\|^2 \rightarrow 0 \quad (8)$$

Оскільки $f'(x^*) = 0$, з (8) випливає

$$R(x^* + \Delta, x^*, \alpha) - R(x^*, x^*, \alpha) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\|\Delta\|^2}{1 + \|\Delta\|^2} + \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \langle f''(x^*) \Delta; \Delta \rangle + o(\|\Delta\|^2)$$

$$R(x^* + \Delta, x^*, \alpha) - R(x^*, x^*, \alpha) \leq \|\Delta\|^2 \cdot \left(\frac{M_2}{2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 + D^2} \right) + o(\|\Delta\|^2), \quad (9)$$

де $M_2 = \max_{j=1, \dots, n} |\partial f_i(x^*) / \partial x_j|$, $i = 1, \dots, n$, $D = \max_{x, y \in X} \|x - y\|$. З (9) випливає

існування сталої $\alpha_2 > 0$ такої, що нерівність $R(x^* + \Delta, x^*, \alpha) - R(x^*, x^*, \alpha) \leq 0$ виконується для довільного достатньо малого $\|\Delta\|$ і довільного $\alpha \in (0; \alpha_2)$, тобто x^* – точка максимуму для $R(x, x^*, \alpha)$. Доведемо(4). Нехай $x \in A(f, x^*)$. Необхідно довести, що:

$$\mathcal{R}(x, x^*, \alpha) / \partial(x - x^*) \cdot \mathcal{R}(x, x^*, \alpha) / \partial(x^* - x) < 0, \quad \forall \alpha \in (0; \alpha_3), \quad (10)$$

де $\alpha_3 > 0$ – деяка стала, існування якої треба довести.

Розглянемо функцію $R(x, x^*, \alpha)$ як суму двох функцій:

$$R_1(x, x^*, \alpha) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \|x - x^*\|^2}, \quad R_2(x, x^*, \alpha) = -\alpha \cdot \exp\left(\frac{f(x^*) - f(x) - \varepsilon}{\alpha}\right)$$

Функція $R_1(x, x^*, \alpha)$ очевидно задовольняє умову аналогічну (10), а саме $\mathcal{R}_1(x, x^*, \alpha) / \partial(x - x^*) \cdot \mathcal{R}_1(x, x^*, \alpha) / \partial(x^* - x) < 0, \quad \forall \alpha \in (0; \alpha_3)$. Покажемо, що знак похідної по напрямку $x - x^*$ функції $R(x, x^*, \alpha)$ на множині $A(f; x^*)$ визначається знаком функції $R_1(x, x^*, \alpha)$. Для $p = x - x^*$ одержимо :

$$\frac{\mathcal{R}_1(x, x^*, \alpha)}{\partial p} = -\frac{1}{\alpha} \frac{2 \cdot \|x - x^*\|^2}{(1 + \|x - x^*\|^2)^2}, \quad \frac{\mathcal{R}_2(x, x^*, \alpha)}{\partial p} = \exp\left(\frac{f(x^*) - f(x) - \varepsilon}{\alpha}\right) \frac{\partial f(x)}{\partial p}$$

Оскільки x^* – ізольована точка максимуму для $R(x, x^*, \alpha)$, знайдеться $\delta > 0$ таке, що (10) виконується для довільних $\alpha > 0$ та x околу

$O(x^*, \delta)$. Для довільних $x \in A(f; x^*) \setminus O(x^*; \delta)$, $\alpha > 0$ має місце нерівність:

$$|\mathcal{R}_1(x, x^*, \alpha) / \partial p| \geq 2 / \alpha \cdot \delta^2 / (1 + D^2)^2 \quad (11)$$

Аналогічно для $x \in A(f; x^*)$, $\alpha > 0$ виконується:

$$|\mathcal{R}_2(x, x^*, \alpha) / \partial p| \leq L \cdot \exp(-\varepsilon / \alpha), \text{ де } L = \max_{y \in X, p \in H(y)} |\partial f(y) / \partial p| \quad (12)$$

Очевидно, що знайдеться стала $\alpha_3 > 0$ така, що:

$$L \cdot \exp(-\varepsilon / \alpha_3) \leq 2 / \alpha_3 \cdot \delta^2 / (1 + D^2)^2 \quad (13)$$

З (11), (12), (13) випливає:

$$|\mathcal{R}_1(x, x^*, \alpha) / \partial p| \geq 2 / \alpha \cdot \delta^2 / (1 + D^2)^2 \geq L \exp(-\varepsilon / \alpha) \geq |\mathcal{R}_2(x, x^*, \alpha) / \partial p|, \quad (14)$$

для довільних $x \in A(f; x^*)$, $\alpha \in (0, \alpha_3)$ що згідно (2) доводить (4). Покладемо $\alpha_0 = \min \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

3. Деякі аспекти застосування функції наповнення (7).

Функція наповнення (7) належить до того ж класу гладкості, що і функція $f(x)$. Це дозволяє використовувати різноманітні алгоритми локальної оптимізації на тунельній фазі без додаткових модифікацій, пов'язаних із розривністю функції наповнення [1,2].

Література.

1. Голуб Б.М. Функції наповнення у глобальній оптимізації // Вісн. Львів. ун-ту. Сер.мех.-мат.-1996 – Вип.44. С.76-81.
2. Ge R.P. The theory of filled function method for finding global minimizers of nonlinear constrained minimization problems // J.of Computational Mathematics.-1987.-V.5. N1.-P.1-9.

Y. P. Oliyarnik

The filled function example for the filled function global minimization algorithms construction

This article deals with the global optimization problem. A new filled function for the filled function global optimization algorithms is described. This function has several theoretical and practical advantages in comparasion with known filled functions.

Стаття надійшла до редколегії 24.09.1998

І.П. Твердохліб, Г.Г. Цегелик

Метод визначення стабілізаційної функції споживання для регіональної ринкової системи з неоднорідною соціальною структурою населення

В [1] запропоновано метод отримання функції споживання для довільної ринкової системи, яка зберігає постійний рівень попиту. В цьому сенсі така функція має стабілізаційні властивості і оцінює реакції споживачів при зміні вектора цін. Умови для знаходження такої стабілізаційної функції попиту у формі матриці інцидентій задані базовою моделлю пріоритетного споживання з усередненими пріоритетами [2], що використовує відому AIDS-модель або так звану "майже ідеальну модель споживання" [3]. Але у [2] не враховано поділу споживачів на соціальні групи.

Нехай $G(E, K, S)$ – регіональна ринкова соціально-економічна система, де E – економіка регіону, K – споживачі, а S – система управління. У формалізованому вигляді система $G(E, K, S)$ може бути представлена так:

$$G = M \left(E(n, \bar{p}, P), K \left(N, \bar{v}, \bigcup_{i=1}^N K_i(\bar{w}_i, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, x_i) \right), S(n, \bar{b}) \right), \quad (1)$$

де соціальна структура населення регіону задається таким поділом споживачів на соціальні групи

$$K = \bigcup_{i=1}^N K_i(\bar{w}_i, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, x_i), \quad K_i \cap K_j = \emptyset \quad (i, j = \overline{1, N}) \quad (2)$$

N – кількість соціальних груп споживачів у регіоні; $\bar{b} \in E^n$ – директивний вектор зміни цін; $\bar{v} \in R^N$ – вектор соціальної структури населення регіону; $E(n, \bar{p}, P)$, $K_i(\bar{w}_i, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, x_i)$ – характеристики в контексті [2,3] відповідно економіки та i -ої соціальної групи населення регіону.

Проблема визначення стабілізаційної функції споживання довільної ринкової системи зводиться до такої оптимізаційної задачі: для регіональної ринкової соціально-економічної системи $G(E, K, S)$ виду (1)-(2) знайти такі симетричні матриці інцидентій $X_i: E^n \rightarrow E^n$

функцій споживання для i -ої соціальної групи ($i = \overline{1, N}$), щоб

$$\min_{\{\bar{\alpha}_i; \eta\}} \left[\sum_{i=1}^N v_i (Sp X_i + \langle \bar{b}, X_i \bar{b} \rangle) \right] \rightarrow ? \quad (3)$$

при умовах

$$\bar{w}_i = \bar{\alpha}_i + X_i \bar{a} + \bar{\beta}_i c_i \quad (i = \overline{1, N}) \quad (4)$$

та обмеженнях

$$\begin{cases} \langle \bar{\alpha}_i, \bar{a} \rangle + 0.5 \langle \bar{a}, X_i \bar{a} \rangle = k_i, & \bar{e} = (1, 1, \dots, 1)^T \in E^n; \\ X_i \bar{e} = 0, & \langle \bar{\alpha}_i, \bar{e} \rangle = 1, & \langle \bar{\beta}_i, \bar{e} \rangle = 0 \quad (i = \overline{1, N}), \end{cases} \quad (5)$$

де $\bar{b} \in E^n$, $\bar{\beta}_i \in E^n$, $\bar{w}_i \in E^n$ – апріорі задані; $c_i, k_i \in R^1$ – константи; $E^n := (R^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – евклідовий простір; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – звичайний скалярний добуток в евклідовому просторі; $Sp X_i$ – слід матриці X_i ; η – невідомі параметри. Згідно [3] вектор $\bar{a}$ і константи c_i, k_i рівні

$$\bar{a} = \log \bar{p}, \quad c_i = \log \{x_i / P\}, \quad k_i = \log P - \alpha_0 \quad (i = \overline{1, N}). \quad (6)$$

Застосувавши до задачі (3)-(6)-(1)-(2) методику аналізу [2], можна показати, що розв'язок її існує для $n \geq 4$. На основі проведеного аналізу моделі (3)-(6)-(1)-(2) пропонується такий метод отримання стабілізаційних функцій споживання для всіх соціальних груп населення регіону, який узагальнює метод [1].

На першому етапі знаходимо ортонормовану базу векторів $\bar{e}_{ij}$ підпростору E_i^{n-1} ($i = \overline{1, N}; j = \overline{1, n-1}$), що ортогональний до вектора $\bar{e} \in E_i^{n-1}$. Формування бази підпростору E_i^{n-1} для фіксованого $i = \overline{1, N}$ здійснюємо послідовно в два кроки.

Спочатку визначаємо систему ортогональних векторів $\bar{\varphi}_{ij} \in E_i^{n-1}$ із умов

$$\langle \bar{\varphi}_{ij}, \bar{\varphi}_{ik} \rangle = 0 \quad (j, k = \overline{1, n-1}; j \neq k), \quad \langle \bar{\varphi}_{ij}, \bar{e} \rangle = 0 \quad (j = \overline{1, n-1}). \quad (7)$$

Враховуючи довільність системи векторів $\bar{e}_{ij}$ для $i = \overline{1, N}$, будемо її ітераційно за схемою:

1) визначаємо $\bar{\varphi}_{i,n-1}$ за формулою

$$\bar{\varphi}_{i,n-1} = \left(\bar{a} - \frac{\langle \bar{a}, \bar{e} \rangle}{n} \bar{e} \right) / \sqrt{\|\bar{a}\|^2 - \frac{\langle \bar{a}, \bar{e} \rangle^2}{n}}, \quad (8)$$

де $\|\cdot\|$ – норма вектора у евклідовому просторі;

2) знаходимо $\bar{\varphi}_{i1}$ із системи умов $\langle \bar{\varphi}_{i1}, \bar{e} \rangle = 0$, $\langle \bar{\varphi}_{i1}, \bar{\varphi}_{i,n-1} \rangle = 0$, одним із можливих розв'язків якої є вектор

$$\bar{\varphi}_{i1} = \left(\frac{\varphi_{i,n-1}^3 - \varphi_{i,n-1}^2}{\varphi_{i,n-1}^2 - \varphi_{i,n-1}^1}, -\frac{\varphi_{i,n-1}^3 - \varphi_{i,n-1}^1}{\varphi_{i,n-1}^2 - \varphi_{i,n-1}^1}; 1; 0; \dots; 0 \right) \in E^n, \quad (9)$$

де φ_{ij}^k – k -та координата вектора $\bar{\varphi}_{ij}$;

3) в загальному випадку для $2 \leq j \leq n-2$ визначаємо $\bar{\varphi}_{ij}$ із системи рівнянь

$$\langle \bar{\varphi}_{ij}, \bar{e} \rangle = 0, \langle \bar{\varphi}_{ij}, \bar{\varphi}_{i1} \rangle = 0, \dots, \langle \bar{\varphi}_{ij}, \bar{\varphi}_{i,j-1} \rangle = 0, \langle \bar{\varphi}_{ij}, \bar{\varphi}_{i,n-1} \rangle = 0, \quad (10)$$

де вектори $\bar{\varphi}_{i1}, \dots, \bar{\varphi}_{i,j-1}$ та $\bar{\varphi}_{i,n-1}$ вже відомі. Взявши $\varphi_{ij}^{j+2} = 1, \varphi_{ij}^{j+3} = \dots = \varphi_{ij}^n = 0$, із (10) отримуємо систему $(j+1)$ лінійних рівнянь з $(j+1)$ невідомими першими координатами вектора $\bar{\varphi}_{ij}$. Застосувавши формули Крамера при $\Delta_{ij} \neq 0$, знаходимо такий вектор $\bar{\varphi}_{ij}$, що задовільняє (10):

$$\bar{\varphi}_{ij} = \left(\frac{\Delta_{ij}^{(1)}}{\Delta_{ij}}, \frac{\Delta_{ij}^{(2)}}{\Delta_{ij}}, \dots, \frac{\Delta_{ij}^{(j+1)}}{\Delta_{ij}}; 1; 0; \dots; 0 \right) \in E^n, \quad (11)$$

де

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \varphi_{i1}^1 & \varphi_{i1}^2 & \dots & \varphi_{i1}^j & \varphi_{i1}^{j+1} \\ \varphi_{i2}^1 & \varphi_{i2}^2 & \dots & \varphi_{i2}^j & \varphi_{i2}^{j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{i,j-1}^1 & \varphi_{i,j-1}^2 & \dots & \varphi_{i,j-1}^j & \varphi_{i,j-1}^{j+1} \\ \varphi_{i,n-1}^1 & \varphi_{i,n-1}^2 & \dots & \varphi_{i,n-1}^j & \varphi_{i,n-1}^{j+1} \end{vmatrix}, \quad (12)$$

а $\Delta_{ij}^{(k)}$ ($k = \overline{1, j+1}$) утворюється із Δ_{ij} заміною k -го стовбця на стовпець $(-1; -\varphi_{i1}^{j+2}; -\varphi_{i2}^{j+2}; \dots; -\varphi_{i,j-1}^{j+2}; -\varphi_{i,n-1}^{j+2})$. (13)

Знайдену ортогональну систему векторів $\bar{\varphi}_{ij}$ ($j = \overline{1, n-1}$) для $i = \overline{1, N}$ нормуємо і отримуємо необхідну нам ортонормовану базу $\bar{e}_{ij}$ простору E_i^{n-1} :

$$\bar{e}_{ij} = \bar{\varphi}_{ij} / \|\bar{\varphi}_{ij}\| \quad (j = \overline{1, n-2}), \quad \bar{e}_{i,n-1} = \bar{\varphi}_{i,n-1}. \quad (14)$$

На другому етапі визначаємо будь-яку ортогональну матрицю $A_i \in \text{Hom}(E_i^{n-1})$ для $i = \overline{1, N}$, де $\text{Hom}(E_i^{n-1})$ – гомоморфізм простору

E_i^{n-1} . Ця матриця необхідна для обчислення координат власних векторів шуканих матриць X_i задачі (3)-(6)-(1)-(2). Умовою для знаходження коефіцієнтів матриць A_i виступає таке матричне співвідношення

$$\nu_i^{-4} (A_i^T \cdot A_i) = 1 \quad (i = \overline{1, N}), \quad A_{i, n-1, k} = \nu_i^2 / \sqrt{n-1} \quad (k = \overline{1, n-1}), \quad (15)$$

де A_{ijk} – елемент матриці A_i . Аналогічно [1], розглядаємо рядки матриці A_i як $(n-1)$ -вимірні вектори $\bar{A}_{ij}$ ($j = \overline{1, n-1}$). Тоді з умови (15) випливає, що

$$A_{ijk} = \begin{cases} \nu_i^2 / \sqrt{j(j+1)} & (j = \overline{1, n-2}) \wedge (k = \overline{1, j}), \\ -\nu_i^2 \sqrt{j/(j+1)} & (j = \overline{1, n-2}) \wedge (k = j+1), \\ 0 & (j = \overline{1, n-2}) \wedge (k = \overline{j+2, n-1}), \\ \nu_i^2 / \sqrt{n-1} & (j = \overline{1, n-2}) \wedge (k = \overline{1, n-1}). \end{cases} \quad (16)$$

На третьому етапі необхідно знайти для кожної матриці X_i ($i = \overline{1, N}$) систему взаємноортонормованих власних векторів $\bar{\eta}_{ij} \in E^n$ ($j = \overline{1, n-1}$). Проведений аналіз моделі (3)-(6)-(1)-(2) показав, що власні вектори $\bar{\eta}_{ij}$ матриці X_i зв'язані з ортонормованою базою $\bar{e}_{ij}$ підпростору E_i^{n-1} векторним рівнянням

$$\bar{\eta}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\nu_i^2} \left[\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \bar{e}_{ik} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \bar{e}_{i, n-1} \right] & (j = 1); \\ \frac{1}{\nu_i^2} \left[\sum_{k=j}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \bar{e}_{ik} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \bar{e}_{i, n-1} - \frac{j-1}{\sqrt{j(j-1)}} \bar{e}_{i, j-1} \right] & (j = \overline{2, n-1}). \end{cases} \quad (17)$$

На основі (17) отримується система ортогональних власних векторів матриці X_i , яка задовільняє умову $\langle \bar{\eta}_{ij}, \bar{\eta}_{ik} \rangle = \nu_i^{-4} \delta_{jk}$ ($i = \overline{1, N}; j, k = \overline{1, n-1}$), тобто вектори $\bar{\eta}_{ij}$ не є нормованими.

На четвертому етапі обчислюємо власні числа λ_{ij} ($j = \overline{1, n-1}$) матриць X_i . Характерною ознакою матриці інцидентій стабілізаційної функції споживання є співпадіння власних чисел цієї матриці, тобто $\lambda_{i1} = \dots = \lambda_{i, n-1} = \lambda_i^*$. Для всіх $i = \overline{1, N}$ розраховуємо значення λ_i^* за формулою

$$\lambda_i^* = -n\bar{k}_i / (n\|\bar{a}\|^2 - \langle \bar{a}, \bar{e} \rangle^2), \quad (18)$$

де

$$\bar{k}_i = 2k_i + 2 \langle \bar{\beta}_i c_i - \bar{w}_i, \bar{a} \rangle. \quad (19)$$

На п'ятому етапі вираховуємо коефіцієнти матриць інцидентій X_i функцій споживання для i -ої соціальної групи ($i = \overline{1, N}$). Матрицю X_i можна знайти за таким співвідношенням

$$X_i = \lambda_i^* \sum_{j=1}^{n-1} \bar{\eta}_{ij} \otimes \bar{\eta}_{ij} \quad (i = \overline{1, N}), \quad (20)$$

де $\otimes$ – тензорний добуток. Коефіцієнти x_{ijk} матриці X_i прогнозують очікувану реакцію споживачів i -ої соціальної групи на зміну вектора цін, а саме: 1% зростання ціни k -го продукту приводить до збільшення на $x_{ijk} \times 10^2$ витрат j -ої частки бюджету споживача i -ої соціальної групи. Ці матриці мінімізують величину функціоналу (3).

На шостому етапі знаходимо матрицю інцидентій X стабілізаційної функції споживання регіональної ринкової соціально-економічної системи $G(E, K, S)$ з заданою соціальною структурою населення:

$$X = \sum_{i=1}^N v_i X_i. \quad (21)$$

Коефіцієнти матриці $X: E^n \rightarrow E^n$ оцінюють очікувані зміни в процесах споживання в регіоні інтегровано, з врахуванням реакції населення із різних соціальних груп.

На сьомому етапі будуємо згідно вимог [3] узагальнену функцію корисності споживачів системи $G(E, K, S)$ з точністю до деяких констант α_0, β_0 :

$$\begin{aligned} \log h(u, \bar{p}) = & \alpha_0 + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N v_i \alpha_{ij} \right) \log p_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_{jk} \log p_j \log p_k + \\ & + \beta_0 \sum_{i=1}^N v_i u_i \prod_{j=1}^n p_j^{\beta_{ij}}, \end{aligned} \quad (22)$$

де $h(u, \bar{p})$ – AIDS-функція корисності споживача, α_{ij}, β_{ij} – координати відповідних векторів, x_{jk} – коефіцієнти матриці X , а $0 \leq u_i \leq 1$ – параметр, що характеризує рівень споживання продуктів в i -й соціальній групі ($u_i = 0$ у випадку мінімально-необхідного споживання та $u_i = 1$ для максимального). Аналогічно (22) формуються функції корисності

населення кожної соціальної групи, тільки використовуються відповідні матриці X_i .

Отже, запропонований метод визначення стабілізаційної функції споживання для регіональної ринкової соціально-економічної системи є узагальненням [1] і дозволяє враховувати фактор поділу населення регіону на соціальні групи. Крім прогнозної оцінки реакції населення на зміну вектора цін, можна отримати аналітично функцію корисності споживача, яку можна застосувати у макроекономічному моделюванні. Підкреслимо, що розраховані матриці інцидентів X_i функції споживання є одними із можливих.

Література.

1. Твердохліб І.П., Цегелик Г.Г. Метод визначення стабілізованої функції споживання. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1998. Вип. 50, с.196-200.
2. Твердохліб І.П. Метод апроксимації моделей пріоритетного споживання. //В кн.: Сучасні проблеми математики: Матеріали міжнародної наук. конференції. Частина 3.- Київ: Ін-т математики НАН України, 1998, с.126-128.
3. Deaton A.S. and Muellbauer J. An Almost Ideal Demand System. //Amer. Econ. Rev. June 1980, vol. 70, p.312-326.

I.P.Tverdohlib, G.G.Tsegelyck

The method of the definition of stable function of consumption for regional marketing system with heterogeneous social structure of population.

Method of the definition of the stable function of consumption for regional marketing system with heterogeneous social structure of population, which is based on the well-known modal an Almost Ideal Demand System is proposed.

Стаття надійшла до редколегії 13.10.98.

УДК 517.51

Г.Г.Цегелик, Н.В.Федчишин

До побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона для функцій двох дійсних змінних, заданих таблично

Некласична теорія мажорант і діаграм Ньютона бере свій початок з робіт [1,2], в яких вперше введено поняття некласичної

мажоранти і діаграми Ньютона нескінченної числової послідовності, встановлені необхідні і достатні умови існування діаграми Ньютона, вивчені властивості мажоранти Ньютона. Як застосування, запропоновано підхід до побудови класу наближених методів пошуку інформації в файлах баз даних, що використовують характеристики діаграми Ньютона послідовності значень пошукового ключа, яким характеризуються записи файла. В [3] теорія неklasичних мажорант і діаграм Ньютона перенесена на функції дійсної змінної, задані таблично. Як застосування, запропоновано використати цей апарат для побудови чисельного методу пошуку екстремуму негладких і розривних функцій. В [4] апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона використаний для побудови чисельного методу обчислення визначених інтегралів. В [5] пропонується використати цей апарат для побудови чисельного методу наближеного розв'язування задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку, а також для розробки методу рівномірного наближення функцій, заданих на проміжку.

В даній роботі неklasична теорія мажорант і діаграм Ньютона: розроблена для функцій дійсної змінної, заданих таблично, переноситься на функції двох дійсних змінних, заданих таблично. Робота є продовженням [6].

Розглянемо функцію двох дійсних змінних $z = f(x, y)$, яка задана своїми значеннями в деяких точках (x_i, y_j) ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$):

$$f(x_i, y_j) = z_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m).$$

Нехай $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $y_1 < y_2 < \dots < y_m$,

$$|z_{ij}| = a_{ij} \leq M \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m).$$

де M – деяка стала, і $a_{11} \cdot a_{1m} \cdot a_{n1} \cdot a_{nm} \neq 0$.

Точку $P_{ij}(x_i, y_j, -\ln a_{ij})$ з координатами $x = x_i$, $y = y_j$, $z = -\ln a_{ij}$ в просторі xyz назвемо точкою зображення значення функції $z = f(x, y)$ в точці (x_i, y_j) . Припустимо, що точки зображення P_{ij} значень функції $z = f(x, y)$ в точках (x_i, y_j) ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$) в просторі xyz побудовані. Множину цих точок позначимо через S , а її опуклу оболонку – через $C(S)$. Для кожної точки $(x, y) \in R = \{x_1 \leq x \leq x_n, y_1 \leq y \leq y_m\}$ визначимо точку $B(x, y, \kappa(x, y))$, де

$$\kappa(x, y) = \inf_{(x, y, z) \in C(S)} z.$$

Множина точок $B(x, y, \kappa(x, y))$, де $(x, y) \in R$, утворює багатогранну поверхню δ_f , яка обмежує $C(S)$ знизу. Ця поверхня є неперервною, опуклою і її рівняння має вигляд:

$$z = \kappa(x, y), \quad (x, y) \in R,$$

поверхню δ_f , визначену на R , назовемо діаграмою Ньютона функції $z = f(x, y)$ на R .

Діаграма Ньютона δ_f функції $z = f(x, y)$ має такі властивості:

1) кожна вершина δ_f розміщена в одній із точок зображення P_{ij} значення функції $z = f(x, y)$ в точці (x_i, y_j) ; 2) кожна точка зображення P_{ij} знаходиться на δ_f або розміщена вище неї; 3) кожній точці $(x_i, y_j) \in R$ на діаграмі δ_f відповідає точка $B(x_i, y_j, \kappa_{ij})$, де $\kappa_{ij} = \kappa(x_i, y_j)$.

Позначимо

$$M_f(x, y) = e^{-\kappa(x, y)}, \quad (x, y) \in R.$$

Тоді для кожної точки (x_i, y_j) ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$) виконується нерівність

$$|f(x_i, y_j)| = |z_{ij}| = a_{ij} \leq M_f(x_i, y_j).$$

Дійсно, з визначення δ_f випливає, що $-\ln a_{ij} \geq \kappa(x_i, y_j)$ або $a_{ij} \leq e^{-\kappa(x_i, y_j)} = M_f(x_i, y_j)$. Крім того

$$M_f(x_1, y_1) = |f(x_1, y_1)|, \quad M_f(x_1, y_m) = |f(x_1, y_m)|,$$

$$M_f(x_n, y_1) = |f(x_n, y_1)|, \quad M_f(x_n, y_m) = |f(x_n, y_m)|.$$

Функцію $z = M_f(x, y)$, визначену на R , назовемо мажорантою Ньютона функції $z = f(x, y)$ на R .

Нехай

$$M_f(x_i, y_j) = T_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m).$$

Величини

$$R_{ij}(x) = \left(\frac{T_{i-1,j}}{T_{ij}} \right)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}} \quad (i = 2, 3, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m; R_{1j} = 0)$$

$$R_{ij}(y) = \left(\frac{T_{i,j-1}}{T_{ij}} \right)^{\frac{1}{y_j - y_{j-1}}} \quad (j = 2, 3, \dots, m; i = 1, 2, \dots, n; R_{i1} = 0)$$

назвемо (i, j) -ми числовими нахилами $M_f(x, y)$ відповідно в напрямку осей абсцис і ординат, а величини

$$D_{ij}(x) = \frac{R_{i+1,j}(x)}{R_{ij}(x)} \quad (i = 2, 3, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, m; D_{1j} = D_{ny} = \infty)$$

і

$$D_{ij}(y) = \frac{R_{i,j+1}(y)}{R_{ij}(y)} \quad (j = 2, 3, \dots, m-1; i = 1, 2, \dots, n; D_{i1} = D_{im} = \infty)$$

назвемо (i, j) -ми числовими відхиленнями $M_f(x, y)$ відповідно в напрямку осей $0x$ і $0y$.

Із опуклості вниз діаграми Ньютона δ_f випливають такі нерівності

$$\begin{aligned} D_{ij}(x) &\geq 1 \quad (i = 2, 3, \dots, n-1), \\ D_{ij}(y) &\geq 1 \quad (j = 2, 3, \dots, m-1). \end{aligned}$$

Нехай E – множина пар індексів (i, j) , для яких $a_{ij} \neq 0$. Покажемо, що коефіцієнти T_{ij} значень мажоранти Ньютона $M_f(x, y)$ в точках (x_i, y_j) можна безпосередньо визначити через коефіцієнти a_{ij} , $(i, j) \in E$. Розглянемо просторовий трикутник Δ_p , утворений точками $P_{i_1j_1}, P_{i_2j_2}, P_{i_3j_3}$, де $(i_k, j_k) \in E$, $k = 1, 2, 3$. Проекція цього трикутника на площину xu дасть трикутник Δ , вершини якого позначимо через $C_{i_1j_1}, C_{i_2j_2}, C_{i_3j_3}$. Введемо позначення

$$h_{123} = h_{23}(i_1, j_1) = \begin{vmatrix} x_{i_1} - x_{i_2} & y_{j_1} - y_{j_2} \\ x_{i_1} - x_{i_3} & y_{j_1} - y_{j_3} \end{vmatrix}.$$

Тоді $h_{123} = h_{231} = h_{312}$ (перевіряється розкриттям відповідних визначників). Для того щоб точка C_{ij} належала трикутнику Δ , досить, щоб одночасно виконувались такі умови:

$$\begin{aligned} H_1 &= h_{23}(i, j) \cdot h_{23}(i_1, j_1) \geq 0, \\ H_2 &= h_{31}(i, j) \cdot h_{31}(i_2, j_2) \geq 0, \\ H_3 &= h_{12}(i, j) \cdot h_{12}(i_3, j_3) \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Ці умови впливають із ознак взаємного розміщення прямої і пари точок.

Припустимо, що для точки C_{ij} виконуються нерівності (1), причому хоча б одна з них є строгою. Визначимо аплікату точки $\bar{P}(x_i, y_j, -\ln t_{ij})$ перетину трикутника Δ_p з прямою, паралельною осі аплікат, яка проходить через точку C_{ij} .

Рівняння площини, яке проходить через точки $P_{i_1j_1}, P_{i_2j_2}, P_{i_3j_3}$, запишемо у вигляді

$$\begin{vmatrix} x - x_{i_1} & y - y_{j_1} & z + \ln a_{i_1j_1} \\ x_{i_2} - x_{i_1} & y_{j_2} - y_{j_1} & -\ln a_{i_2j_2} + \ln a_{i_1j_1} \\ x_{i_3} - x_{i_1} & y_{j_3} - y_{j_1} & -\ln a_{i_3j_3} + \ln a_{i_1j_1} \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки точка $\bar{P}$ лежить на цій площині, то для знаходження аплікати $-\ln t_{ij}$ цієї точки одержуємо рівняння

$$\begin{vmatrix} x_i - x_{i_1} & y_j - y_{j_1} & -\ln t_{ij} + \ln a_{i_1j_1} \\ x_{i_2} - x_{i_1} & y_{j_2} - y_{j_1} & -\ln a_{i_2j_2} + \ln a_{i_1j_1} \\ x_{i_3} - x_{i_1} & y_{j_3} - y_{j_1} & -\ln a_{i_3j_3} + \ln a_{i_1j_1} \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник по елементах третього стовпчика, дістаємо рівняння

$$\ln \left(\frac{a_{i_1j_1}}{t_{ij}} \right)^{h_{13}(i_2, j_2)} - \ln \left(\frac{a_{i_1j_1}}{a_{i_2j_2}} \right)^{h_{13}(i, j)} + \ln \left(\frac{a_{i_1j_1}}{a_{i_3j_3}} \right)^{h_{12}(i, j)} = 0.$$

Оскільки $h_{13}(i_2, j_2) - h_{13}(i, j) + h_{12}(i, j) = h_{32}(i, j)$, і $-h_{12}(i, j) = h_{21}(i, j)$, то

$$t_{ij} = \left((a_{i_1j_1})^{h_{32}(i, j)} (a_{i_2j_2})^{h_{13}(i, j)} (a_{i_3j_3})^{h_{21}(i, j)} \right)^{\frac{1}{h_{13}(i_2, j_2)}}.$$

Тому

$$T_{ij} = \sup_{H_1, H_2, H_3 \geq 0} t_{ij},$$

де точна верхня межа береться по всім можливим трикутникам $\Delta \in R$, для яких в (3) має місце хоча б одна строга нерівність.

Література.

1. Цегелик Г.Г. Мажоранты и диаграммы Ньютона числовых последовательностей и их приложение к поиску информации в базах данных. — Киев, 1985. — 12 с. — (Препринт /АН УССР. Институт кибернетики им. В.М.Глушкова; № 85-49). 2. Цегелик Г.Г. Организация и поиск

информации в базах данных. Львов: Вища школа, 1987, 176 с.
 3. Цегелик Г.Г. Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение //Укр. матем. журн., 1989. № 9. Т.41. С. 1273-1276. 4. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. Використання неklasичного апарату мажорант і діаграм Ньютона функцій для побудови нової квадратурної формули //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.– мат. Вип. 41. 1995. С. 108-111. 5. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. Апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій дійсної змінної, заданих таблично, та його використання //Матер. міжнарод. наук. конф. «Сучасні проблеми математики». Чернівці – Київ, 1998. Ч. 3. С. 189–192. 6. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. Апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.– мат. Вип. 50. 1998. С. 209–211.

G.G.Tsegelyk, N.V.Fedchyshyn

To the construction of the device of the Non-Classical Newtonian Majorants and Diagrams for the functions of two real variables given tabularly

The device of Non-Classical Newtonian Majorants and Diagrams for the functions of two real variables given tabularly is constructed and the properties of these Majorants and Diagrams are investigated in the paper.

Стаття надійшла до редколегії 10.11.1998

УДК 539.3

Н.М.Щербина

**Про один чисельно – аналітичний метод
розв'язування крайових задач**

Значна частина задач, які виникають при дослідженні напружено-деформованого стану тонкостінних елементів конструкцій (оболонки, пластин, стержнів) під дією експлуатаційних навантажень, у тому числі при контактній взаємодії з жорсткими тілами, зводиться до розв'язування крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами.

У даній праці розглядається один із можливих методів розв'язування таких задач. Цей метод в ідейному плані подібний до

методу, який детально досліджений у праці [4] і виявився ефективним при розв'язуванні багатьох практичних задач у випадку систем із сталими коефіцієнтами.

1. Розглянемо наступну математичну модель у вигляді системи n лінійних звичайних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами:

$$\frac{d}{dx}z(x) = A(x)z(x) + f(x), \quad x \in [0, b], \quad (1)$$

з крайовими умовами, накладеними на функцію $z(x)$ при $x=0$ та $x=b$ (по $n/2$ на кожному кінці, n – парне). Тут z – невідомий вектор з компонентами $z_1, z_2, \dots, z_n$; $A(x)$ – функціональна матриця розмірності $n \times n$, елементи якої $a_{ij}(x)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) – задані неперервні функції в інтервалі зміни аргументу x ; $f(x)$ – вектор-функція з компонентами $f_i(x)$. Надалі вважатимемо, що виконуються умови, які забезпечують існування і єдиність розв'язку крайової задачі.

При розв'язуванні сформульованої двоточної лінійної крайової задачі використовуємо прийом зведення її до набору $n+1$ задач Коші

$$\frac{d}{dx}z^{(0)}(x) = A(x)z^{(0)}(x) + f(x), \quad z_i^{(0)}(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx}z^{(k)}(x) = A(x)z^{(k)}(x), \quad z_i^{(k)}(0) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

За допомогою розв'язків задач (2) – (3) розв'язок крайової задачі записується у вигляді

$$z(x) = z^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^n C_k z^{(k)}(x). \quad (4)$$

Невідомі сталі C_k визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь, одержаної при задоволенні крайових умов.

Метод знаходження розв'язків задач (2) – (3) пов'язаний безпосередньо з побудовою матрицанта. Як відомо [1], матрицант може бути представлений у вигляді такого ряду:

$$G_0^x = E + \int_0^x A(x_1) dx_1 + \int_0^x A(x_2) \int_0^{x_2} A(x_1) dx_1 dx_2 + \dots + \\ + \int_0^x A(x_k) \int_0^{x_k} A(x_{k-1}) \dots \int_0^{x_2} A(x_1) dx_1 dx_2 \dots dx_k + \dots.$$

Цей ряд є абсолютно і рівномірно збіжним у будь-якому замкненому інтервалі неперервності функції $A(x)$.

Відзначимо, що при описаному підході відшукування розв'язку крайової задачі не має потреби у чисельному розв'язуванні задач Коші. Основною проблемою тут є обчислення матрицанта G_0^x . У загальному випадку матриці $A(x)$ це є складною і аналітично практично нерозв'язальною задачею.

Використовуючи зображення матрицанта у вигляді мультиплікативного інтегралу [1], наближене обчислення матрицанта здійснюємо за формулою:

$$G_0^x = [E + A(\xi_n)\Delta x_n] \cdots [E + A(\xi_2)\Delta x_2] [E + A(\xi_1)\Delta x_1] + O(\Delta x). \quad (5)$$

Тут $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$; $x_n = x$). Через $O(\Delta x)$ позначено величини порядку $O(\Delta x_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Відзначимо деякі характерні аспекти організації обчислювальної процедури. Вважаючи Δx_k малими першого порядку, при обчисленні $G_{x_{k-1}}^{x_k}$ з точністю до малих другого порядку можна взяти

$$A(x) \approx \text{const} = A(\xi_k).$$

При наближеному обчисленні матрицанта істотно використовуємо також таку його властивість:

$$G_0^x = G_{x_{n-1}}^{x_n} G_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} \cdots G_{x_1}^{x_2} G_0^{x_1}.$$

Нехай при чисельній реалізації пропонованого методу розв'язування крайової задачі потрібно одержати значення матрицанта у точках $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m$ проміжку інтегрування $[0, b]$, де $\hat{x}_m = b$. Тоді, використовуючи асоціативність добутку матриць, достатньо m разів виконати описану процедуру з формулою (5). Алгоритм включає наступні кроки.

Крок 1-й. Обчислити $G_0^{\hat{x}_1}$.

Крок 2-й. Обчислити $G_{\hat{x}_1}^{\hat{x}_2}$ і

$$G_0^{\hat{x}_2} = G_{\hat{x}_1}^{\hat{x}_2} \cdot G_0^{\hat{x}_1}.$$

Крок 3-й. Обчислити $G_{\hat{x}_2}^{\hat{x}_3}$ і

$$G_0^{\hat{x}_3} = G_{\hat{x}_2}^{\hat{x}_3} \cdot G_0^{\hat{x}_2}.$$

...

Крок m -й. З попереднього кроку маємо $G_0^{\hat{x}_{m-1}}$. Обчислити $G_{\hat{x}_{m-1}}^{\hat{x}_m}$

і

$$G_0^{\hat{x}_m} = G_{\hat{x}_{m-1}}^{\hat{x}_m} \cdot G_0^{\hat{x}_{m-1}}.$$

Позначимо через $g_{ij}(x)$ елементи матриці G_0^x , а через $k_{ij}(x, \tau)$ – матриці $K(x, \tau) = G_0^x [G_0^\tau]^{-1}$. Тоді розв'язок крайової задачі у покомпонентному записі матиме вигляд

$$z_i(x) = \sum_{k=1}^n C_k g_{ik}(x) + \int_0^x \sum_{j=1}^n k_{ij}(x, \tau) f_j(\tau) d\tau \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

При $x=0$ $n/2$ невідомих сталих C_k легко визначаються відразу. Решта сталих C_k знаходяться з наступної системи $n/2$ лінійних алгебраїчних рівнянь, отриманої внаслідок задоволення крайових умов при $x=b$:

$$z_i(b) = z_i^{(0)}(b) + \sum_{k \in J_2} C_k g_{ik}(b), \quad (7)$$

де $J_2 = \{1, 2, \dots, n\} \setminus J_1$. Через J_1 і J_2 позначені відповідно множини індексів знайдених та ще не визначених сталих C_k .

2. Відзначимо також важливі часткові випадки, коли матрицант виражається у явному вигляді через вихідну матрицю $A(x)$.

За умови Лаппо–Данилевського (матриця $A(x)$ є комутативною зі своїм інтегралом):

$$A(x) \cdot \int_0^x A(\tau) d\tau = \int_0^x A(\tau) d\tau \cdot A(x), \quad (8)$$

матрицант має вигляд

$$G_0^x = \exp\left(\int_0^x A(\tau) d\tau\right). \quad (9)$$

Схема побудови розв'язку досліджуваної крайової задачі залишається без змін, особливість цього випадку – в обчисленні матрицанга. Тут для обчислення матрицанга G_0^x використовуємо розклад матричної експоненти у матричний ряд, який збігається рівномірно на будь-якому скінченному інтервалі [1]:

$$e^{M(x)} = E + \frac{1}{1!} M(x) + \frac{1}{2!} M^2(x) + \dots + \frac{1}{m!} M^m(x) + \dots, \quad (10)$$

де $M(x) = \int_0^x A(\tau) d\tau$.

Елементи матриці $M(x)$ позначатимемо через $m_{ij}(x)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Згідно з (10), елементи G_0^x обчислюються за формулами

$$g_{ii}(x) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{m_{ii}^{(s)}(x)}{s!}, \quad g_{ij}(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{m_{ij}^{(s)}(x)}{s!} \quad (i \neq j), \quad (11)$$

де $m_{ij}^{(s)}(x)$ – це (i, j) -й елемент матриці M^s . Зазначимо, що при практичних розрахунках у рядах (11) обмежуємося m членами. Вибір параметра m залежить від конкретної задачі і тісно пов'язаний з точністю результатів обчислень.

Розв'язок крайової задачі матиме вигляд (4), де

$$z_i^{(0)} = \int_0^x \sum_{j=1}^n \tilde{g}_{ij}(x, \xi) f_j(\xi) d\xi, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$\tilde{g}_{ij}(x, \xi)$ – елементи матриці $G(x, \xi) = G(x)G^{-1}(\xi) = \exp\left(\int_{\xi}^x A(\tau) d\tau\right)$.

Сталі C_k визначаються так само, як у загальному випадку.

Нехай $A = \{a_{ij}\}_1^n$ – стала матриця системи рівнянь (1). Вона задовольняє умові комутативності (8), а тому матрицантом, згідно з (9), у цьому випадку є матриця e^{Ax} .

При розв'язуванні конкретних практичних задач зустрічається випадок, коли матриця A є нільпотентною (деякий степінь її дорівнює нулю). Тоді, обмежуючись $m-1$ членами розкладу матричної експоненти e^{Ax} у матричний ряд:

$$e^{Ax} = E + A \frac{x}{1!} + A^2 \frac{x^2}{2!} + \dots + A^{m-1} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!},$$

отримуємо розв'язок, який збігається з точним. Наприклад, для побудови розв'язку задачі, досліджуваний у праці [3], достатньо було обмежитись трьома членами матричного ряду. Якщо ж матриця не є нільпотентною, то для досягнення потрібної точності результатів необхідно у залежності від конкретної задачі при наближеному обчисленні матрицанта брати різне число членів матричного ряду. Це питання детально досліджене у праці [4].

Таким чином, описаний метод дозволяє одержати наближений розв'язок крайової задачі в аналітичній формі, що є особливо цінним при розв'язуванні контактних задач. Розроблено програмний модуль для обчислення матрицанта у загальному випадку функціональної матриці $A(x)$ (виконання умови Лаппо–Данилевського не вимагається).

Проілюструємо метод на такій крайовій задачі:

$$\frac{dy_1}{dx} = (\cos x)y_1 + (\sin x)y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = (\sin x)y_1 + (\cos x)y_2;$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(1) = 6.2428210789.$$

Для даної задачі виконується умова Лаплас–Данилевського, але цей факт ніяк не використовується; вибір задачі обумовлений лише тим, що для неї відомий аналітичний розв'язок [2].

За описаним методом розв'язок даної задачі зображається у вигляді

$$y_1(x) = C_1 g_{11}(x) + C_2 g_{12}(x),$$

$$y_2(x) = C_1 g_{21}(x) + C_2 g_{22}(x),$$

де $g_{ij}(x)$ – елементи деякого наближення матрицанта G_0^x . Задовольняючи умови при $x = 0$ і враховуючи, що

$$g_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

знаходимо $C_1 = 1$. З умови при $x = 1$ одержимо вираз для сталої C_2 :

$$C_2 = (6.2428210789 - g_{21}(1)) / g_{22}(1).$$

У таблиці наведені результати розрахунків у точках $\hat{x}_i = \hat{x}_0 + ih$, $i = 0, \dots, 10$, $h = 0.1$ проміжку $[0, 1]$. Кожний проміжок $[\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}]$, $i = 0, \dots, 9$ розбивався k точками. У таблиці наведені результати для $k = 1000, 10000$ і результати, обчислені за точним аналітичним розв'язком.

Таблиця

x	k = 1000		k = 10000		Точний розв'язок	
	y ₁	y ₂	y ₁	y ₂	y ₁	y ₂
0.0	1.00000	2.00019	1.00000	2.00002	1.00000	2.00000
0.1	1.11604	2.21572	1.11604	2.21554	1.11604	2.21552
0.2	1.26864	2.46456	1.26865	2.46438	1.26865	2.46436
0.3	1.46522	2.75058	1.46524	2.75039	1.46525	2.75037
0.4	1.71398	3.07829	1.71401	3.07811	1.71401	3.07809
0.5	2.02364	3.45294	2.02369	3.45276	2.02370	3.45274
0.6	2.40317	3.88038	2.40324	3.88022	2.40325	3.88020
0.7	2.86128	4.36695	2.86138	4.36681	2.86139	4.36679
0.8	3.40587	4.91909	3.40600	4.91898	3.40602	4.91897
0.9	4.04333	5.54279	4.04350	5.54273	4.04352	5.54273
1.0	4.77769	6.24282	4.77792	6.24282	4.77794	6.24282

Література.

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1998.–552 с.
2. Еругин Н.П., Штокало И.З. и др. Курс ообыкновенных дифференциальных уравнений. К.: Вища школа, 1974.–472 с.
3. Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. Киев: Наук. думка, 1988.– 280 с.
4. Щербина Н.М. Методи розв'язування контактних задач для пружних анізотропних шаруватих циліндричних оболонок.–Препр. НАН України, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, № 7 – 94, 1994.– 56 с.

N.M.Shcherbyna

On some numerical–analytical method for solving of the boundary problems

Matrix method idea to solve the linear boundary problem for the thin-walled elements of constructions has been developed in a case of the system of ordinary differential equations with variable coefficients. The test example is given to illustrate the application and validity of the proposed method.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.1998

УДК 624.074:678.067

Н.М.Щербина, Ю.М.Щербина

**Задачі оптимального проектування
композитних оболонок. 1. Неоднорідна оболонка
мінімальної маси**

При оптимальному проектуванні композитних оболонок з урахуванням специфічних особливостей їх механічної поведінки, структурної будови та технології виготовлення виникає потреба у розробці спеціальних моделей нелінійного програмування та адаптації і застосування сучасних обчислювальних методів.

У даній праці задачі оптимізації композитних циліндричних оболонок з неоднорідним за товщиною пакетом шарів формуються як задача нелінійного програмування

$$\begin{aligned} F(y) &\rightarrow \text{extr}, \\ y &\in D, \end{aligned} \tag{1}$$

де y – вектор змінних, за якими здійснюється оптимізація, F – функція мети (відображає певні характеристики проекту оболонки), D – допустима множина (задається нерівностями, взагалі кажучи, нелінійними), $extr$ – означає $\min$ або $\max$.

Для розв'язування отриманих задач нелінійного програмування використовується метод лінеаризації [3] та його квазіньютонівські модифікації [5,6].

1. Опис проблеми оптимального проектування у термінах нелінійного програмування пов'язаний із формуванням: а) параметрів оптимізації, тобто вектора y ; б) множини D допустимих проектних розв'язків (під допустимим проектним розв'язком розуміємо конкретне значення y , яке визначається обмеженнями, що моделюють необхідні фізико-механічні і технологічні властивості проекту); в) критерія оптимальності проекту $F(y)$, який описує ефект від вибору того чи іншого допустимого проектного розв'язку.

При постановці задач оптимального проектування композитних оболонок, складених із n шарів, параметри оптимізації – компоненти вектора y – доцільно згрупувати таким чином: геометричні параметри (товщина, радіус, довжина) і структурні параметри (коефіцієнт об'ємного армування μ , кути армування $\beta_1, \dots, \beta_n$, відносний вміст шарів з даним кутом армування у пакеті $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$). Отже, у загальному випадку вектор параметрів оптимізації виглядатиме так: $y = (y_1, \dots, y_N) = (h, R, l, \beta_1, \dots, \beta_n, \mu, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$.

Множина D допустимих проектних розв'язків задається обмеженнями, які можна класифікувати як геометричні, структурні та фізичні. Смысл геометричних та структурних обмежень очевидний, а фізичні обмеження забезпечують вимоги щодо жорсткості, міцності, стійкості та інших фізичних характеристик проекту. Отже,

$$D = \{y : \varphi(y) \leq 0, \chi(y) \leq 0, \psi(y) \leq 0\}, \quad (2)$$

де $\varphi(y), \chi(y), \psi(y)$ – вектор-функції, які описують відповідно геометричні, структурні та фізичні обмеження. Їх вигляд та кількість компонент залежать від конкретної задачі та вибраної теоретичної моделі для опису напружено-деформованого стану оболонки.

2. Розглядається багат шарова циліндрична оболонка з неоднорідним за товщиною пакетом шарів. Величини $l, 2h, R$ характеризуватимуть відповідно її довжину, загальну товщину, радіус середньої поверхні. Припускається, що при деформуванні шари залишаються пружними і працюють без взаємного проковзування.

Для n -шарової оболонки з неоднорідним за товщиною пакетом шарів приймається гіпотеза [1]:

$$\sigma_{ij} = \sum_{m=1}^n \sigma_{ij}^{(m)} = \sum_{m=1}^n A_{ijkl}^{(m)} e_{kl},$$

$$\rho = \sum_{m=1}^n \rho^{(m)},$$
(3)

де $\sigma_{ij}^{(m)}$, $\rho^{(m)}$ – компоненти тензора напружень і густина матеріалу в кожному шарі, ρ – стала густина пакету, $A_{ijke}^{(m)}$ – компоненти тензора жорсткісних властивостей матеріалу m -го шару оболонки. Пружні характеристики кожного шару оболонки визначаються за відомими формулами теорії армування через властивості арматури, сполучника і параметри армування [1]. Врахування кутів армування шарів багатошарової оболонки здійснюється за формулами перетворення пружних сталей при повороті осей координат [1].

Для всього пакету шарів оболонки приймається узагальнена кінематична гіпотеза типу Тимошенка, яка водночас з урахуванням анізотропії жорсткісних характеристик, враховує податливість трансверсальним зсувним деформаціям та стиснення в поперечному напрямі. За цією гіпотезою маємо

$$e_{ii} = \varepsilon_{ii} + z\chi_{ii}, \quad e_{i3} = \varepsilon_{i3} \quad (i=1,2);$$

$$e_{12} = \varepsilon_{12} + 2z\chi_{12}, \quad e_{33} = 0,$$

$$\sigma_{33} \neq 0.$$
(4)

Тут ε_{ij} , χ_{ij} – компоненти тензора деформації серединної поверхні оболонки, z – координата в радіальному напрямі пакету (відлік від серединної поверхні оболонки).

Компоненти деформації з невідомими узагальненими переміщеннями зв'язані геометричними співвідношеннями [2]:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{R},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varepsilon_{13} = \gamma_1 + \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\varepsilon_{23} = \gamma_2 + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{v}{R},$$

$$\chi_{11} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}, \quad \chi_{22} = \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \varphi},$$

$$2\chi_{12} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x}.$$
(5)

Тут для величин вживаються загальноприйняті позначення та термінологія [1,2], інші позначення пояснюються в тексті.

Рівняння руху оболонки при дії осьового навантаження T за кінематичною гіпотезою типу Тимошенка для всього пакету складових шарів мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \varphi} &= 2h\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{R} Q_2 &= 2h\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} N_2 &= 2h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T\chi_{11}, \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \varphi} - Q_1 &= 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial H}{\partial x} - Q_2 &= 0,\end{aligned}\tag{6}$$

де $N_i, S, Q_i; M_i, H$ ($i = 1, 2$) – зусилля і моменти, t – час.

Величини N_i, S, Q_i, M_i, H визначаються так:

$$\begin{aligned}N_i &= \int_{-h}^h \sigma_{ii} dz, \quad Q_i = \int_{-h}^h \sigma_{i3} dz, \quad S = \int_{-h}^h \sigma_{12} dz, \\ M_i &= \int_{-h}^h \sigma_{ii} z dz, \quad H = \int_{-h}^h \sigma_{12} z dz \quad (i = 1, 2).\end{aligned}\tag{7}$$

Після підстановки (3) у (7), враховуючи при цьому, що

$$\begin{aligned}\int_{-h}^h \sigma_{ij} dz &= \int_{-h}^{\delta_1} \sigma_{ij}^{(1)} dz + \int_{\delta_1}^{\delta_2} \sigma_{ij}^{(2)} dz + \dots + \int_{\delta_{n-1}}^h \sigma_{ij}^{(n)} dz \\ \int_{-h}^h \sigma_{ij} z dz &= \int_{-h}^{\delta_1} \sigma_{ij}^{(1)} z dz + \int_{\delta_1}^{\delta_2} \sigma_{ij}^{(2)} z dz + \dots + \int_{\delta_{n-1}}^h \sigma_{ij}^{(n)} z dz\end{aligned}$$

(δ_m – координата поверхні m -го і $m+1$ -го шарів, $m=1, \dots, n-1$, n – число шарів), отримаємо у результаті інтегрування такі вирази для зусиль і моментів – характеристик напруженого стану шаруватого пакету:

$$\begin{aligned}N_1 &= h(A_{1111} \varepsilon_{11} + A_{1122} \varepsilon_{22}) + \frac{h^2}{2} (B_{1111} \chi_{11} + B_{1122} \chi_{22}), \\ N_2 &= h(A_{1122} \varepsilon_{11} + A_{2222} \varepsilon_{22}) + \frac{h^2}{2} (B_{1122} \chi_{11} + B_{2222} \chi_{22}), \\ S &= 2hA_{1212} \varepsilon_{12} + 2h^2 B_{1212} \chi_{12},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= 2hA_{1313}\varepsilon_{13}, Q_2 = 2hA_{2323}\varepsilon_{23}, \\
M_1 &= \frac{h^2}{2}(B_{1111}\varepsilon_{11} + B_{1122}\varepsilon_{22}) + \frac{h^3}{3}(D_{1111}\chi_{11} + D_{2222}\chi_{22}), \\
M_2 &= \frac{h^2}{2}(B_{1122}\varepsilon_{11} + B_{2222}\varepsilon_{22}) + \frac{h^3}{3}(D_{1122}\chi_{11} + D_{2222}\chi_{22}), \\
H &= B_{1212}h^2\varepsilon_{12} + \frac{2h^3}{3}D_{1212}\cdot 2\chi_{12},
\end{aligned} \tag{8}$$

де

$$\begin{aligned}
A_{ijkl} &= \sum_{m=1}^n A_{ijkl}^{(m)}\theta_m, B_{ijkl} = \sum_{m=1}^n A_{ijkl}^{(m)}\eta_m, \\
D_{ijkl} &= \sum_{m=1}^n A_{ijkl}^{(m)}\zeta_m, \\
\theta_m &= (\bar{\delta}_m - \bar{\delta}_{m-1}), \eta_m = (\bar{\delta}_m^2 - \bar{\delta}_{m-1}^2), \zeta_m = (\bar{\delta}_m^3 - \bar{\delta}_{m-1}^3), \\
\bar{\delta}_m &= \frac{\delta_m}{h}, \bar{\delta}_0 = -1, \bar{\delta}_n = 1.
\end{aligned} \tag{9}$$

За гіпотезою $e_{33} = 0$ ($\sigma_{33} \neq 0$) компоненти тензора жорсткості $A_{ijkl}^{(m)}$ m -го шару оболонки визначаються співвідношеннями вигляду

$$\begin{aligned}
A_{1111}^{(m)} &= \frac{E_1^{(m)}}{1 - \nu_{12}^{(m)}\nu_{21}^{(m)}} \left(1 + \frac{\nu_{13}^{(m)} + \nu_{12}^{(m)}\nu_{21}^{(m)}}{\Delta_m} \frac{E_1^{(m)}}{E_3^{(m)}} \right), \\
A_{1122}^{(m)} &= \frac{E_1^{(m)}}{1 - \nu_{12}^{(m)}\nu_{21}^{(m)}} \left(\nu_{12}^{(m)} + \frac{(\nu_{13}^{(m)} + \nu_{12}^{(m)}\nu_{21}^{(m)})(\nu_{23}^{(m)} + \nu_{21}^{(m)}\nu_{12}^{(m)})}{\Delta_m} \frac{E_2^{(m)}}{E_3^{(m)}} \right), \\
A_{2222}^{(m)} &= \frac{E_2^{(m)}}{1 - \nu_{12}^{(m)}\nu_{21}^{(m)}} \left(1 + \frac{(\nu_{23}^{(m)} + \nu_{21}^{(m)}\nu_{12}^{(m)})^2}{\Delta_m} \frac{E_2^{(m)}}{E_3^{(m)}} \right), \\
A_{1133}^{(m)} &= E_1^{(m)} \frac{(\nu_{13}^{(m)} + \nu_{12}^{(m)}\nu_{21}^{(m)})}{\Delta_m}, A_{2233}^{(m)} = E_2^{(m)} \frac{(\nu_{23}^{(m)} + \nu_{21}^{(m)}\nu_{12}^{(m)})}{\Delta_m}, \\
A_{1212}^{(m)} &= \frac{1}{2}G_{12}^{(m)}, A_{1313}^{(m)} = \frac{1}{2}G_{13}^{(m)}, A_{2323}^{(m)} = \frac{1}{2}G_{23}^{(m)},
\end{aligned} \tag{10}$$

де $\nu_{ij}^{(m)}$ і $E_i^{(m)}$ – коефіцієнти Пуасона і модулі Юнга, для яких виконуються відомі залежності [1], $G_{ij}^{(m)}$ ($i, j = 1, 2, 3$) – модулі зсуву m -го ша-

ру оболонки.

Нехай шарувата циліндрична оболонка шарнірно оперта на торцях і стискається вздовж твірної зусиллям T . У випадку осесиметричної задачі ($\nu = 0$, $\gamma_2 = 0$, величини u, γ_1, w залежать тільки від координати x , похідні по φ від шуканих функцій дорівнюють нулю) за допомогою (5), (6), (8) отримуємо систему рівнянь для дослідження статичної стійкості оболонки з урахуванням неоднорідності її структурної будови за товщиною:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} + C_2 \frac{d\bar{w}}{d\xi} + C_3 \frac{d^2 \gamma}{d\xi^2} &= 0, \\ C_4 \frac{d^2 \bar{w}}{d\xi^2} + C_5 \frac{d\gamma}{d\xi} - C_2 \frac{d\bar{u}}{d\xi} + C_6 \bar{w} &= T \frac{d\gamma}{d\xi}, \\ C_3 \frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} - C_5 \frac{d\bar{w}}{d\xi} + C_7 \frac{d^2 \gamma}{d\xi^2} + C_8 \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

У системі (11) вжито такі позначення:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{h}{R} A_{1111}, C_2 = \frac{h}{R} A_{1122}, C_3 = \frac{h^2}{2R^2} B_{1111}, \\ C_4 &= \frac{2h}{R} A_{1313}, C_5 = C_4 - \frac{h^2}{2R^2} B_{1122}, C_6 = -C_2, \\ C_7 &= \frac{h^3}{3R^3} D_{1111}, C_8 = -C_4, \end{aligned}$$

$\bar{w} = \frac{w}{R}$, $\bar{u} = \frac{u}{R}$ – безрозмірні величини поперечного і поздовжнього

переміщень оболонки, $\xi = \frac{x}{R}$.

З отриманої ключової системи рівнянь (11) при $\bar{w} = A \sin \lambda_m \xi$, $\gamma = B \cos \lambda_m \xi$ (параметр $\lambda_m = \frac{m\pi}{l}$ характеризує хвилеутворення в поздовжньому напрямку) визначається [4] критичне значення стискаючого зусилля для шаруватої оболонки як функції геометричних параметрів і фізико-механічних характеристик складових шарів, числа шарів та кутів їх армування:

$$T = a \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{\sqrt{\frac{b}{a}}} + c, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{4} \left(\frac{h}{R} \right)^4 B_{1111}^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{h}{R} \right)^4 D_{1111} A_{1111}, \\
 b &= \left(\frac{h}{R} \right)^2 A_{1122}^2 - \left(\frac{h}{R} \right)^2 A_{1111} A_{1122}, \\
 c &= \left(-8 \left(\frac{h}{R} \right) A_{1111} A_{1313}^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{h^3}{R} \right) D_{1111} (A_{1122}^2 - A_{1111} A_{1122} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{R} \right)^3 B_{1111}^2 \left(A_{1122} - \frac{A_{1122}^2}{A_{1111}} \right) \right) \Bigg/ d; \\
 d &= 4 A_{1111} A_{1313} - \left(\frac{h}{R} \right) A_{1111} B_{1122} + \left(\frac{h}{R} \right) B_{1111} A_{1122}.
 \end{aligned}$$

За (9), (10) величина T виражається через параметри оптимізації.

3. Зафіксуємо радіус серединної поверхні R і довжину оболонки l , густину її матеріалу ρ (тобто густину сполучника ρ_c , армувальних волокон ρ_a , коефіцієнт армування μ), пружні характеристики: E_c, E_a – модулі пружності; ν_c, ν_a – коефіцієнти Пуасона та кути армування шарів $\beta_1, \dots, \beta_n$.

При заданих властивостях вихідних компонент композиту ставиться задача знаходження оптимальної структури будови оболонки мінімальної маси. Функція мети – маса оболонки – визначається за формулою

$$F(y) = 2\pi(\mu\rho_a + (1-\mu)\rho_c)Rl(x(h_+ - h_-) + h_-), \quad (13)$$

де $x = \frac{h - h_-}{h_+ - h_-}$, $h = \sum_{k=1}^n h_k$; h_-, h_+ – відповідно нижня і верхня межі товщини оболонки.

При фіксованих значеннях кутів армування β_k ($1 \leq k \leq n$) вектор проектних параметрів має N компонент: $y = (y_1, \dots, y_N) = (x, \bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_{n-1})$, тобто параметрами оптимізації є загальна товщина оболонки $h = x(h_+ - h_-) + h_-$, координати поверхонь розділу (відповідно і товщини складових шарів).

Обмеження на параметри оптимізації у розглядуваній задачі приймаються такими:

$$\begin{aligned}
 &x \geq 0, \quad 1 - x \geq 0; \\
 &1 - \bar{\delta}_k \geq 0, \quad 1 + \bar{\delta}_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1); \\
 &\bar{\delta}_k - \bar{\delta}_{k-1} \geq 0 \quad (k = 2, \dots, n-1).
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

У даному випадку критерієм несучої здатності вибрана статична стійкість оболонки при осьовому стиску, відповідне фізичне обмеження матиме вигляд нерівності

$$1 - \frac{T}{T_*} \leq 0, \tag{15}$$

де T_* – задане значення осьового зусилля, T визначається за формулою (12).

Отже, задача оптимізації за масою композитної оболонки, яка працює на статичну стійкість від осьового стиску, формулюється так: знайти мінімум функції (13) за умов (14), (15). Ця задача є задачею нелінійного програмування.

Література.

1. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572с.
2. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка, 1973. 248с.
3. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. М.: Наука, 1983. 136с.
4. Щербина Н.Н., Черепюк И.Д. Статическая устойчивость слоистой цилиндрической оболочки //Динаміка і стійкість композиційних структур: Матеріали І наук.-техн. семінару. Львів, 1991. С.34-38.
5. Щербина Ю.Н., Голуб Б.М. Квазиьютоновская модификация метода линеаризации //Кибернетика. 1988. №6. С.66-71.
6. Щербина Ю.Н., Голуб Б.М. Модификация метода линеаризации для решения задачи математического программирования на простом множестве типа «параллелепипеда» //Мат. методы и физ.-мех. поля. 1989. Вып. 30. С.24-28.

N.M. Shcherbyna, Yu.M. Shcherbyna

Optimum projection problems for composite shells.

1. Nonhomogeneous shell of minimum mass

The statement of optimum projection problems for the laminated composite shells is presented. A generalized shell theory taking into account the nonhomogeneous elastic properties is assumed to as a basis of these investigation. Mathematical model of the considered optimum problem is formulated as the nonlinear programming problem.

Стаття надійшла до редколегії 15.12.1998.

Зміст

<i>М.Я.Бартіш, О.В.Николайчук, А.І.Читурко.</i> Про деякі різниці модифікації методу Гаусса-Ньютона для нелінійної задачі найменших квадратів з малою нормою нев'язки.....	3
<i>П.П.Вагін, Р.Б.Малець, Г.А.Шинкаренко.</i> Квазілінеаризація задачі термопружності для гнучких оболонок з деформівною нормаллю	8
<i>В.Д.Вовк.</i> Проблеми застосування об'єктного підходу до програмної реалізації чисельних методів розв'язування початково-крайових задач	15
<i>В.М.Горлач, Я.В.Кондратюк.</i> Чисельна модель акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною. 4. Осесиметрична задача для ізотропних середовищ з в'язкістю	22
<i>Є.Г. Грицько, Р.В. Гудзь, Л.М. Журавчак, Г.В. Фітель.</i> Числово-аналітичний спосіб розв'язування нестационарної задачі теплопровідності з нелінійними граничними умовами	29
<i>І.І. Дияк.</i> Комбінована чисельна схема для дослідження задач пластичності ..	36
<i>А.В.Дубовик, А.М.Олійник.</i> Застосування методів комп'ютерної алгебри до розв'язування осесиметричної задачі теорії пружності та теплопровідності	42
<i>І.М.Дудзяний, В.М.Цимбал.</i> Деяка задача для сингулярно збуреного рівняння третього порядку.....	48
<i>М.В.Жук.</i> Застосування методу Канторовича для систем диференціальних рівнянь у випадку крайових умов мішаної задачі.....	52
<i>Ю.С.Козаревська, Г.А.Шинкаренко, О.Г.Шинкаренко.</i> Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: локалізовані найменші квадрати.....	59
<i>О.М.Козяк, Г.А.Шинкаренко, О.Г.Шинкаренко.</i> Чисельне розв'язування узагальнених задач оптимального розміщення джерела пасивної субстанції .	71
<i>А.В.Костенко, Х.О.Засадна.</i> Достатні умови оптимального за швидкодією керування нагріванням термочутливих тіл	76
<i>В.В.Кревс, Я.Г.Савула.</i> Про ієрархічну модель теплопровідності тонкого шару	83
<i>М.В.Марчук, М.М.Хом'як.</i> Варіаційний підхід в задачі про неідеальний міжшаровий контакт	96
<i>Ю.П.Олійник.</i> Приклад функції наповнення для побудови тунельних алгоритмів глобальної мінімізації	107
<i>І.П.Твердохліб, Г.Г.Цегелик.</i> Метод визначення стабілізаційної функції споживання для регіональної ринкової системи з неоднорідною соціальною структурою населення	111
<i>Г.Г.Цегелик, Н.В.Федчишин.</i> До побудови апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона для функцій двох дійсних змінних, заданих таблично. .	116
<i>Н.М.Щербина.</i> Про один чисельно – аналітичний метод розв'язування крайових задач	121
<i>Н.М.Щербина, Ю.М.Щербина.</i> Задачі оптимального проектування композитних оболонок. 1. Неоднорідна оболонка мінімальної маси	127

Збірник наукових праць

Міністерство освіти України
Львівський державний університет
імені Івана Франка

Вісник
Львівського університету
Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.
Випуск 52

ЗАДАЧІ
ТА МЕТОДИ
ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Комп'ютерна верстка О.М.Левченко

Підписано до друку 23.02.99 . Формат 60×84 ¹/₁₆. Папір друк.
Друк різнографічний. Умовних друк. арк. 6.75
Тираж – 100 прим. Зам. № 42

Видавництво «Світ поліграфії»

ISSN 0201-758X. ISSN 0320-6572.

Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. мат., 1999, вип. 52, 1-140